Ю. П. ЗАЙЧЕНКО
С. А. ШУМИЛОВА

Исследование операций

СБОРНИК ЗАДАЧ

Допущено Министерством высшего и среднего специального образования УССР в качестве учебного пособия для студентов вузов, обучающихся по специальностям «Автоматизированные системы обработки информации и управления» и «Прикладная математика»

2-е издание, переработанное и дополненное

КИЕВ
«ВЫЩА ШКОЛА»
1990

ББК 22.18я73
З-17
УДК 517.93 (076.2)

Рецензент: д-р физ.-мат. наук, проф. *И. И. Ляшенко*
(Киевский государственный университет)

Редакция литературы по информатике и автоматике
Редактор *Ж. Г. Давиденко*

Зайченко Ю. П., Шумилова С. А.

З-17 Исследование операций: Сборник задач.— 2-е изд., перераб. и доп.— К.: Выща шк., 1990.— 239 с.: ил.
ISBN 5-11-002271-2

Сборник содержит задачи по линейному, нелинейному, дискретному, динамическому и стохастическому программированию.

Во втором издании (1-е изд.— 1984 г.) значительно расширены и дополнены главы, относящиеся к линейному и нелинейному программированию. В частности, включены задачи и примеры по численным методам оптимизации, методу штрафных функций, методу возможных направлений. Приведены необходимые теоретические сведения и описание основных методов, применение которых иллюстрируется решением конкретных примеров.

Для студентов вузов, обучающихся по специальностям «Автоматизированные системы обработки информации и управления» и «Прикладная математика».

$З\frac{2402000000-069}{М211\ (04)-90}113-90$ ББК 22.18я73

ISBN 5-11-002271-2

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

Настоящий сборник задач является второй книгой из комплекса учебной литературы по исследованию операций для специальностей «Автоматизированные системы обработки информации и управления» и «Прикладная математика». В сборнике подобраны и систематизированы задачи и примеры по основным разделам курса — линейному, нелинейному, динамическому и стохастическому программированию. Каждая глава содержит необходимые теоретические сведения и описание соответствующих методов и алгоритмов оптимизации. Материал излагается в соответствии с учебником Ю. П. Зайченко «Исследование операций» (3-е изд., 1988).

Второе издание (1-е изд., 1984) значительно дополнено нелинейным программированием, включен материал по современным численным методам поисковой оптимизации, методу возможных направлений, проекции градиента, методу штрафных функций. Глава по линейному программированию дополнена исследованием моделей задач ЛП на чувствительность. Применение методов иллюстрируется числовыми примерами с подробным объяснением решения, что позволяет использовать сборник для самостоятельной работы.

Из предисловия к первому изданию

Идея подготовки и написания настоящей книги обусловлена потребностью в методическом обеспечении практических занятий, проводимых по курсу "Исследование операций". Если теоретическая часть этого курса достаточно полно отражена в монографиях, учебниках и учебных пособиях, то пособия, предназначенные для проведения практических занятий, до сих пор практически отсутствуют. Известные задачники по математическому программированию, например [9, 10], охватывают не все разделы курса, в частности не включают динамическое и стохастическое программирование.

Глава 1

ЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

1.1. СОДЕРЖАТЕЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Линейное программирование (ЛП) — это раздел математического программирования, в котором рассматриваются методы решения экстремальных задач с линейным функционалом и линейными ограничениями, которым должны удовлетворять искомые переменные.

Рассмотрим несколько простых примеров содержательной постановки задач линейного программирования и построим их математические модели.

Задача об использовании сырья

Предположим, что некоторое предприятие после выполнения основной производственной программы располагает запасами сэкономленного сырья трех видов — s_1, s_2, s_3 соответственно в количествах b_1, b_2, b_3 условных единиц. Из этого сырья может быть изготовлено два вида изделий — P_1 и P_2. Известны: a_{ij} — количество единиц s_i-го вида сырья, идущего на изготовление единицы P_j-го вида изделия, и c_j — доход, получаемый от реализации одной единицы каждого вида изделия. Все указанные величины представлены в табл. 1.1.

Задача сводится к тому, чтобы составить такой план выпуска продукции, при котором доход предприятия от реализации всей продукции был бы максимальным.

Для построения математической модели данной задачи введем следующие обозначения: x_1 — количество единиц изделий вида P_1, x_2 — количество единиц изделий вида P_2, которые может выпускать предприятие.

Зная количество сырья каждого вида, идущее на изготовление одной единицы изделия, и запасы сырья можем составить систему ограничений, определяющую область возможных значений x_1 и x_2:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leqslant 21; \\ 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 30; \\ 2x_2 &\leqslant 16. \end{aligned}$$

Полученная система ограничений устанавливает, что количество сырья, расходуемое на изготовление всех изделий, не может превысить имеющихся на предприятии запасов. Исходя из физического смысла, на переменные налагаются дополнительные ограничения, требующие неотрицательности их значений: $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$ (x_1 и x_2 будут равны нулю, если соответствующий вид изделия не выпускается). Тогда доход, получаемый предприятием от реализации x_1 единиц изделий P_1 и x_2 единиц изделий P_2, составит $F = 3x_1 + 2x_2$.

Окончательно задача формулируется следующим образом.

Найти такой вектор $\mathbf{X} = |x_1, x_2|$, при котором достигается максимум целевой функции $F = 3x_1 + 2x_2$ и выполняется следующая система ограничений:

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leqslant 21; \\ 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 30; \\ 2x_2 &\leqslant 16; \end{aligned}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

В общем случае математическая модель такой задачи имеет следующий вид.

Найти вектор $\mathbf{X} = |x_1, x_2, \ldots, x_n|$, максимизирующий функцию $F = c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n$ при ограничениях

$$\begin{aligned} &a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \leqslant b_1; \\ &a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \leqslant b_2; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \leqslant b_m; \\ &x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n. \end{aligned}$$

Таблица 1.1

Вид сырья	Запас сырья	Расход сырья на изделие	
		P_1	P_2
s_1	21 (b_1)	3 (a_{11})	1 (a_{12})
s_2	30 (b_2)	2 (a_{21})	2 (a_{22})
s_3	16 (b_3)	0 (a_{31})	3 (a_{32})

Примечание. Прибыль от продажи единицы изделия P_1 равна 3 руб., от продажи единицы изделия P_2 — 2 руб.

Задача об использовании мощностей

Предположим, что предприятие должно за время T выполнить или, если это возможно, перевыполнить план производства двух видов изделий P_1 и P_2. Для производства каждого вида изделий может быть использовано оборудование групп A_1 и A_2. Производительность оборудования этих групп различна и определяется величиной a_{ij}, где i — индекс, отмечающий вид оборудования, j — индекс, отмечающий вид продукции. Стоимость единицы времени работы оборудования при изготовлении одной единицы продукции выражается величиной b_{ij}, $i = 1, 2$; $j = 1, 2$.

Требуется составить оптимальный план работы групп оборудования, при котором будет выполнен план выпуска продукции с минимальной себестоимостью и в заданный срок. Плановое количество изделия P_1 составляет N_1 штук, а P_2 — N_2 штук. Характеристики процесса производства изделий с помощью оборудования различных групп представлены в табл. 1.2.

Введем следующие переменные: x_{11} — количество единиц машинного времени, в течение которого первая группа оборудования будет производить первый вид изделий; x_{12} — количество единиц машинного времени, в течение которого первая группа оборудования будет производить второй вид изделия. Переменные x_{21}, x_{22} имеют аналогичный смысл.

Таблица 1.2

Группа оборудования	Производительность оборудования, шт/усл/ед		Цена единицы времени работы оборудования	
	P_1	P_2	P_1	P_2
A_1	a_{11}	a_{12}	b_{11}	b_{12}
A_2	a_{21}	a_{22}	b_{12}	b_{22}

Составим систему ограничений, учитывающую плановый период T (условных единиц времени) и плановые задания по каждому виду изделий N_1, N_2:

$$x_{11} + x_{12} = T;$$

$$x_{21} + x_{22} = T;$$

$$a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} \geqslant N_1;$$

$$a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} \geqslant N_2.$$

На переменные x_{11}, x_{12}, x_{21}, x_{22} налагаются дополнительные ограничения, требующие неотрицательности их значений, что вытекает из физического смысла самих переменных:

$$x_{11} \geqslant 0, \quad x_{12} \geqslant 0, \quad x_{21} \geqslant 0, \quad x_{22} \geqslant 0.$$

Стоимость изготовления продукции можно записать в виде следующей целевой функции:

$$F = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + b_{21}x_{21} + b_{22}x_{22}.$$

Тогда окончательно задача сформулируется следующим образом.

Требуется найти такой план $X = \| x_{ij} \|$, $i = 1, 2$, $j = 1, 2$, при котором достигается минимум значения целевой функции

$$F = b_{11}x_{11} + b_{12}x_{12} + b_{21}x_{21} + b_{22}x_{22}$$

и выполняются следующие ограничения:

$$\begin{aligned} x_{11} + \quad x_{12} &= T; \\ x_{21} + \quad x_{22} &= T; \\ a_{11}x_{11} + a_{21}x_{21} &\geqslant N_1; \\ a_{12}x_{12} + a_{22}x_{22} &\geqslant N_2; \end{aligned}$$

$$x_{ij} \geqslant 0, \quad i = 1, 2, \quad j = 1, 2.$$

Приведенные упрощенные примеры дают определенное представление о содержательных постановках и математических моделях задач линейного программирования. Реальные задачи намного сложнее. В них значительно труднее установить связи между управляемыми и неуправляемыми переменными, число которых достигает сотен и даже тысяч.

В рамках ЛП решаются самые различные задачи оптимизации из области экономики, управления промышленными объектами, социальными, военными и прочими системами. Размерность таких задач очень велика и отыскание их решения затруднительно без применения ЭВМ.

Наиболее распространенным универсальным методом решения задач ЛП является симплекс-метод. Существуют в ЛП и специальные методы, которые учитывают особенности математической модели задачи.

Записать математические модели следующих задач.

Задача 1. Механический цех может изготовить за смену 600 деталей № 1 или 1200 деталей № 2. Производственная мощность термического цеха, куда эти детали поступают на термообработку в тот же день, позволяет обработать за смену 1200 деталей № 1 или 800 деталей № 2. Цены на детали одинаковые. Определить ежедневную производственную программу выпуска деталей, максимизирующую товарную продукцию предприятия, при следующих дополнительных условиях:

а) оба цеха работают одну смену;

б) механический цех работает три смены, а термический — две смены;

в) предприятие работает в две смены, при этом деталей № 1 должно быть изготовлено не более 800 шт. и деталей № 2 — не более 1000 шт.

Задача 2. Из пункта A в пункт B ежедневно отправляются пассажирские и скорые поезда. В табл. 1.3 указаны количество вагонов разных типов, из которых ежедневно можно комплектовать поезда, и число пассажиров, на которое рассчитаны вагоны. Определить оптимальное число скорых и пассажирских поездов, при котором количество перевозимых пассажиров будет максимальным.

Таблица 1.3

Вагон	Парк вагонов	Поезд		Число пассажиров
		скорый	пассажирский	
Багажный	12	1	1	—
Почтовый	18	1	—	—
Жесткий	89	5	8	58
Купейный	79	6	4	40
Мягкий	35	4	2	32

Задача 3. Решить задачу 2 при условии, что пропускная способность дороги ограничивает число пассажирских поездов до шести в день.

Задача 4. Три механизма I, II, и III могут выполнять три вида земляных работ A, B и C. В табл. 1.4 указаны ресурсы рабочего времени каждого механизма, производительность механизмов при выполнении различных работ и стоимость одного часа работы механизма.

А. Определить максимальную загрузку механизмов при максимальном суммарном объеме выполненных работ.

Б. Определить оптимальную загрузку оборудования, обеспечивающую максимальный объем работ при соблюдении условия комплектности $a : b : c = 1 : 2 : 3$.

Таблица 1.4

Механизмы	Производительность, м³/ч			Удельная стоимость, руб./ч			Ресурс времени
	A	*B*	*C*	*A*	*B*	*C*	
I	30	20	40	2	4	3	400
II	20	30	50	3	2	5	300
III	60	40	20	5	3	6	280

В. Найти оптимальную загрузку оборудования, минимизирующую суммарные затраты, при объемах работ $a = 6000$ м³, $b = 50\,000$ м³, $c = 8000$ м³.

Задача 5. Авиакомпания для организации пассажирских перевозок между центром Ц и четырьмя городами $Г_1$, $Г_2$, $Г_3$, $Г_4$ располагает тремя группами самолетов. Первая группа состоит из 10 четырехмоторных, вторая — из 25 двухмоторных самолетов нового образца и третья — из 40 двухмоторных самолетов старого образца. Количество пассажиров, перевозимых одним самолетом данного типа по каждому маршруту за 1 месяц, и связанные с этим эксплуатационные расходы на 1 самолет (тыс. руб.) указаны в табл. 1.5. Количество пассажиров, которое нужно перевозить по каждому маршруту в месяц, составляет соответственно 40, 50, 40, 30 тыс. человек, а стоимость одного билета равна 20, 15, 18 и 30 руб. Распределить самолеты по маршрутам, исходя из условия достижения максимальной прибыли авиакомпаний.

Таблица 1.5

Тип самолета	Количество пассажиров/Эксплуатационные расходы			
	$Ц - Г_1$	$Ц - Г_2$	$Ц - Г_3$	$Ц - Г_4$
I	16/1.2	30/0.8	19/1.5	25/1.6
II	20/1.4	25/1.5	17/2.0	16/2.9
III	25/1.0	18/1.1	20/1.8	20/1.7

Задача 6. Нефтеперерабатывающий завод получает 4 полуфабриката: 400 тыс. л алкилата, 250 тыс. л крекинг-бензина, 350 тыс. л бензина прямой перегонки и 100 тыс. л изопентана. В результате смешивания этих четырех компонентов в разных пропорциях образуются три сорта авиационного бензина: бензин *А* (2 : 3 : 5 : 2),

бензин B (3 : 1 : 2 : 1) и бензин C (2 : 2 : 1 : 3). Стоимость 1 тыс. л бензина каждого сорта равна 120 руб., 100 руб. и 150 руб.

А. Определить соотношение компонентов, при котором будет достигнута максимальная стоимость всей продукции.

Б. Определить оптимальное соотношение, исходя из условия максимального использования компонентов.

Задача 7. На предприятие поступили две партии фанеры, причем первая партия содержит 400 листов, а вторая — 250 листов фанеры.

Таблица 1.6

Тип детали	Количество деталей, шт.						
	Первая партия			Вторая партия			
	R_1	R_2	R_3	R_1	R_2	R_3	R_4
1-й	0	6	9	6	5	4	0
2-й	5	3	4	5	3	2	6
3-й	12	14	0	7	4	5	7

Таблица 1.7

Производственные факторы	Затраты при различных технологиях					Лимит
	T_1	T_2	T_3	T_4	T_5	
Сырье	15	20	12	14	18	2000
Электроэнергия	0.20	0.30	0.15	0.25	0.30	300
Накладные расходы	4	5	6	3	2	1000
Зарплата	6	3	4	6	3	1600

Из них изготовляются комплекты, включающие 4 детали 1-го типа, 3 детали 2-го типа и 2 детали 3-го типа. Один лист фанеры каждой партии может раскраиваться тремя способами R_1, R_2 и R_3. Количество деталей каждого типа, которое получается при раскрое одного листа по тому или иному способу, представлено в табл. 1.6. Требуется раскроить материал так, чтобы обеспечить изготовление максимального числа комплектов.

Задача 8. Предприятие может работать по пяти технологическим процессам (T_1, T_2, T_3, T_4 и T_5), причем количество единиц выпускаемой продукции по разным технологическим процессам за 1 ед. времени соответственно равно 300, 260, 320, 400 и 450 шт. В процессе производства учитываются следующие производственные факторы: сырье, электроэнергия, зарплата и накладные расходы. Затраты соответствующих факторов при работе по разным технологическим процессам в течение 1 ед. времени указаны в табл. 1.7.

Найти программу максимального выпуска продукции.

Задача 9. Механический завод при изготовлении трех разных деталей I, II, III использует токарные, фрезерные и строгальные станки. При этом обработку каждой детали можно вести тремя различными технологическими способами T_1, T_2 и T_3. В табл. 1.8 указаны нормы времени при обработке детали на соответствующем станке каждым технологическим способом, а также ресурсы (станко-ч) каждой группы станков. Прибыль от продажи каждого вида изделия составляет соответственно 22, 18 и 30 руб.:

а) составить оптимальный план загрузки производственных мощностей, обеспечивающий максимальную прибыль;

Таблица 1.8

Тип станка	Нормы времени на обработку деталей, ч									Ресурс времени
	I			II			III			
	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	T_1	T_2	T_3	
Токарный	1	0.9	1.1	1.2	1.5	—	0.9	—	—	200
Фрезерный	0.8	0.8	1.3	0.9	1.1	1.3	1.1	0.8	—	400
Строгальный	—	0.7	1.0	0.7	—	1.3	1.3	0.6	—	300

б) считая, что между количеством выпускаемых деталей должно выполняться соотношение комплектности 1 : 2 : 1, определить производственную программу, обеспечивающую изготовление максимального числа комплектов;

в) решить задачу (А), если число деталей II не должно превышать 100 ед.

Задача 10. Для изготовления сплава из свинца, цинка, олова определенного состава используется сырье в виде пяти сплавов из тех же металлов, отличающихся составом и стоимостью 1 кг (табл. 1.9).

А. Определить, какое количество сплава каждого вида нужно взять, чтобы изготовить при минимальной себестоимости сплав, содержащий 20 % свинца, 30 % цинка и 50 % олова?

Б. Решить ту же задачу при следующих ограничениях на состав сплава: олова — от 40 % до 60 % и цинка — от 20 % до 30 %.

В. Решить ту же задачу при следующих ограничениях на состав сплава: олова — не более 40 % и цинка — не менее 20 %.

Таблица 1.9

Тип сплава	Содержание металла, %			Удельная стоимость, руб./кг
	Свинец	Цинк	Олово	
I	15	40	45	8
II	10	80	10	17
III	30	30	40	10
IV	40	25	35	12
V	10	70	20	15

Таблица 1.10

Станки	Норма времени обработки			Стоимость 1 ч, руб.	Время работы станка, ч
	A	*B*	*C*		
I	0.3	0.1	0.2	30	50
II	0.5	0.2	0.4	20	60
III	0.4	0.5	0.3	15	40

Задача 11. Детали *A*, *B* и *C* можно обрабатывать на трех станках (I, II, III). В табл. 1.10 указаны нормы затрат времени на обработку

станком соответствующей детали, стоимость 1 ч работы станка и предельное время работы станка. Предполагая, что любая деталь может обрабатываться на любом из станков, определить оптимальную производственную программу по одному из следующих критериев:

1) максимуму товарной продукции (Т);

2) максимуму суммарной прибыли (П);

3) минимуму суммарных затрат на обработку (S) при плане выпуска деталей A 300 шт., B 500 шт., C 100 шт.;

4) максимуму числа комплектов, включающих 3 детали A, 2 детали B и 1 деталь C;

5) максимум П при заданном ассортименте 3 : 2 : 1;

6) максимум П при заданном количестве деталей: A — 200 шт., B — 400 шт., C — 600 шт.;

7) максимум загрузки станков при заданном ассортименте 3 : 2 : 1;

8) максимальное число деталей A, B, C при одинаковом времени работы всех станков;

9) максимум П при условии, что каждый станок обрабатывает только одну деталь и по плану предусмотрен выпуск всех трех деталей;

10) максимум суммарной производительности при условиях п. 9 и одинаковом времени работы всех станков.

Задача 11. Используя данные табл. 1.10 и предполагая, что каждая деталь последовательно обрабатывается на каждом станке, составить производственную программу по одному из следующих критериев:

1) максимуму П;

2) максимуму Т;

3) максимуму П при условии, что деталей A — не менее 300 шт., деталей B — не более 200 шт.;

4) максимум Т при заданном ассортименте 3 : 2 : 1;

5) минимум S при заданном ассортименте 1 : 2 : 3.

1.2. ОБЩАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ ЛП И ЕЕ СВОЙСТВА

Задача, в которой требуется обратить в максимум (минимум) целевую функцию

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{1.2.1}$$

при условиях

$$\begin{aligned} &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i, \quad i = 1, \dots, s; \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i, \quad i = s+1, \dots s+t; \\ &\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i, \quad i = s+t+1, \dots, m; \end{aligned} \tag{1.2.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \dots, n \tag{1.2.3}$$

называется общей задачей линейного программирования, заданной в произвольной форме.

Эту задачу можно представить в векторной форме:

$$F(X) = C^T X \to \max \qquad (1.2.4)$$

при

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \dots + A_jx_j + \dots + A_nx_n; \qquad (1.2.5)$$

$$X \geqslant 0, \qquad (1.2.6)$$

где

$$A_1 = \begin{bmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \dots \\ a_{m1} \end{bmatrix}, \quad A_2 = \begin{bmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \dots \\ a_{m2} \end{bmatrix}, \dots, A_n = \begin{bmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \dots \\ a_{mn} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \dots \\ b_m \end{bmatrix},$$

$$C^T = (c_1, c_2, \dots, c_n), \; X^T = (x_1, x_2, \dots, x_n),$$

где A_j — вектор условий; B — вектор ограничений; C — вектор весовых коэффициентов при переменных в целевой функции; X — вектор переменных.

В матричном виде задача (1.2.1) — (1.2.3) запишется следующим образом:

$$F(X) = C^T X \to \max (\min) \qquad (1.2.7)$$

при условиях

$$AX \lesseqqgtr B; \qquad (1.2.8)$$

$$X \geqslant 0, \qquad (1.2.9)$$

где $A = \| a_{ij} \|$ — матрица размерности $m \times n$.

Задача, в которой необходимо найти максимум целевой функции (1.2.1) при условиях (1.2.2), приведенных к равенствам, и условиях (1.2.3), называется задачей ЛП в канонической форме.

Если в задаче ЛП необходимо отыскать минимум целевой функции

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \min,$$

то при приведении такой задачи к канонической форме целевая функция

$$F(X) = -\sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max.$$

Система ограничений остается без изменений.

Вектор $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, удовлетворяющий ограничениям задачи ЛП (1.2.2), называется ее решением либо планом. Если переменные $x_1, x_2, \dots, x_n$ удовлетворяют еще и условиям неотрицательности (1.2.3), то X называется допустимым планом или допустимым решением. Множество $R(X)$ допустимых планов, представляющее собой область допустимых решений (ОДР) задачи ЛП, является выпуклым многогранным множеством.

Допустимый план, соответствующий крайней точке множества, является опорным планом, либо допустимым базисным решением задачи ЛП. Допустимый план, обращающий в максимум (минимум) целевую функцию, называется оптимальным планом задачи ЛП — $X_{опт}$.

Теорема ЛП. *Пусть допустимое множество R задачи линейного программирования (1.2.1) — (1.2.3) является многогранником. Если функция принимает максимальное значение в некоторой точке допустимого множества R, то она принимает это значение в крайней точке R. Если целевая функция принимает максимальное значение более чем в одной крайней точке, то она принимает это же значение в любой их выпуклой комбинации.*

1.3. ГРАФИЧЕСКИЙ МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ЛП

Графический метод основан на геометрической интерпретации задачи ЛП и применяется для решения задач двумерного пространства. Задачи трехмерного пространства решаются очень редко, так как построение их решения неудобно и лишено наглядности. Рассмотрим метод на примере двумерной задачи.

Найти решение $X = (x_1, x_2)$, удовлетворяющее системе неравенств

$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\leq 21; \\ 2x_1 + 3x_2 &\leq 30; \\ 2x_2 &\leq 16; \end{aligned} \tag{1.3.1}$$

$$x_1 \geq 0, \quad x_2 \geq 0, \tag{1.3.2}$$

при котором значение целевой функции

$$F(X) = 3x_1 + 2x_2 \tag{1.3.3}$$

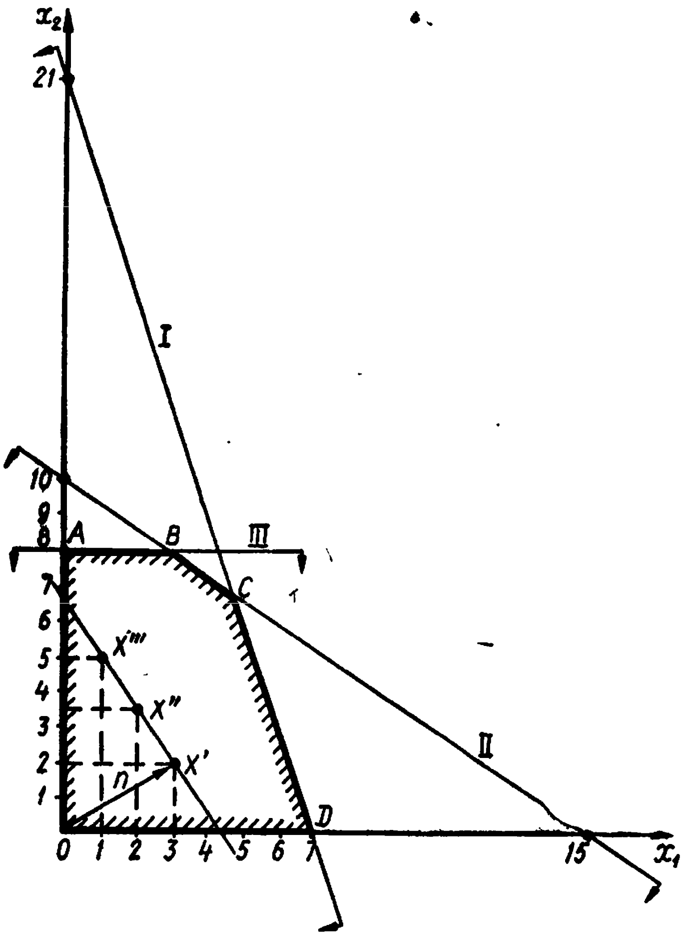

Рис 1.1

достигает максимума.

Построим на плоскости в декартовой прямоугольной системе координат x_1Ox_2 область допустимых решений задачи.

Первым неравенством (1.3.1) определяются две области на плоскости (рис. 1.1.). Одна из них — это область возможных планов задачи, другая — область, где этих планов нет. Границей между ними будет прямая, которую мы построим, заменив неравенство равенством $3x_1 + x_2 = 21$. По знаку первого неравенства находим область решения задачи. Аналогично, заменив неравенства равенствами, строим прямые II, III и по знакам неравенств определяем область решений задачи.

Неравенства $x_1 \geq 0$ и $x_2 \geq 0$ означают, что область решения будет расположена справа от оси ординат и над осью абсцисс. Таким образом, заштрихованная на рис. 1.1 область $OABCD$ будет областью допустимых решений, определенной ограничениями задачи. Крайние точки полученной выпуклой многогранной области будут соответствовать допустимым базисным решениям задачи (1.3.1) — (1.3.3). Значение целевой функции $F(X) = 3x_1 + 2x_2$ можно определить в любой точке $X = (x_1, x_2)$ области допустимых решений. Прямая линия, перпендикулярная вектору $n = (3, 2)$, будет геометрическим местом точек $X = (x_1, x_2)$, в которых целевая функция принимает одинаковые фиксированные значения. Так, в точке $X' = (3, 2)$ и в любой точке прямой, перпендикулярной вектору n и проходящей через точку X', значением функции будет $F = 3 \cdot 3 + 2 \cdot 2 = 13$.

Вектор n показывает направление параллельного перемещения прямой $X'X''$, соответствующее увеличению целевой функции.

Максимального значения целевая функция достигает в крайней точке C многогранника, являющегося областью допустимых решений задачи. Координаты точки C будут оптимальным решением задачи $X_{опт} = (x_1^{опт}; x_2^{опт})$ и могут быть

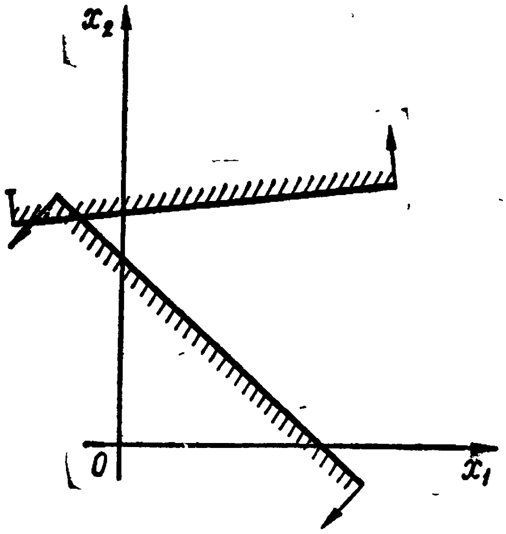

Рис. 1.2

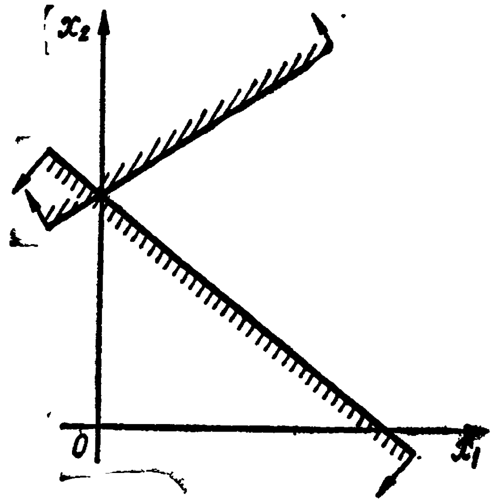

Рис. 1.3

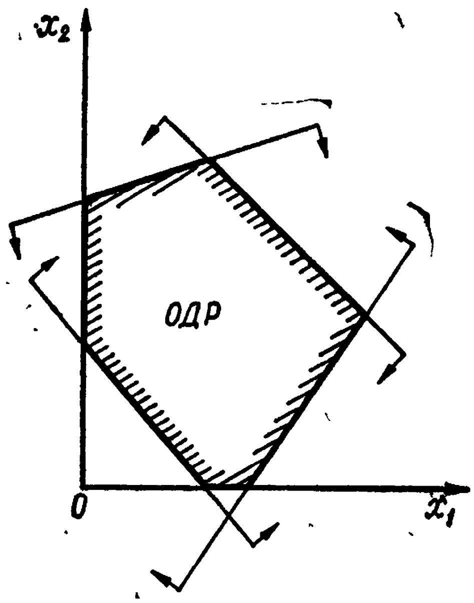

Рис. 1.4

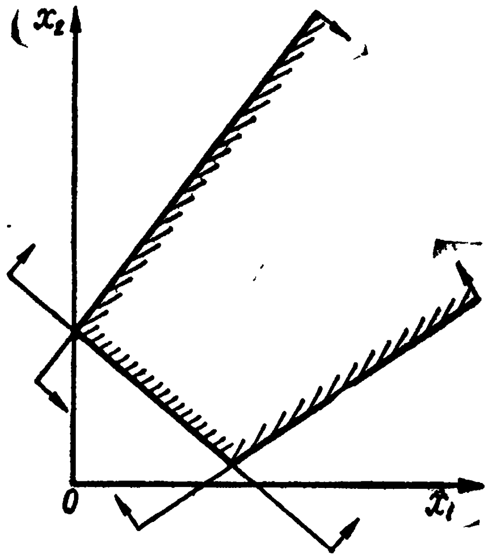

Рис. 1.5

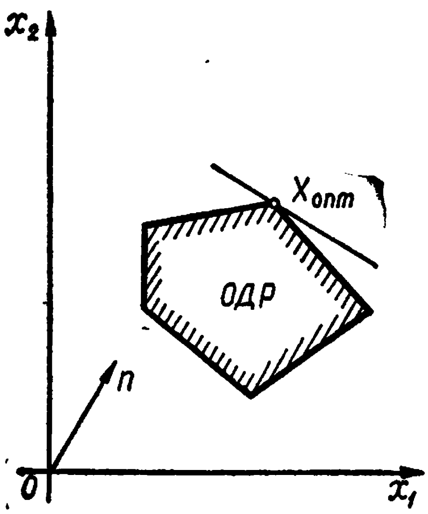

Рис. 1.6

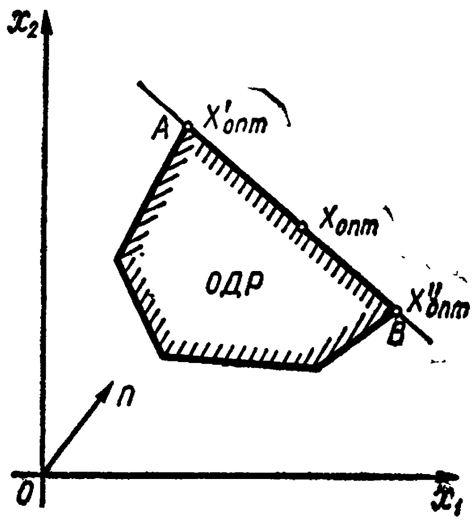

Рис. 1.7

найдены при решении уравнений

$$3x_1 + x_2 = 21;$$
$$2x_1 + 3x_2 = 30.$$

Вычислим

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 7, \quad \Delta_1 = \begin{vmatrix} 21 & 1 \\ 30 & 3 \end{vmatrix} = 33, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 3 & 21 \\ 2 & 30 \end{vmatrix} = 48;$$

$$x_1 = \frac{33}{7} = 4\frac{5}{7}, \quad x_2 = \frac{48}{7} = 6\frac{6}{7}.$$

Следовательно, $X_{опт} = \left(4\frac{5}{7}, 6\frac{6}{7}\right)$.

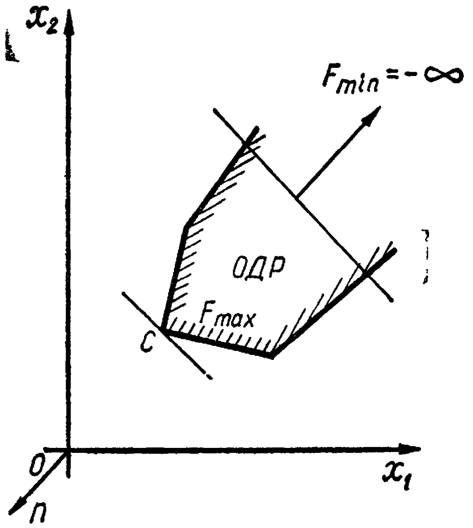

Рис. 1.8

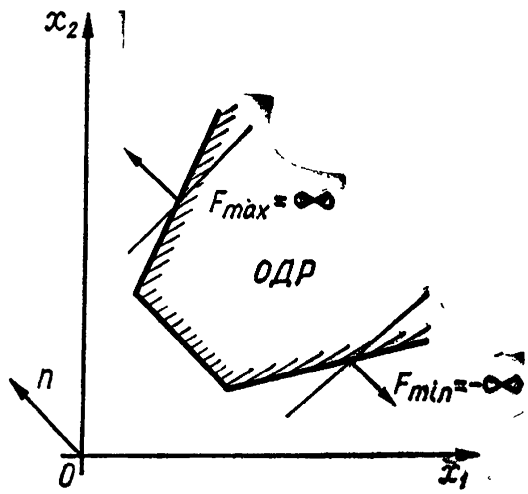

Рис. 1.9

Область допустимых решений системы может быть пустой, если система ограничений несовместна (рис. 1.2), одной точкой (рис. 1.3), выпуклым многогранником (рис. 1.4) и неограниченной выпуклой многогранной областью (рис. 1.5).

Для вариантов, представленных на рисунках ограниченной областью допустимых решений, могут встретиться два случая:

максимум целевой функции достигается в единственной точке (рис. 1.6);

максимальное значение целевой функции иметь место в двух вершинах A и B и, следовательно, в любой точке отрезка AB (рис. 1.7).

В случае, когда область допустимых решений является неограниченной, могут встретиться варианты:

целевая функция иметь экстремум (рис. 1.8);

функция не ограничена сверху и снизу, т. е. $F_{max} = \infty$, $F_{min} = -\infty$ (рис. 1.9).

1.4. ТАБЛИЧНЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Симплекс-метод является наиболее распространенным универсальным вычислительным методом, который может быть применен для решения любых задач линейного программирования как вручную, так и с помощью ЭВМ.

Идея метода состоит в последовательном продвижении по базисам опорных планов задачи, т. е. в последовательном улучшении планов задачи по определенному критерию, до тех пор, пока не будет получено оптимальное решение.

Рассмотрим последовательно процесс подготовки исходных данных и алгоритм решения задачи ЛП табличным симплекс-методом.

Для решения задачи ЛП, представленной в форме

$$F(X) = C^T X \to \max(\min) \qquad (1.4.1)$$

при условиях

$$AX \lesseqgtr B; \qquad (1.4.2)$$

$$X \geqslant 0, \qquad (1.4.3)$$

необходимо предварительно выполнить следующие процедуры:

привести математическую модель задач к каноническому виду;

определить начальное допустимое базисное решение задачи;

ввести в исходную симплекс-таблицу следующие параметры, соответствующие начальному базисному решению:

весовые коэффициенты при переменных x_j в целевой функции (строка c_j); переменные, которые входят в текущий базис x_i (столбец B_x); значения базисных переменных — $x_i = a_{i0}$ (столбец A_0); элементы $\| a_{ij} \|$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, матрицы условий задачи $A_{m \times n}$ (столбцы $A_1, A_2, \ldots, A_n$); оценки Δ_j, $j = 1, \ldots, n$, соответствующие векторам A_1, $A_2, \ldots, A_n$ (последняя индексная строка).

Оценки Δ_j определяются по формуле

$$\Delta_j = z_j - c_j, \quad z_j = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{ij}, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (1.4.4)$$

Весовые коэффициенты c_i при базисных переменных проставляются в левый столбец таблицы.

Значение целевой функции при текущем базисе

$$\Delta_0 = \sum_{i=1}^{m} c_i a_{i0}, \qquad (1.4.5)$$

заносится в последнюю строку столбца A_0.

Алгоритм симплекс-метода

1. Заполняется исходная симплекс-таблица по указанным выше правилам.
2. Если $\Delta_j \geqslant 0$ для всех $j = 1, \ldots, n$, то данный план является оптимальным.
3. Если имеются $\Delta_k < 0$ и в столбце A_k все элементы $a_{ik} \leqslant 0$, то функция не ограничена сверху на ОДР.
4. Если имеются $\Delta_j < 0$ и в столбцах A_j, соответствующих этим отрицательным оценкам, существует хотя бы один элемент $a_{ij} > 0$, то возможен переход к новому, лучшему плану, связанному с большим значением целевой функции.
5. Вектор A_k, который необходимо ввести в базис для улучшения плана, определяется по наименьшей отрицательной оценке Δ_j. Столбец, содержащий эту оценку, называется направляющим.
6. Вектор, который нужно вывести из базиса, определяется по отношению $\Theta_r = \min\limits_i \left\{ \dfrac{a_{i0}}{a_{ik}/a_{ik} > 0} \right\} = \dfrac{a_{r0}}{a_{rk}}$. Из базиса выводится вектор A_r, на котором достигается минимум Θ. Строка r (в таблице помечена стрелкой) называется направляющей.

Элемент a_{rk}, который стоит на пересечении направляющей строки и столбца, называется направляющим.

7. Заполняется таблица, соответствующая новому базисному решению.

Все элементы a_{ij} таблицы определяются по следующему рекуррентному соотношению:

$$a_{ij}^{l+1} = \begin{cases} a_{ij}^l - \dfrac{a_{rj}^l}{a_{rk}} a_{ik}^l & \text{при } i \neq r; \\[2ex] \dfrac{a_{rj}^l}{a_{rk}^l} & \text{при } i = r, \end{cases} \qquad (1.4.6)$$

где $i = 1, 2, 3, \ldots, m + 1$; $j = 0, 1, \ldots, n$; l — номер итерации.

Значение Δ_j можно определить двумя способами: а) как каждый элемент таблицы по выражению (1.4.6), б) по формуле (1.4.4).

Процесс вычисления заканчивается, когда найдено оптимальное решение (пункт 2), либо когда функция будет неограниченной на ОДР (пункт 3).

Пример 1.1. Найти максимум функции

$$F = 3x_1 + 2x_2 \tag{1.4.7}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\leqslant 2; \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 6; \end{aligned} \tag{1.4.8}$$

$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0. \tag{1.4.9}$$

Приведем заданную модель к каноническому виду, введя свободные переменные x_3 и x_4, превращающие неравенства (1.4.8) в равенства:

Найти максимум

$$F = 3x_1 + 2x_2$$

при ограничениях

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_0 \\ x_1 - & x_2 + & x_3 + & 0 \cdot x_4 = & 2; \\ 2x_1 + & x_2 + & 0 \cdot x_3 + & x_4 = & 6; \end{array}$$

$$x_j \geqslant 0.$$

Обозначим векторы условий задачи через $A_1 - A_4$, а вектор ограничений A_0.

Таблица 1.11

c_i		0	3	2	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
0	x_3	2	$\boxed{1}$	−1	1	0
0	x_4	6	2	1	0	1
	Δ	0	−3	−2	0	0

В задачах такого вида с положительными свободными переменными начальное допустимое базисное решение легко определяется, если взять в качестве начальных векторы A_3 и A_4, составляющие единичную подматрицу размерности m. Начальное допустимое базисное решение имеет вид $X = (0, 0, 2, 6)$. Заносим в исходную табл. 1.11 все необходимые данные. Элементы строки Δ рассчитываем по формуле (1.4.4):

$$\Delta_1 = \sum_{i=1}^{2} c_i a_{i1} - c_1 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 2 - 3 = -3;$$

$$\Delta_2 = \sum_{i=1}^{2} c_i a_{i2} - c_2 = 0 \cdot (-1) + 0 \cdot 1 - 2 = -2;$$

$$\Delta_3 = \sum_{i=1}^{2} c_i a_{i3} - c_3 = 0 \cdot 1 + 0 \cdot 0 - 0 = 0;$$

$$\Delta_4 = \sum_{i=1}^{2} c_i a_{i4} - c_4 = 0 \cdot 0 + 0 \cdot 1 - 0 = 0.$$

Если начальный базис состоит из свободных переменных, для которых $c_i = 0$, имеем $\Delta_j = -c_j$. Значение функции для данного начального базиса будет равно нулю:

$$F = \sum_{i=1}^{2} c_i a_{i0} = 0 \cdot 2 + 0 \cdot 9 = 0.$$

Так как в индексной строке табл. 1.11 имеются $\Delta_j < 0$ (п. 4) приступаем к улучшению плана.

Первая итерация. В базис вводим вектор A_1, которому соответствует минимальное значение Δ_j. Из базиса выводим вектор A_3, так как минимальное значение Θ достигается при $i = 3$.

$$\Theta = \min\left\{\frac{a_{30}}{a_{31}};\ \frac{a_{40}}{a_{41}}\right\} = \min\left\{\frac{2}{1};\ \frac{6}{2}\right\} = 2.$$

Таким образом, элемент a_{31} будет направляющим.

Заполняем табл. 1.12, соответствующую новому опорному плану, пользуясь рекуррентным соотношением (1.4.6).

Таблица 1.12

c_i		0	3	2	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
3	x_1	2	1	−1	1	0
0	x_4	2	0	$\boxed{3}$	−2	1
	Δ	6	0	−5	3	0

Приведем расчет нескольких элементов табл. 1.12:

$$a_{40}^{(2)} = a_{40}^{(1)} - \frac{a_{30}^{(1)} a_{41}^{(1)}}{a_{31}^{(1)}} = 6 - \frac{2 \cdot 2}{1} = 2;$$

$$a_{43}^{(2)} = a_{43}^{(1)} - \frac{a_{33}^{(1)} a_{41}^{(1)}}{a_{31}^{(1)}} = 0 - \frac{2 \cdot 1}{1} = 2.$$

После заполнения табл. 1.12 переходим к п. 2 алгоритма. Так как в строке оценок полученного нового плана имеются отрицательные значения Δ_j, приступаем ко второй итерации, продолжая улучшать план.

Результаты второй и третьей итерации приводятся в табл. 1.13 и 1.14.

Поскольку все $\Delta_j \geqslant 0$, то план, представленный в табл. 1.14, будет оптимальным $X_{опт} = (0, 6, 8, 0)$, $F_{max} = 12$.

Таблица 1.13

c_i		0	3	2	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
3	x_1	$2^2/3$	1	0	$\boxed{1/3}$	1/3
2	x_2	2/3	0	1	−2/3	1/3
	Δ	$9^1/3$	0	0	−1/3	5/3

Таблица 1.14

c_i		0	3	2	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
0	x_2	8	3	0	1	1
2	x_3	6	2	1	0	1
	Δ	12	1	0	0	2

Если требуется отыскать минимальное значение целевой функции, можно перейти к задаче на максимум, записав $F_{max} = (-1)\ F_{min}$, и решать ее по приведенному алгоритму. Однако такая процедура не обязательна, так как описанный алгоритм позволяет решать и задачу минимизации. В этом случае оптимальный план будет получен тогда, когда все $\Delta_j \leqslant 0$. Следовательно, если среди оценок начального опорного плана (либо плана, полученного на l-й итерации) имеются $\Delta_j > 0$ и в соответствующих им столбцах есть положительные элементы $a_{ij} > 0$, то такой план можно улучшить. Если несколько векторов имеют $\Delta_j > 0$, в базис вводится тот, у которого оценка больше. Затем выполняем пп. 6, 7 алгоритма и проверяем полученный план на оптимальность.

1.5. РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ЛП С ЛЮБЫМ ВИДОМ ОГРАНИЧЕНИЙ С ПОМОЩЬЮ ИСКУССТВЕННЫХ ПЕРЕМЕННЫХ (МЕТОД ИСКУССТВЕННОГО БАЗИСА)

Если система ограничений представлена неравенствами вида $\geqslant$ либо равенствами, начальный опорный план не может быть найден так же просто, как в рассмотренном примере. В таких случаях начальный опорный план отыскивают с помощью искусственных переменных.

Пример 1.2. Найти максимум функции

$$F = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \tag{1.5.1}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &\geqslant 7; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 &\geqslant 6; \\ x_1 + 4x_2 \quad &= 8; \end{aligned} \tag{1.5.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 3}. \tag{1.5.3}$$

Приведем задачу к каноническому виду:

$$F_{\max} = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 \qquad (1.5.4)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 &= 7; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 - x_5 &= 6; \\ x_1 + 4x_2 &= 8; \end{aligned} \qquad (1.5.5)$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 3}. \qquad (1.5.6)$$

Так как система (1.5.5) не решена относительно положительного единичного базиса, введем в нее три искусственные переменные x_6,

Таблица 1.15

c_i		0	2	3	−5	0	0	−M	−M	−M
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7	A_8
−M	x_6	7	2	1	−1	−1	0	1	0	0
−M	x_7	6	1	2	1	0	−1	0	1	0
−M	x_8	8	1	$\boxed{4}$	0	0	0	0	0	1
	Δ	−21M	−4M −2	−7M −3	5	M	M	0	0	0

Таблица 1.16

c_i		0	2	3	−5	0	0	−M	−M
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
−M	x_6	5	$\boxed{7/4}$	0	−1	−1	0	1	0
−M	x_7	2	1/2	0	1	0	−1	0	1
3	x_2	2	1/4	1	0	0	0	0	0
	Δ	−7M+6	− 9M/4 −3/2	0	M + 5	M	M	0	0

x_7, x_8, не имеющие никакого отношения к содержательной постановке задачи, но позволяющие получить начальный допустимый базис.

Для исключения из базиса этих переменных последние вводятся в целевую функцию (1.5.4) с большими отрицательными коэффициентами M (в задаче минимизации — с положительными M). Таким образом из исходной получается новая M-задача.

В общем случае, если задача ЛП имеет вид (1.4.1) — (1.4.3), после приведения модели к каноническому виду искусственные переменные вводятся лишь в те ограничения, где в исходной системе (1.5.2) были знаки $\geqslant$, $=$, при всех положительных компонентах вектора **B**.

Итак, введя искусственные переменные, представим задачу (1.5.4) — (1.5.6) в виде M-задачи:

$$F = 2x_1 + 3x_2 - 5x_3 - Mx_6 - Mx_7 - Mx_8 \rightarrow \max \qquad (1.5.7)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + x_6 + 0 \cdot x_7 + 0 \cdot x_8 &= 7; \\ x_1 + 2x_2 + x_3 + 0 \cdot x_4 - x_5 + 0 \cdot x_6 + x_7 + 0 \cdot x_8 &= 6; \qquad (1.5.8) \\ x_1 + 4x_2 + 0 \cdot x_3 + 0 \cdot x_4 + 0 \cdot x_5 + 0 \cdot x_6 + 0 \cdot x_7 + x_8 &= 8; \end{aligned}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 8}. \qquad (1.5.9)$$

Выбрав в качестве начального базиса векторы $\mathbf{A}_6$, $\mathbf{A}_7$, $\mathbf{A}_8$, решаем полученную M-задачу с помощью табличного симплекс-метода.

Если в оптимальном решении M-задачи нет искусственных переменных, это решение есть оптимальное решение исходной задачи. Если же в оптимальном решении M-задачи хоть одна из искусственных переменных будет отлична от нуля, то система ограничений исходной задачи несовместна и исходная задача не разрешима.

Таблица 1.17

c_i		0	2	3	−5	0	0	−M
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
2	x_1	20/7	1	0	−4/7	−4/7	0	0
−M	x_7	4/7	0	0	$\boxed{9/7}$	2/7	−1	1
3	x_2	9/7	0	1	1/7	1/7	0	0
	Δ	−4M/7 + 67/7	0	0	−9M/7+30/7	2M/7−5/7	M	0

Таблица 1.18

c_i		0	2	3	−5	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
2	x_1	$3^1/_9$	1	0	0	0	−4/9
−5	x_3	4/9	0	0	1	2/9	−7/9
3	x_2	$1^2/_9$	0	1	0	−1/9	1/9
	Δ	$7^2/_3$	0	0	0	23/9	30/9

Решение задачи (1.5.7) — (1.5.9) представлено в табл. 1.15—1.18. Столбцы, соответствующие искусственным переменным, по мере вывода из базиса из расчета исключаются. Найдено оптимальное решение $X_{\text{опт}} = (3^1/_9,\ 1^2/_9,\ ^4/_9,\ 0)$ и $F_{\max} = 7^2/_3$.

Задачи и упражнения

Решить графически и методом симплекс-таблиц следующие задачи ЛП:

1.1. $F = 7x_1 + 6x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\geqslant 10, \\ 5x_1 + 2x_2 &\geqslant 10, \\ x_2 &\leqslant 6, \\ x_2 &\leqslant 5; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.2. $F = 3x_1 - 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 11, \\ -3x_1 + 2x_2 &\leqslant 10, \\ 3x_1 + 4x_2 &\geqslant 20; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.3. $F = 5x_1 - 3x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 6, \\ 2x_1 - 3x_2 &\geqslant -6, \\ x_1 - x_2 &\leqslant 4, \\ 4x_1 + 7x_2 &\leqslant 28; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.4. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} -3x_1 + 2x_2 &\leqslant 9, \\ 3x_1 + 4x_2 &\geqslant 27, \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 14; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.5. $F = 7x_1 - 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &\leqslant 3, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 1, \\ -3x_1 + x_2 &\leqslant 3, \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 4; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.6. $F = 2x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\geqslant 4, \\ 5x_1 + 2x_2 &\geqslant 10, \\ 4x_1 - 3x_2 &\leqslant 12, \\ 7x_1 + 4x_2 &\leqslant 28; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.7. $F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 3x_1 - 2x_2 &\geqslant -6, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 3, \\ x_1 &\leqslant 3, \\ x_2 &\leqslant 5; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.8. $F = 2x_1 - 4x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 8x_1 - 5x_2 &\leqslant 16, \\ x_1 + 3x_2 &\leqslant 2, \\ 2x_1 + 7x_2 &\geqslant 9; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.9. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &\leqslant 4, \\ x_1 - 2x_2 &\geqslant -4, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 4; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.10. $F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &\leqslant 4, \\ 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 6, \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 7, \\ x_1 + 2x_2 &\geqslant 2; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.11. $F = 2x_1 - x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 - x_2 &\geqslant -3, \\ 6x_1 + 7x_2 &\leqslant 42, \\ 2x_1 - 3x_2 &\leqslant 6, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 4; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.12. $F = 5x_1 + x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} x_1 + 7x_2 &\geqslant 7, \\ -2x_1 + x_2 &\leqslant 6, \\ 2x_1 + 5x_2 &\geqslant 10, \\ 5x_1 + 2x_2 &\geqslant 10, \\ 7x_1 + x_2 &\geqslant 7, \\ x_1 &\leqslant 6, \\ x_2 &\leqslant 7; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.13. $$\begin{aligned} F = x_1 - x_2 &\to \max; \\ -x_1 + x_2 &\geqslant 8, \\ 8x_1 + 5x_2 &\leqslant 80, \\ x_1 - 2x_2 &\leqslant 2, \\ x_1 + 4x_2 &\geqslant 4; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.14. $$\begin{aligned} F = 7x_1 + x_2 &\to \max; \\ x_1 + x_2 &\leqslant 14, \\ 3x_1 - 5x_2 &\leqslant 15, \\ 5x_1 + 3x_2 &\geqslant 21; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.15. $$\begin{aligned} F = 7x_1 - x_2 &\to \min; \\ x_1 + x_2 &\geqslant 3, \\ 5x_1 + x_2 &\geqslant 5, \\ x_1 + 5x_2 &\geqslant 5; \\ 0 \leqslant x_1 &\leqslant 4, \\ 0 \leqslant x_2 &\leqslant 4. \end{aligned}$$

1.16. $$\begin{aligned} F = x_1 + x_2 &\to \min; \\ 3x_1 + x_2 &\geqslant 8, \\ x_1 + 2x_2 &\geqslant 6, \\ x_1 - x_2 &\leqslant 3; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.17. $$\begin{aligned} F = x_1 + 3x_2 &\to \max; \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 3, \\ 4x_1 + 3x_2 &\leqslant 20; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.18. $$\begin{aligned} F = 2x_1 + x_2 &\to \max; \\ x_1 - x_2 &\geqslant 4, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 10, \\ 4x_1 - x_2 &\leqslant 12, \\ 7x_1 + x_2 &\leqslant 7; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.19. $$\begin{aligned} F = 2x_1 + 2x_2 &\to \max; \\ 3x_1 - 2x_2 &\geqslant -6, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 3, \\ x_1 &\leqslant 3, \\ x_2 &\leqslant 5; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.20. $$\begin{aligned} F = 2x_1 - 4x_2 &\to \max; \\ 8x_1 - 5x_2 &\leqslant 16, \\ x_1 + 3x_2 &\geqslant 2, \\ 2x_1 + 7x_2 &\leqslant 9; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.21. $$\begin{aligned} F = -3x_1 + 6x_2 &\to \min; \\ 5x_1 - 2x_2 &\leqslant 4, \\ x_1 - 2x_2 &\geqslant -4, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 4; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.22. $$\begin{aligned} F = 3x_1 + 3x_2 &\to \max; \\ x_1 + x_2 &\leqslant 8, \\ 3x_1 + 7x_2 &\geqslant 21, \\ x_1 + 2x_2 &\geqslant 6; \\ 0 \leqslant x_1 &\leqslant 1, \\ 0 \leqslant x_2 &\leqslant 1. \end{aligned}$$

1.23. $$\begin{aligned} F = x_1 + x_2 &\to \max; \\ x_1 + x_2 &\geqslant 1, \\ -5x_1 + x_2 &\leqslant 0, \\ -x_1 + 5x_2 &\geqslant 0, \\ x_1 + x_2 &\leqslant 6; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.24. $$\begin{aligned} F = x_1 + x_2 &\to \max; \\ 5x_1 - 2x_2 &\leqslant 7, \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 5, \\ x_1 + x_2 &\leqslant 6; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.25. $$\begin{aligned} F = -2x_1 + x_2 &\to \min; \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 8, \\ x_1 + 3x_2 &\geqslant 6, \\ 3x_1 + x_2 &\geqslant 3; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.26. $$\begin{aligned} F = -2x_1 + x_2 &\to \min; \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 8; \\ x_1 + x_2 &\leqslant 6; \\ -3x_1 + 2x_2 &\geqslant 3; \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.27. $F = -3x_1 + x_2 \to \min;$
$x_1 + 2x_2 \geqslant 10;$
$3x_1 + x_2 \geqslant 15;$
$x_1 \leqslant 8;$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$

1.28. $F = 2x_1 + 2x_2 \to \max;$
$3x_1 - 2x_2 \geqslant -6;$
$x_1 + x_2 \geqslant 3;$
$0 \leqslant x_1 \leqslant 9;$
$0 \leqslant x_2 \leqslant 6.$

1.29. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$x_1 + x_2 \leqslant 4;$
$3x_1 + x_2 \geqslant 4;$
$x_1 + 5x_2 \geqslant 4,$
$0 \leqslant x_1 \leqslant 3,$
$0 \leqslant x_2 \leqslant 3.$

1.30. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$5x_1 - 2x_2 \leqslant 4;$
$x_1 - 2x_2 \geqslant -4;$
$x_1 + x_2 \geqslant 4;$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$

1.31. $F = 2x_1 - x_2 \to \max;$
$x_1 - x_2 \geqslant -3,$
$6x_1 + 7x_2 \leqslant 42;$
$8x_1 - 2x_2 \leqslant 6;$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$

1.32. $F = 2x_1 - 4x_2 \to \min;$
$8x_1 - 5x_2 \leqslant 16;$
$x_1 + 3x_2 \geqslant 2;$
$2x_1 + 7x_2 \leqslant 9;$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$

1.6. ДВОЙСТВЕННОСТЬ В ЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Каждой задаче линейного программирования со смешанными ограничениями вида

$$F = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max \tag{1.6.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leqslant b_i, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots\ m_1, \quad m_1 \leqslant m; \tag{1.6.2}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i, \quad i = m_1 + 1,\ m_1 + 2,\ \ldots,\ m; \tag{1.6.3}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_1, \quad n_1 < n$$

можно поставить в соответствие другую задачу, которая называется двойственной по отношению к первой

$$\tilde{F} = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min \tag{1.6.4}$$

при ограничениях

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j, \quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n_1, \quad n_1 \leqslant n; \tag{1.6.5}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i = c_j, \quad j = n_1 + 1,\ n_1 + 2,\ \ldots,\ n; \tag{1.6.6}$$

$$y_i \geqslant 0, \quad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ m_1, \ m_1 \leqslant m.$$

Совместное рассмотрение таких пар задач позволяет исследовать влияние изменения управляемых и неуправляемых переменных системы на значение целевой функции, проводить экономический анализ результатов расчетов.

Сопоставляя формы записи прямой и двойственной задач, можно установить следующие взаимосвязи:

1) если прямая задача является задачей максимизации, то двойственная будет задачей минимизации, и наоборот;

2) коэффициенты целевой функции прямой задачи становятся свободными членами ограничений двойственной задачи;

3) свободные члены ограничений прямой задачи $b_1, b_2, \ldots, b_m$ становятся коэффициентами целевой функции двойственной задачи;

4) матрица ограничений двойственной задачи получается транспонированием матрицы ограничений прямой задачи;

5) число переменных двойственной задачи равно числу ограничений прямой, а число ограничений двойственной равно числу переменных прямой задачи, и наоборот;

6) взаимно однозначное соответствие между переменными исходной задачи и ограничениями двойственной удовлетворяет следующему положению: j-е ограничение двойственной задачи будет неравенством, если на j-ю переменную исходной задачи наложено требование неотрицательности, если же j-я переменная не ограничена в знаке, j-е ограничение будет равенством.

Пример 1.3

$$F(X) = x_1 - 10x_2 + 2x_3 - x_4 + 7x_5 \to \max$$

при ограничениях

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 \qquad\qquad\qquad &\leqslant 1;\\
x_1 - x_2 + 2x_3 - x_4 + x_5 &\geqslant 4;\\
x_2 + x_3 - x_4 \qquad &= 0;\\
x_1 \quad - x_2 \quad + 2x_5 &\geqslant 3;\\
x_1 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.&
\end{aligned}$$

Чтобы записать задачу, двойственную к данной, приведем систему ограничений к виду

$$\begin{aligned}
2x_1 - x_2 \qquad\qquad\qquad &\leqslant 1;\\
-x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 - x_5 &\leqslant -4;\\
x_2 + x_3 - x_4 \qquad &= 0;\\
-x_1 \quad + x_3 \quad - 2x_5 &\leqslant -3;\\
x_1 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.&
\end{aligned}$$

Задача, двойственная к данной, будет иметь вид:

$$\begin{aligned}
&\tilde{F}(Y) = y_1 - 4y_2 - 3y_4 \to \min;\\
&2y_1 - y_2 - y_4 \geqslant 1;\\
&-y_1 + y_2 + y_3 = -10;\\
&-2y_2 + y_3 + y_4 \geqslant 2;\\
&y_2 - y_3 = -1;\\
&-y_2 - 2y_4 = 7;\\
&y_1 \geqslant 0, \; y_2 \geqslant 0, \; y_4 \geqslant 0.
\end{aligned}$$

Пара задач может быть несимметричной и симметричной. В симметричных задачах система ограничений задается в виде неравенств и на переменные наложено условие неотрицательности.

В несимметричных задачах система ограничений прямой задачи задается равенствами, а в двойственной — неравенствами, причем в последней переменные могут быть и отрицательные.

Так как систему неравенств при помощи дополнительных переменных можно свести к системе равенств, то всякую пару симметричных задач можно представить в виде пары несимметричных.

Приведем в матричном виде математические модели симметричных и несимметричных пар задач.

Симметричные задачи

I. Прямая	Двойственная
$F(\mathbf{X}) = \mathbf{C}^T\mathbf{X} \to \max;$	$\tilde{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{B}^T\mathbf{Y} \to \min;$
$\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{B};$	$\mathbf{A}^T\mathbf{Y} \geqslant \mathbf{C};$
$\mathbf{X} \geqslant 0.$	$\mathbf{Y} \geqslant 0.$

II. Прямая	Двойственная
$F(\mathbf{X}) = \mathbf{C}^T\mathbf{X} \to \min;$	$\tilde{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{B}^T\mathbf{Y} \to \max;$
$\mathbf{AX} \geqslant \mathbf{B};$	$\mathbf{A}^T\mathbf{Y} \leqslant \mathbf{C};$
$\mathbf{X} \geqslant 0.$	$\mathbf{Y} \geqslant 0.$

Несимметричные задачи

III. Прямая	Двойственная
$F(\mathbf{X}) = \mathbf{C}^T\mathbf{X} \to \mathrm{man};$	$\tilde{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{B}^T\mathbf{Y} \to \min;$
$\mathbf{AX} = \mathbf{B};$	$\mathbf{A}^T\mathbf{Y} \geqslant \mathbf{C}.$
$\mathbf{X} \geqslant 0.$	

IV. Прямая	Двойственная
$F(\mathbf{X}) = \mathbf{C}^T\mathbf{X} \to \min;$	$\hat{F}(\mathbf{Y}) = \mathbf{B}^T\mathbf{Y} \to \max;$
$\mathbf{AX} = \mathbf{B};$	$\mathbf{A}^T\mathbf{Y} \leqslant \mathbf{C}.$
$\mathbf{X} \geqslant 0$	

Связь между математическими моделями прямой и двойственной задач позволяет на основании теорем двойственности установить зависимость между оптимальным решением прямой задачи и оптимальными значениями переменных двойственной задачи, и наоборот.

Пример 1.4. Найти

$$F_{\min} = 3x_1 + 2x_2$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leqslant 3; \\ 2x_1 - x_2 &\leqslant 10; \\ 3x_1 - x_2 &\geqslant -5; \\ -x_1 + x_2 &\geqslant 3; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Так как система ограничений задана в виде неравенств, можно рассматривать в данном случае симметричную пару задач. Приведем математическую модель прямой задачи к виду I

$$F' = -3x_1 - 2x_2 \to \max;$$

$$\begin{aligned} x_1 - 2x_2 &\leqslant 3; \\ 2x_1 - x_2 &\leqslant 10; \\ -3x_1 + x_2 &\leqslant 5; \\ x_1 - x_2 &\leqslant -3; \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

Двойственная задача будет иметь вид

$$\begin{aligned} \tilde{F}_{\min} &= 3y_1 + 10y_2 + 5y_3 - 3y_4; \\ y_1 + 2y_2 - 3y_3 + y_4 &\geqslant -3; \\ -2y_1 + y_2 + y_3 - y_4 &\geqslant -2; \\ y_i \geqslant 0,\ i &= \overline{1,\ 4}. \end{aligned}$$

Таблица 1.19

c_i		0	−3	−2	0	0	c	0	−M
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
0	x_3	3	1	−2	1	0	0	0	0
0	x_4	10	2	1	0	1	0	0	0
0	x_5	5	−3	1	0	0	1	0	0
−M	x_7	3	−1	1	0	0	0	−1	1
	Δ	−3M	M+3	−M+2	0	0	0	M	0

Таблица 1.20

c_i		0	−3	−2	0	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	x_3	9	−1	0	1	0	0	−2
0	x_4	7	3	0	0	1	0	1
0	x_5	2	−2	0	0	0	1	1
−2	x_2	3	−1	1	0	0	0	−1
	Δ	−6	5	0	0	0	0	2

В табл. 1.19, 1.20 представлено решение прямой задачи, в табл. 1.21, 1.22 — решение двойственной задачи.

Прямая задача состояла в отыскании минимального значения функции $F = 3x_1 + 2x_2$. В индексной строке табл. 1.20 представлено значение $F'_{\max} = -6$, следовательно, $F_{\min} = 6$. Оптимальные значения переменных прямой задачи $x_1^{\text{опт}} = 0$, $x_2^{\text{опт}} = 3$.

Из табл. 1.22 двойственной задачи $\tilde{F}_{\min} = -6$ при $y_1 = y_2 = y_3 = 0$, $y_4 = 2$.

Решив одну из пары симметричных задач, можно по значениям в индексной строке оптимальной таблицы получать значения переменных оптимального плана другой задачи. Обозначим значение Δ_j оценок, соответствующих каждому из векторов, через a_{0j}. Тогда

Таблица 1.21

C_i		0	3	10	5	−3	0	0
	B_y	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
0	y_5	3	−1	−2	3	−1	1	0
0	y_6	2	2	−1	−1	1	0	1
	Δ	0	−3	−10	−5	3	0	0

Таблица 1.22

C_i		0	3	10	5	−3	0	0
	B_y	P_0	P_1	P_2	P_3	P_4	P_5	P_6
0	y_5	5	1	−3	2	0	1	1
−3	y_4	2	2	−1	−1	1	0	1
	Δ	−6	−9	−7	−2	0	0	−3

из табл. 1.20 находим значение переменных двойственной задачи, пользуясь следующим соотношением:

$$y_i^{\text{опт}} = a_{0(n+i)}^{\text{пр}}, \tag{1.6.7}$$

где $n = 2$ — число переменных прямой задачи,

$$y_1^{\text{опт}} = a_{0(2+1)}^{\text{пр}} = a_{03} = 0; \quad y_2^{\text{опт}} = a_{0(2+2)}^{\text{пр}} = a_{04} = 0;$$

$$y_3^{\text{опт}} = a_{0(2+3)}^{\text{пр}} = a_{05} = 0; \quad y_4^{\text{опт}} = a_{0(2+4)}^{\text{пр}} = a_{06} = 0;$$

$$y_5^{\text{опт}} = a_{0(2+5)}^{\text{пр}} = a_{07} = 5 \text{ — (по циклу переноса).}$$

Аналогично из индексной строки, соответствующей оптимальному плану двойственной задачи, отыскиваем переменные оптимального плана прямой задачи:

$$x_j^{\text{опт}} = -a_{0(m+j)}^{\text{дв}};$$
$$x_1^{\text{опт}} = -a_{05}^{\text{дв}} = 0; \tag{1.6.8}$$
$$x_2^{\text{опт}} = -a_{06}^{\text{дв}} = 3,$$

где $m = 4$ — число переменных двойственной задачи.

Если в оптимальном решении прямой задачи i-е ограничение выполняется как строгое неравенство, i-я переменная двойственной задачи, на основании второй теоремы двойственности, будет равна нулю.

Если i-я переменная двойственной задачи отлична от нуля, то ее значением определяется приращение значения целевой функции при изменении b_i:

$$\Delta F_{\max} = y_i \Delta b_i. \qquad (1.6.9)$$

При рассмотрении несимметричной пары задач на основании теорем двойственности также устанавливается соотношение, позво-

Таблица 1.23

c_i		0	3	4	1	6	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	x_3	3	3	−1	1	3	0
0	x_5	5	1	$\boxed{3}$	0	−1	1
	Δ	3	−1	−5	0	−3	0

ляющее по оптимальной таблице прямой задачи найти значение оптимальных переменных двойственной задачи. Оно имеет вид:

$$\mathbf{Y}^{\text{опт}} = \mathbf{C}^{\text{опт}} \mathbf{A}_x^{-1}, \qquad (1.6.10)$$

где $\mathbf{A}_x^{-1}$ — матрица, обратная матрице, составленной из компонентов векторов, входящих в последний базис, при котором получен оптимальный план. Если прямая задача приведена к единичному базису при неотрицательных свободных членах уравнений, вычисление обратной матрицы не требуется, так как $\mathbf{A}_x^{-1}$ будет состоять из столбцов оптимальной симплекс-таблицы, полученных на месте единичных столбцов исходной таблицы; $\mathbf{C}^{\text{опт}}$ — вектор-строка коэффициентов целевой функции при базисных переменных, элементы которой располагаются в той же последовательности, что и базисные переменные в столбце $\mathbf{B}_x$ симплекс-таблицы.

Пользуясь формулой (1.6.10), можно найти значения двойственных переменных на любой итерации решения прямой задачи.

Пример 1.5.

Прямая задача

$$F(\mathbf{X}) = 3x_1 + 4x_2 + x_3 + 6x_4 \to \max; \qquad (1.6.11)$$

$$3x_1 - x_2 + x_3 + 3x_4 = 3;$$

$$x_1 + 3x_2 - \qquad x_4 \leqslant 5; \qquad (1.6.12)$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, 4. \qquad (1.6.13)$$

Двойственная задача

$$\tilde{F}(\mathbf{Y}) = 3y_1 + 5y_2 \to \min \qquad (1.6.14)$$

$$
\begin{aligned}
3y_1 + \ \ y_2 &\geqslant 3; \\
-\ y_1 + 3y_2 &\geqslant 4; \\
y_1 \qquad &\geqslant 1; \\
3y_1 - \ \ y_2 &\geqslant 6;
\end{aligned} \tag{1.6.15}
$$

$$
y_2 \geqslant 0. \tag{1.6.16}
$$

Решение прямой задачи дано в табл. 1.23—1.25. Из табл. 1.25 оптимальный план: $X^{опт} = (0,\ ^9/_4,\ 0,\ ^7/_4)$; $F = {}^{78}/_4$. Данные этой

Таблица 1.24

c_i		0	3	4	1	6	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
1	x_3	14/3	10/3	0	1	$\boxed{8/3}$	1/3
4	x_2	5/3	1/3	1	0	−1/3	1/3
	Δ	34/3	5/3	0	0	−14/3	5/3

Таблица 1.25

c_i		0	3	4	1	6	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
6	x_4	7/4	5/4	0	3/8	1	1/8
4	x_2	9/4	3/4	1	1/8	0	3/8
	Δ	78/4	15/2	0	7/4	0	9/4

же таблицы используются для определения по соотношению (1.6.10) — оптимального решения двойственной задачи.

Вектор $C^{опт} = (c_4,\ c_2) = (6,\ 4)$; матрица A_x состоит из векторов A_4A_2, взятых из (1.6.12):

$$
A_x = (A_4,\ A_2) = \begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix},
$$

а обратная матрица A_x^{-1} — из компонентов векторов A_3 и A_5 (табл. 1.25):

$$
A_x^{-1} = \begin{Vmatrix} ^3/_8 & ^1/_8 \\ ^1/_8 & ^3/_8 \end{Vmatrix}.
$$

Тогда

$$
Y^{опт} = (6,\ 4) \cdot \begin{Vmatrix} ^3/_8 & ^1/_8 \\ ^1/_8 & ^3/_8 \end{Vmatrix} = (^{11}/_4,\ ^9/_4);
$$

$$
\tilde{F}_{\min} = 3 \cdot \frac{11}{4} + 5 \cdot \frac{9}{4} = \frac{78}{4}.
$$

Существует и другая, вытекающая из выражения (1.6.10), закономерность, позволяющая определить оптимальные значения двойственных переменных по табл. 1.25.

Оптимальное значение i-й двойственной переменной равно сумме оптимальной оценки вектора, входящего в первоначальный базис, и взятого из целевой функции (1.6.11) коэффициента при переменной с тем же индексом, что и у вектора:

$$y_1^{\text{опт}} = \Delta_3^{\text{опт}} + c_3 = \frac{7}{4} + 1 = \frac{11}{4};$$

$$y_2^{\text{опт}} = \Delta_5^{\text{опт}} + c_5 = \frac{9}{4} + 0 = \frac{9}{4}.$$

Соотношение решений прямой и двойственной задач позволяет установить еще одну закономерность.

Для оптимального решения и решения на любой итерации значения оценок Δ_j, $j = \overline{1, n}$, прямой задачи будут равны разности между значением левой и правой частей соответствующего j-го ограничения двойственной задачи.

$$\Delta_j = \sum_{i=1}^{m} a_{ji} y_i - c_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.6.17}$$

Продемонстрируем это на примере 1.5 для оптимального плана, представленного в табл. 1.25:

$$\Delta_1 = \frac{15}{2}, \quad 3y_1 + y_2 \geqslant 3, \quad 3 \cdot \frac{11}{4} + \frac{9}{4} - 3 = \frac{15}{2};$$

$$\Delta_2 = 0, \quad -y_1 + 3y_2 \geqslant 4, \quad -\frac{11}{4} + 3 \cdot \frac{9}{4} - 4 = 0;$$

$$\Delta_3 = \frac{7}{4}, \quad y_1 \geqslant 1, \quad \frac{11}{4} - 1 = \frac{7}{4}$$

и т. д.

Задачи и упражнения

Записать задачу двойственную к данной, решить одну из пары задач и отыскать оптимальное решение второй

1.33. $F = x_1 + x_2 \to \max;$
$-3x_1 + 2x_2 \leqslant 1,$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 14,$
$2x_1 + x_2 \leqslant 13,$
$3x_1 - x_2 \leqslant 12,$
$x_j \geqslant 0, \ j = \overline{1, 2}.$

1.34. $F = 3x_1 + x_2 \to \min;$
$3x_1 + 5x_2 \geqslant 15,$
$5x_1 + 3x_2 \geqslant 15,$
$x_1 \geqslant 1,$
$x_2 \geqslant 1,$
$x_j \geqslant 0, \ j = \overline{1, 2}.$

1.35. $F = 3x_1 + 3x_2 \to \min;$
$x_1 + 4x_2 \geqslant 4,$
$4x_1 + x_2 \geqslant 4,$
$x_j \geqslant 0, \ j = \overline{1, 2}.$

1.36. $F = 6x_1 - 5x_2 \to \max;$
$2x_1 + 5x_2 \leqslant 10,$
$5x_1 + 2x_2 \leqslant 10,$
$x_j \geqslant 0, \ j = \overline{1, 2}.$

1.37. $F = 8x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &\leqslant 4, \\ -4x_1 + x_2 &\leqslant 4, \\ x_1 + x_2 &\leqslant 6, \\ x_j \geqslant 0,\ j &= \overline{1,\ 2}. \end{aligned}$$

1.38. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_3 &\leqslant 3, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 1, \\ -3x_1 + x_2 &\leqslant 3, \\ 3x_1 + 3x_2 &\leqslant 9, \\ x_j \geqslant 0,\ j &= \overline{1,\ 2}. \end{aligned}$$

1.39. $F = 14x_1 + 10x_2 + 14x_3 + 14x_4 \to \max;$
$$\begin{aligned} 4x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 &\leqslant 35, \\ x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 &\leqslant 30, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 &\leqslant 40, \\ x_j \geqslant 0,\ j &= \overline{1,\ 4}. \end{aligned}$$

1.40. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &\geqslant 10, \\ 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 12, \\ 2x_1 + 4x_2 &\geqslant 10, \\ x_1 &\geqslant 1, \\ x_j \geqslant 0,\ j &= \overline{1,\ 2}. \end{aligned}$$

1.41. $F = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\geqslant 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\geqslant 11, \\ x_j \geqslant 0,\ j &= \overline{1,\ 3}. \end{aligned}$$

1.42. $F = -7x_1 + 2x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqslant 1, \\ 5x_1 + x_2 &\geqslant 3, \\ -3x_1 + x_2 &\leqslant 3, \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 4, \\ x_j \geqslant 0,\ j &= \overline{1,\ 2}. \end{aligned}$$

1.43. $F = 6x_1 + 4x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geqslant 3, \\ x_1 - 2x_2 &\leqslant 2, \\ x_1,\ x_2 &> 0. \end{aligned}$$

1.44. $F = -x_1 - 2x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &\leqslant 4, \\ -x_1 + 2x_2 &\leqslant 4, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 4, \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.45. $F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 4, \\ 3x_1 + x_2 &\geqslant 4, \\ x_1 + 5x_2 &\geqslant 4, \\ 0 \leqslant x_1 &\leqslant 3, \\ 0 \leqslant x_2 &\leqslant 3. \end{aligned}$$

1.46. $F = -2x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} -x_1 + 2x_2 &\leqslant 14, \\ 5x_1 + 2x_2 &\geqslant 10, \\ 4x_1 - 3x_2 &\leqslant 12, \\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.47. $F = 7x_1 - 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 5 \\ 2x_1 - 3x_2 &\leqslant 6 \\ 3x_1 + x_2 &\geqslant 3 \\ x_1 + x_2 &\geqslant 2 \\ x_1 - x_2 &\geqslant -3, \\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.48. $F = 3x_1 + x_2 + 2x_3 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + 2x_2 + x_3 &\geqslant 2, \\ 3x_1 - 3x_2 - 2x_3 &\leqslant 6, \\ 3x_1 - 3x_2 + 2x_3 &\leqslant 10, \\ x_1 - x_2 &\leqslant 2, \\ x_j \geqslant 0,\ j &= \overline{1,\ 3}. \end{aligned}$$

1.49. $F = 6x_1 - x_2 \to \min;$
$x_1 + x_2 \geqslant 3,$
$4x_1 - x_2 \geqslant -4,$
$3x_1 - 2x_2 \leqslant 24,$
$x_2 \leqslant 6,$
$x_1, x_2 \geqslant 0.$

1.50. $F = -3x_1 - 2x_2 \to \max;$
$x_1 - 2x_2 \leqslant -3,$
$2x_1 + x_2 \leqslant 10,$
$3x_1 - x_2 \geqslant -5,$
$-x_1 + x_2 \geqslant 3,$
$x_1, x_2 \geqslant 0.$

1.51. $F = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max;$
$x_1 + 3x_2 - 2x_3 \leqslant 4,$
$-5x_1 + x_3 \geqslant -12,$
$-2x_1 + x_2 - 3x_3 \geqslant -4,$
$x_j \geqslant 0; \quad j = \overline{1, 3}.$

1.52. $F = x_1 - 2x_2 \to \max;$
$5x_1 + x_2 \geqslant 1,$
$-3x_1 + x_2 \leqslant 3,$
$3x_1 + 3x_2 \leqslant 2,$
$x_1, x_2 \geqslant 0.$

Определить является ли предполагаемая пара векторов оптимальным решением прямой и двойственной к ней задач.

1.53. $X = \{0, 5\};$
$Y = \left\{\frac{2}{3}, 0, 0\right\};$
$F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$2x_1 + 3x_2 \leqslant 15,$
$x_1 + 2x_2 \geqslant 6,$
$x_1 + x_2 \leqslant 8,$
$x_1, x_2 \geqslant 0.$

1.54. $X = \{6, 0, 0\};$
$Y = \left\{\frac{3}{2}, 0\right\},$
$F = 3x_1 - 2x_2 + x_3 \to \max;$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 \leqslant 12,$
$x_1 + 2x_2 - x_3 \leqslant 16,$
$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 3}.$

1.55. $X = \left\{\frac{5}{7}; \frac{2}{7}\right\};$
$Y = \left\{\frac{1}{7}, \frac{12}{7}, 0, 0\right\};$
$F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$2x_1 + 3x_2 \leqslant 15,$
$x_1 + 2x_2 \geqslant 6,$
$x_2 + x_3 \leqslant 8,$
$x_1, x_2 \geqslant 0.$

1.56. $X = \{6, 0\};$
$Y = \{0, 0, 0, 5, 0\};$
$F = 5x_1 - 2x_2 \to \max;$
$5x_1 + 2x_2 \geqslant 10,$
$2x_1 + 5x \geqslant 10,$
$-2x_1 + x_2 \leqslant 4,$
$x_1 \leqslant 6,$
$x_2 \leqslant 6,$
$x_1, x_2 \geqslant 0.$

1.57. $X = \{8, 0\};$
$Y = \{0, 0, 0, 5, 0\};$
$F = 5x_1 - 2x_2 \to \max;$
$5x_1 + 3x_2 \geqslant 10,$
$2x_1 + 6x_2 \geqslant 12,$
$-2x_1 + x_2 \leqslant 4,$
$0 \leqslant x_1 \leqslant 8,$
$0 \leqslant x_2 \leqslant 6.$

1.58. $X = \{1, 3\};$
$Y = \{0, 0, 3, 0\}$
$F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$
$x_1 + x_2 \leqslant 4,$
$3x_1 + x_2 \geqslant 4,$
$0 \leqslant x_1 \leqslant 3.$
$0 \leqslant x_2 \leqslant 3.$

1.60. $X = \left\{\frac{21}{5}, \frac{4}{5}\right\}; \quad Y = \left\{\frac{17}{5}, \frac{9}{5}, 0, 0\right\};$
$Z = 5y_1 + 6y_2 - 2y_3 + 3y_4 \to \min;$
$y_1 - 2y_2 - 3y_3 - y_4 \geqslant 7;$
$y_1 - 3y_2 - y_3 + y_4 \geqslant -2;$
$y_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, 4}.$

1.61. $X = \{3,\ 1\};\quad Y = \{3,\ 0,\ 0,\ 0,\ 0\};$

$$Z = 4y_1 - 4y_2 - 4y_3 + 3y_4 + 3y_5 \to \min;$$
$$y_1 - 3y_2 - y_3 + y_4 \geqslant 3;$$
$$y_1 - y_2 - 5y_3 + y_5 \geqslant 3;$$
$$y_i \geqslant 0,\quad i = \overline{1,\ 5}.$$

1.62. $X = \left\{\frac{21}{4},\ \frac{3}{2}\right\};\quad Y = \left\{0,\ \frac{1}{4};\ \frac{1}{4},\ 0,\ 0\right\};$

$$Z = 3y_1 + 42y_2 + 6y_3 - 4y_4 \to \min;$$
$$-y_1 + 6y_2 + 2y_3 - 4y_4 \geqslant 2;$$
$$y_1 + 7y_2 - 3y_3 - y_4 \geqslant 1;$$
$$y_i \geqslant 0;\quad i = \overline{1,\ 4}.$$

1.7. ДВОЙСТВЕННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

Идея метода основана на связи между решениями прямой и двойственной (сопряженной) задач. В двойственном симплекс-методе осуществляется движение по сопряженным базисам и соответствующим решениям прямой задачи (которые называются псевдопланами) до тех пор, пока не выполнится некоторый признак оптимальности.

Рассмотрим задачу ЛП, представленную в канонической форме

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \to \max; \tag{1.7.1}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i,\quad i = \overline{1,\ m}, \tag{1.7.2}$$

$$x \geqslant 0,\quad j = \overline{1,\ n}, \tag{1.7.3}$$

и задачу, двойственную к ней

$$\tilde{F}(Y) = \sum_{i=1}^{m} b_i y_i \to \min; \tag{1.7.4}$$

$$\sum_{i=1}^{m} a_{ij} y_i \geqslant c_j,\quad j = \overline{1,\ n}. \tag{1.7.5}$$

Очевидно, (1.7.1) — (1.7.3) и (1.7.4) — (1.7.5) — несимметричная пара задач (модель III). Пусть $Y = (y_1, y_2, \ldots, y_m)$ — опорный план задачи (1.7.4), (1.7.5).

Введем некоторые определения.

Б а з и с о м опорного плана задачи (1.7.4), (1.7.5) *либо сопряженным базисом, называется произвольная система m линейно независимых векторов условий* $\{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m\}$ *задачи* (1.7.1) — (1.7.3), *для которых не более m ограничений* (1.7.5) *выполняются как строгие равенства и найденное решение удовлетворяет всем неравенствам* (1.7.5).

Свяжем с каждым сопряженным базисом $Б_y = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m\}$ m-мерный вектор $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, компоненты которого удовлетворяют условиям (1.7.2) исходной задачи.

Вектор $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$, компоненты которого равны коэффициентам разложения вектора $B = (b_1, b_2, \ldots, b_m)$ по системе $Б_y = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m\}$, называется *псевдопланом* задачи (1.7.1) — (1.7.3).

Признак оптимальности. *Если среди базисных компонентов псевдоплана* $\mathbf{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ *нет отрицательных,* т. е. *все* $x_{i0} \geqslant 0$, $i = \overline{1,\ m}$, *то псевдоплан* $\mathbf{X}$ — *решение задачи* (1.7.1) — (1.7.3).

Свяжем с каждым сопряженным базисом $Б_y = \{\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_m\}$ матрицу $\| x_{ij} \|$ $i = \overline{1,\ m}$, $j = \overline{1,\ n}$, элементы которой совпадают с коэффициентами разложения векторов условий $\mathbf{A}_j$ задачи (1.7.1) — (1.7.3) по системе $Б_y$.

Пусть среди базисных компонентов псевдоплана $X = (x_1, x_2, \ldots, x_m)$ имеются отрицательные. Если среди компонентов $x_{i0} < 0$ найдется хотя бы один, для которого все $x_{ij} > 0$, то целевая функция задачи (1.7.4), (1.7.5) не ограничена снизу на множестве ее планов, а прямая задача (1.7.1) — (1.7.3) не разрешима.

Если среди базисных компонентов X найдется хотя бы один, для которого существует $x_{ij} < 0$, то псевдоплан можно улучшить.

Для того, чтобы получить базис нового псевдоплана X^1, нужно вывести из базиса псевдоплана X вектор A_r $(x_{r0} < 0)$.

Если $x_{i0} < 0$ при нескольких значениях r, из базиса нужно вывести вектор с $\min x_{r0}$. Для определения вектора, который нужно ввести в базис, необходимо найти номер k, на котором достигается минимум отношения

$$\Theta_k = \min_j \left\{ -\frac{\Delta_j}{x_{rj}} / x_{rj} < 0 \right\} = -\frac{\Delta_k}{x_{rk}}.$$

В базис вводится вектор A_k и определяются параметры следующей итерации по формуле:

$$x_{ij}^{l+1} = \begin{cases} x_{ij}^l - \dfrac{x_{rj}^l}{x_{rk}^l} x_{ik}^l & \text{при } i \neq r; \\[2ex] \dfrac{x_{rj}^l}{x_{rk}^l} & \text{при } i = r. \end{cases}$$

Полученный план проверяется на оптимальность.

Если исходная задача не вырождена, за конечное число шагов определяется опорный план задачи, являющийся ее решением.

Пример 1.6.

$$\text{Найти} \quad F = 8x_1 + 6x_2 \to \max \tag{1.7.6}$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leqslant 11; \\ 4x_1 + x_2 &\leqslant 10; \end{aligned} \tag{1.7.7}$$

$$x_1, x_2 \geqslant 0. \tag{1.7.8}$$

Представим задачу (1.7.6) — (1.7.8) в виде

$$F = 8x_1 + 6x_2 \to \max; \tag{1.7.9}$$

$$\begin{array}{ccccc} A_1 & A_2 & A_3 & A_4 & A_0 \end{array}$$

$$2x_1 + 5x_2 + 1x_3 + 0x_4 = 11; \tag{1.7.10}$$

$$4x_1 + 1x_2 + 0x_3 + 1x_4 = 10.$$

Запишем двойственную к ней задачу:

$$F = 11y_1 + 10y_2 \to \min; \tag{1.7.11}$$

$$\begin{aligned} 2y_1 + 4y_2 &\geqslant 8, \quad A_1; \\ 5y_1 + 1y_2 &\geqslant 6, \quad A_2; \\ y_1 &\geqslant 0, \quad A_3; \\ y_2 &\geqslant 0. \quad A_4. \end{aligned} \tag{1.7.12}$$

Возьмем в качестве сопряженного базиса вектора A_1, A_3 и из системы

$$2y_1 + 4y_2 = 8;$$
$$y_1 = 0,$$

найдем значение опорного плана двойственной задачи:

$$\bar{y}_1 = 0, \quad y_2 = 2.$$

Данный базис не может быть взят в качестве сопряженного, так как при $y_1 = 0$, $y_2 = 2$ второе ограничение не выполняется ($2 \not> 6$).

Таблица 1.26

c_i		0	8	6	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
6	x_2	10	4	1	0	1
0	x_3	−39	$\boxed{-18}$	0	1	−5
	Δ	60	16	0	0	6
	Θ	—	16/18	—	—	6/5

Попробуем взять сопряженным базисом векторы A_2, A_3. Из системы

$$5y_1 + y_2 = 6,$$
$$y_1 = 0;$$

находим значения $y_1 = 0$, $y_2 = 6$.

Неравенство $2y_1 + 4y_2 \geqslant 8$ при этих значениях y_1 и y_2 выполняется и, следовательно, система $\{A_2, A_3\}$ является сопряженным базисом.

Определяем коэффициенты разложения небазисных векторов по векторам базиса и находим псевдоплан исходной задачи:

$$A_0 = A_2 x_{20} + A_3 x_{30}$$
$$\begin{bmatrix} 11 \\ 10 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} x_{20} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_{30};$$
$$x_{20} = 10, \quad x_{30} = -39;$$
$$A_1 = A_2 x_{21} + A_3 x_{31}$$
$$\begin{bmatrix} 2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 1 \end{bmatrix} x_{21} + \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} x_{31};$$
$$x_{21} = 4, \quad x_{31} = -18;$$
$$A_4 = A_2 x_{24} + A_3 x_{34}$$
$$x_{24} = 1, \quad x_{34} = -5.$$

Так как среди компонентов разложения вектора A_0 по сопряженному базису имеются отрицательные, заполняем табл. 1.26 и приступаем к первой итерации.

Результаты итерации представлены в табл. 1.27. В столбце A_0 нет отрицательных компонентов, значит, получен оптимальный план задачи:

$$F_{max} = 25\frac{1}{3}, \quad x_1^{опт} = 2\frac{1}{6}, \quad x_2^{опт} = 1\frac{1}{3}.$$

Количество операций, необходимое для выполнения одной итерации в симплекс-методе и двойственном симплекс-методе, соизмеримо. Однако, двойственный симплекс-метод целесообразнее использовать при решении таких ЛП задач, в которых нахождение начального ДБР затруднительно (приходится вводить искусственные переменные), а начальный псевдоплан определяется автоматически. Проиллюстрируем это на следующем примере.

Таблица 1.27

c_j		0	8	6	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
6	x_2	4/3	0	1	4/18	38/18
8	x_1	39/18	1	0	−1/18	5/18
	Δ	$25^1/3$	6	0	16/18	$14^2/3$

Пример 1.7.

Найти
$$F_{min} = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3 \tag{1.7.13}$$
при ограничениях
$$\begin{aligned} 2x_1 - 3x_2 + x_3 &\geqslant 10; \\ 4x_1 + x_2 + 2x_3 &\geqslant 15; \end{aligned} \tag{1.7.14}$$
$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 3}. \tag{1.7.15}$$

Представим задачу в виде, необходимом для применения метода
$$F_{max} = -3x_1 - 2x_2 - 5x_3 \tag{1.7.16}$$
при ограничениях
$$2x_1 - 3x_2 + x_3 - x_4 = 10; \tag{1.7.17}$$
$$4x_1 + x_2 + 2x_3 - x_5 = 15; \tag{1.7.18}$$

Сопряженную задачу запишем следующим образом:
$$\tilde{F} = 10y_1 + 15y_2 \to \min \tag{1.7.19}$$
$$2y_1 + 4y_2 \geqslant -3, \quad A_1;$$
$$-3y_1 + y_2 \geqslant -2, \quad A_2;$$
$$y_1 + 2y_2 \geqslant -5, \quad A_3; \tag{1.7.20}$$

$$-y_1 \qquad \geqslant 0, \quad A_4;$$
$$-y_2 \geqslant 0, \quad A_5.$$

В качестве векторов базиса опорного плана Y сопряженной задачи (1.7.19), (1.7.20) может быть взята система $\{A_4, A_5\}$, так как при значениях $y_1 = 0$, $y_2 = 0$, полученных из последних двух ра-

Таблица 1.28

c_i		0	−3	−2	−5	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
0	x_4	−10	−2	3	−1	1	0
0	x_5	−15	−4	−1	−2	0	1
	Δ	0	3	2	5	0	0
	Θ	–	3/4	2	5/2	–	–

венств, первое, второе и третье ограничения сопряженной задачи удовлетворяются.

Таким образом, базис исходного псевдоплана состоит из единичных векторов $\{A_4, A_5\}$, и базисные компоненты псевдоплана X, (1.7.16) — (1.7.18), совпадают с соответствующими составляющими вектора ограничений, взятыми с обратным знаком, а элементы x_{ij} столбцов A_j равны и противоположны по знаку элементам соответствующих столбцов матрицы условий $\|a_{ij}\|$ (1.7.17).

Заполняем исходную табл. 1.28. В строке Δ_j записываем значения — c_j. Далее отыскиваем решение по изложенному алгоритму.

Задачи и упражнения

Решить следующие задачи двойственным симплекс-методом:

1.63. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 8,\quad 2x_1 + x_2 \leqslant 6,\quad x_1 + x_2 \geqslant 1,\quad x_1, x_2 \geqslant 0.$$

1.64. $F = -2x_1 + x_2 \to \min;$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 8,\quad x_1 + 3x_2 \geqslant 6,\quad 3x_1 + x_2 \geqslant 3,\quad x_1, x_2 \geqslant 0.$$

1.65. $F = 6x_1 + 4x_2 \to \min;$
$$2x_1 + x_2 \geqslant 3,\quad x_1 - x_2 \leqslant 1,\quad -x_1 + 2x_2 \geqslant 1,\quad x_1, x_2 \geqslant 0.$$

1.66. $F = 4x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$5x_1 + 2x_2 \geqslant 20,\quad x_1 + 3x_2 \leqslant 15,\quad x_1, x_2 \geqslant 0.$$

1.67. $F = x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$x_1 + x_2 \geqslant 3,\quad 6x_1 + x_2 \leqslant 42,\quad 2x_1 - 3x_2 \geqslant 6,\quad x_1, x_2 \geqslant 0.$$

1.68. $F = x_1 - 2x_2 \to \max;$
$$5x_1 - 2x_2 \leqslant 3,\quad x_1 + x_2 \geqslant 1,\quad -3x_1 + x_2 \leqslant 3,\quad x_1, x_2 \geqslant 0.$$

1.69. $F = 8x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &\leqslant 4, \\ -4x_1 + x_2 &\leqslant 4, \\ x_1 + x_2 &\leqslant 6, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.70. $F = 5x_1 + 4x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 3, \\ x_1 + 3x_2 &\leqslant 4, \\ -x_1 + x_2 &\leqslant 5, \\ 5x_1 + 4x_2 &\leqslant 6, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.71. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} x_1 + 5x_2 &\geqslant 16, \\ 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 12, \\ 2x_1 + 4x_2 &\geqslant 16, \\ x_1 \quad &\geqslant 1, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.72. $F = 3x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 4, \\ 3x_1 + x_2 &\geqslant 4, \\ x_1 + 5x_2 &\geqslant 4, \\ 0 \leqslant x_1 &\leqslant 3, \\ 0 \leqslant x_2 &\leqslant 3. \end{aligned}$$

1.73. $F = -2x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\leqslant 14, \\ 5x_1 + 2x_2 &\geqslant 10, \\ 4x_1 - 3x_2 &\leqslant 12, \\ 7x_1 + 4x_2 &\leqslant 28, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.74. $F = 7x_1 - 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 5, \\ 2x_1 - 3x_2 &\leqslant 6, \\ 3x_1 + x_2 &\geqslant -3, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.75. $F = 5x_1 + 4x_2 + 6x_3 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &\leqslant 6, \\ 2x_1 + x_2 + x_3 &\geqslant 9, \\ 3x_1 + x_2 + 2x_3 &\geqslant 11, \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.76. $F = -7x_1 + 2x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqslant 1, \\ 5x_1 + x_2 &\geqslant 3, \\ -3x_1 + x_2 &\leqslant 3, \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 4, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.77. $F = 2x_1 + x_2 - 3x_3 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 + 3x_2 - 2x_3 &\leqslant 4, \\ -5x_1 + \quad x_3 &\geqslant -12, \\ 2x_1 + x_2 - 3x_3 &\geqslant -4, \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.78. $F = 2x_1 - x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 3x_1 + x_2 &\geqslant 16, \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 12, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.79. $F = 6x_1 + 4x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geqslant 3, \\ x_1 - 2x_2 &\leqslant 2, \\ 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 1, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.80. $F = -x_1 - 2x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &\leqslant 4, \\ -x_1 + 2x_2 &\leqslant 4, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 4, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.81. $F = x_1 + 2x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} 5x_1 - 2x_2 &\leqslant 20, \\ x_1 - 2x_2 &\geqslant -20, \\ x_1 + x_2 &\geqslant 16, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.82. $F = x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 18, \\ x_1 + 2x_2 &\leqslant 16, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.83. $F = x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_1 &\leqslant 8, \\ x_1 + 2x_2 &\geqslant 4, \\ x_1 + 4x_2 &\leqslant 10, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.84. $F = 2x_1 - 3x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} 5x_1 + 2x_2 &\geqslant 10, \\ x_1 + 3x_2 &\leqslant 12, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.85. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 18,\\ x_1 + 2x_2 &\geqslant 14,\\ x_1 - 2x_2 &\leqslant 10,\\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.86. $F = x_1 + x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geqslant 8,\\ x_1 + 3x_2 &\geqslant 6,\\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.87. $F = 3x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 3x_1 + 3x_2 &\leqslant 21,\\ 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 30,\\ 2x_1 \quad &\leqslant 16,\\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.88. $F = 7x_1 + x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\geqslant 3,\\ 5x_1 + x_2 &\geqslant 5,\\ x_1 + 5x_2 &\geqslant 5,\\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.89. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 6x_1 + 2x_2 &\geqslant 6,\\ 3x_1 - 2x_2 &\leqslant 6,\\ 3x_1 - x_2 &\geqslant -3,\\ 2x_1 + 2x_2 &\leqslant 16,\\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.90. $F = 15x_1 + 33x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 6,\\ 6x_1 + x_2 &\geqslant 6,\\ x_2 &\geqslant 1,\\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.91. $F = 2x_1 - x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} 5x_1 + 9x_2 &\leqslant 45,\\ 6x_1 + 3x_2 &\leqslant 18,\\ -x_1 + 2x_2 &\geqslant 2,\\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.92. $F = x_1 + 4x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 - x_2 &\leqslant 6,\\ x_1 - x_2 &\geqslant -2,\\ x_1 + x_2 &\leqslant 10,\\ x_1,\ x_2 &\geqslant 0. \end{aligned}$$

1.8. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ СИМПЛЕКС-МЕТОД

В литературе этот метод встречается также под названием метода обратной матрицы.

При решении задач ЛП, в которых n существенно больше m, модифицированный симплекс-метод требует по сравнению с другими значительно меньшего количества вычислительных операций и объема памяти ЭВМ.

В модифицированном симплекс-методе реализуется та же идея, что и в обычном симплекс-методе, но здесь на каждой итерации пересчитывается не вся матрица условий задачи $\mathbf{A}$, а лишь матрица $\mathbf{A}_x^{-1}$.

В модифицированном симплекс-методе, как и в обычном, признаком оптимальности является условие $\Delta_j \geqslant 0$, $j = \overline{1, n}$. Однако величины Δ_j определяются другим образом, а именно:

$$\Delta_j = \Lambda \mathbf{A}_j - c_j; \tag{1.8.1}$$

$$\Lambda = \mathbf{C}_x \mathbf{A}_x^{-1}, \tag{1.8.2}$$

где $\mathbf{A}_x^{-1}$ — матрица, обратная к базисной на текущей итерации; $\mathbf{C}_x$ — вектор коэффициентов целевой функции, отвечающих базисным переменным на текущей итерации; $\mathbf{A}_j$ — j-й вектор; $j = \overline{1, n}$; c_j — коэффициент целевой функции при j-й переменной.

Рассмотрим последовательно процесс подготовки данных, предшествующий применению алгоритма метода.

На нулевом этапе заполняем вспомогательную и основную таблицы. Во вспомогательную таблицу заносим следующие данные задачи ЛП, решенной относительно какого-то начального опорного плана $\mathbf{X}$:

а) базисные компоненты начального опорного плана $\mathbf{X}$ — x_{i0}, $i = \overline{1, m}$;

б) элементы $\| a_{ij} \|_{j=\overline{1, n}}^{i=\overline{1, m}}$ — коэффициенты разложения векторов A_j по векторам базиса;

в) компоненты базисных векторов, составляющих матрицу A_x;

г) компоненты вектора C — строка c_j;

д) величины оценок Δ_j, определяемые по формуле (1.8.1).

В главную часть основной таблицы заносятся следующие данные:

а) в столбец C_x — значения весовых коэффициентов базисных переменных из целевой функции;

б) в столбец B_x — номера базисных векторов;

в) в столбец e_0 — значения базисных переменных e_{i0}, $i = \overline{1, m}$ $e_0 = A_x^{-1} A_0$, $e_{i0} = x_{i0}$;

г) в столбцы $e_1, e_2, \ldots, e_m$ — элементы $\| e_{ij} \|_{j=\overline{1, n}}^{i=\overline{1, m}}$ матрицы A_x^{-1};

д) в последнюю строку — компоненты λ_j вектора Λ, которые рассчитываются по формуле (1.8.2).

В дополнительный столбец таблицы, если задача не решена, записывается вектор A_k, который будет вводиться в базис.

Описание алгоритма

1. Заполняем $m + 1$ строку вспомогательной таблицы и m строк главной части основной таблицы.

2. Рассчитываем вектор Λ (1.8.2) и заносим его в $(m + 1)$-ю строку основной таблицы.

3. Рассчитываем оценки Δ_j (выражение 1.8.1) и заносим в $(m + 2)$-ю строку вспомогательной таблицы.

4. Если все $\Delta_j \geqslant 0$, задача решена, найден оптимальный план. Если есть отрицательные оценки Δ_j, приступаем к улучшению плана.

5. В базис вводим вектор A_k, для которого $\Delta_k = \min \Delta_j$. Компоненты вектора A_k основной таблицы определяем по формуле

$$A_k^{\text{осн}} = A_x^{-1} A_k^{\text{вспом}}, \tag{1.8.3}$$

где $A_k^{\text{вспом}}$ — вектор A_k, взятый из вспомогательной таблицы.

6. Если все $a_{ik} \leqslant 0$, задача не разрешима из-за неограниченности целевой функции на ОДР.

7. Если есть положительные элементы a_{ik}, определяем вектор, который будем выводить из базиса, по величине

$$\Theta_r = \min_i \left\{ \frac{e_{i0}}{a_{ik}} / a_{ik} > 0 \right\}. \tag{1.8.4}$$

Пусть таким вектором будет вектор A_r, тогда a_{rk} — направляющий элемент.

8. Заполняем вторую (либо $(l + 1)$-ю) основную таблицу, рассчитывая ее элементы по следующему рекуррентному соотношению:

$$e_{ij}^{l+1} = \begin{cases} e_{ij}^l - \dfrac{e_{rj}^l}{a_{rk}^l} \cdot a_{ik}^l, & \text{при } i \neq r; \\ \dfrac{e_{rj}^l}{a_{rk}^l} & \text{при } i = r, \end{cases} \tag{1.8.5}$$

$$i = \overline{1, m}, \quad j = \overline{1, n}.$$

9. Во вспомогательной таблице заполняем вторую (либо $(l + 1)$-ю) строку оценок Δ_j и возвращаемся к п. 4.

Пример 1.8. Решим модифицированным симплекс-методом пример 1.4:

$$3x_1 + 2x_2 \to \max;$$
$$x_1 - x_2 \leqslant 2;$$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 6;$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Таблица 1.29

B		A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
	A_3	2	1	-1	1	0
	A_4	6	2	1	0	1
	c_j	—	3	2	0	0
	I	Δ_j	-3	-2	0	0
	II	Δ_j	0	-5	3	0
	III	Δ_j	0	0	$-1/3$	5/3
	IV	Δ_j	1	0	0	2

Таблица 1.30

C_i	B_x	e_0	e_1	e_2	A_1	Θ
0	A_3	2	1	0	1	2
0	A_4	6	0	1	2	3
	Λ	0	0	0	-3	—

Приводим систему ограничений к расширенной форме. В качестве начального допустимого базиса выбираем векторы A_3, A_4 и заполняем вспомогательную таблицу (табл. 1.29). Затем заполняем основную таблицу (табл. 1.30). Так как базис составляют векторы

$$A_3,\ A_4, \text{ то } A_x = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A_x^{-1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$e_0 = A_x^{-1} A^{\text{вспом}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

На пересечении третьей строки и столбца e_0 находится значение функции при данном базисе, а на пересечении этой же строки со столбцами e_1 и e_2 — компоненты λ_1 и λ_2 вектора Λ, определяемого выражению (1.8.2): $\Lambda = (0,\ 0) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = (0,\ 0)$.

Рассчитываем Δ_j для вспомогательной таблицы:

$$\Delta_1 = \Lambda A_1 - c_1 = (0,\ 0)\,(1,\ 2)^T - 3 = -3;$$

$$\Delta_2 = \Lambda A_2 - c_2 = (0,\ 0)\,(-1,\ 1)^T - 2 = -2;$$

$$\Delta_3 = \Lambda A_3 - c_3 = (0,\ 0)\,(1,\ 0)^T - 0 = 0;$$

$$\Delta_4 = \Lambda A_4 - c_4 = (0,\ 0)\,(0,\ 1)^T - 0 = 0.$$

Таблица 1.31

c_i	B_x	e_0	e_1	e_2	A_2	Θ
3	A_1	2	1	0	−1	
0	A_4	2	−2	1	$\boxed{3}$	2/3
		6	3	0	−5	

Таблица 1.32

c_i	B_x	e_0	e_1	e_2	A_3	Θ
3	A_1	$2^2/_3$	1/3	1/3	$\boxed{1/3}$	8
2	A_2	2/3	−2/3	1/3	−2/3	−
	Λ	$9^{1/3}$	−1/3	5/3	− 1/3	−

Заносим эти значения в первую Δ-строку вспомогательной таблицы.

Первая итерация. По значениям Δ_j видим, что план, представленный в первой основной таблице, не будет оптимальным. Минимальное значение Δ_j соответствует вектору A_1, следовательно, его нужно вводить в базис. Рассчитываем значение A_1 для основной таблицы по формуле (1.8.3):

Таблица 1.33

B_x	e_0	e_1	e_2
0	8	1	1
2	6	0	1
Λ	12	0	2

$$A_1^{\text{осн}} = A_x^{-1} A_1^{\text{вспом}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Заносим A_1 в столбец основной табл. 1.30. Устанавливаем, что выводить из базиса следует вектор A_3. Направляющим элементом будет $a_{31} = 1$.

Заполняем вторую основную таблицу (табл. 1.31), пользуясь выражением (1.8.5). В табл. 1.29 записываем вторую строку оценок Δ_j уже для нового плана, представленного в табл. 1.31. Расчет Δ_j приводится ниже:

$$\Delta_1 = \Lambda \mathbf{A}_1 - c_1 = (3,\ 0)\,(1,\ 2)^T - 3 = 0;$$

$$\Delta_2 = \Lambda \mathbf{A}_2 - c_2 = (3,\ 0)\,(-1,\ 1)^T - 2 = -5;$$

$$\Delta_3 = \Lambda \mathbf{A}_3 - c_3 = (3,\ 0)\,(1,\ 0)^T - 0 = 3;$$

$$\Delta_4 = \Lambda \mathbf{A}_4 - c_4 = (3,\ 0)\,(0,1)^T - 0 = 0.$$

Так как имеется отрицательная оценка $\Delta_2 = -5$, приступаем ко второй итерации.

Вторая итерация. Определяем вводимый в базис вектор

$$\mathbf{A}_2^{\text{осн}} = \mathbf{A}_x^{-1}\mathbf{A}_2^{\text{вспом}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 \\ 3 \end{bmatrix}.$$

и дописываем его в табл. 1.31. Без дополнительных пояснений рассчитываем новый план и заносим его в табл. 1.32. Заполняем в табл. 1.29 третью строку оценок Δ_j плана, представленного в основной табл. 1.32.

Третья итерация. Вычисляем вектор

$$\mathbf{A}_3^{\text{осн}} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{3} \\ -\frac{2}{3} \end{bmatrix}$$

дописываем его в табл. 1.32 и находим новый план (табл. 1.33). Для этого плана определяем оценки Δ_j и заносим их в четвертую строку табл. 1.29. Так как все $\Delta_j \geqslant 0$, полученный на третьей итерации план будет оптимальным; $\mathbf{X}^{\text{опт}} = (0;\ 6)$; $F_{\max} = 12$.

1.9. АНАЛИЗ МОДЕЛИ НА ЧУВСТВИТЕЛЬНОСТЬ

При решении задач ЛП пользователя интересует не только статическая информация об оптимальных значениях управляемых переменных, но и возможные изменения полученного оптимального решения в результате изменения исходной модели. Ответ на такой вопрос дает анализ модели на чувствительность.

Рассмотрим потенциальные возможности анализа модели на чувствительность на примере, для которого приведем содержательную постановку [20].

Предприятие выпускает два вида красок, для производства которых используется сырье A и B. Известен спрос на краски, удельные расходы сырья на производство краски каждого вида, запасы сырья и прибыль предприятия от продажи тонны каждой краски. Цель предприятия — максимизировать прибыль от реализации продукции.

Математическая модель задачи имеет вид:

$$\text{максимизировать } Z = 3x_1 + 2x_2 \text{ (прибыль)} \qquad (1.9.1)$$

при ограничениях

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \text{ (ограничение на сырье } A\text{);} \quad (1.9.2)$$

$$2x_1 + x_2 \leqslant 8 \text{ (ограничение на сырье } B\text{);} \quad (1.9.3)$$

$$-x_1 + x_2 \leqslant 1 \text{ (ограничение на спрос);} \quad (1.9.4)$$

$$x_2 \leqslant 2 \text{ (ограничение на спрос);} \quad (1.9.5)$$

$$x_1, \quad x_2 \geqslant 0 \text{ (объем производства),} \quad (1.9.6)$$

где x_1, x_2 — объемы производства красок 1- и 2-го видов. Третье ограничение устанавливает то, что спрос на краску 1-го вида никогда не превышает спроса на краску 2-го вида более чем на 1 т. Четвертое ограничение — спрос на краску 2-го вида не превышает 2 т.

Получив оптимальное решение для исходных условий, руководство предприятия интересует, изменится ли оно, и если да, то какое будет новое в следующих ситуациях:

изменяются запасы сырья A и B;

изменяется спрос на краски;

изменяются нормы расхода сырья A и B на тонну краски;

налажен выпуск краски еще одного вида;

и так далее.

Каждая из перечисленных ситуаций может повлиять на предыдущее оптимальное решение. Оно может быть: а) недопустимым; б) неоптимальным; в) недопустимым и неоптимальным.

Анализ влияния перечисленных ситуаций можно провести, базируясь на вычислениях, использующих соотношение двойственности в ЛП в следующей последовательности.

Шаг 1. Решить исходную задачу ЛП табличным симплекс-методом.

Шаг 2. Применительно к рассматриваемым изменениям модели найти новые значения элементов симплекс-таблицы, используя соотношения двойственности.

Шаг 3. Если решение, представленное в новой симплекс-таблице неоптимальное, перейти к шагу 4. Если это решение недопустимое, перейти к шагу 5. Если же полученное решение оптимальное, процесс вычисления закончен.

Шаг 4. С помощью симплекс-метода получить новое допустимое решение или показать, что оно неограниченное. Закончить вычисления.

Шаг 5. С помощью двойственного симплекс-метода получить допустимое решение или показать, что такового не имеется. Закончить вычисления.

Для проведения конкретного анализа по задаче (1.9.1) — (1.9.6) запишем двойственную к ней, оптимальную симплекс-таблицу прямой задачи (табл. 1.3.4) и оптимальное переменное двойственной

$$Z = 6y_1 + 8y_2 + y_3 + 2y_4 \to \min; \quad (1.9.7)$$

$$y_1 + 2y_2 - y_3 \geqslant 3; \quad (1.9.8)$$

$$2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geqslant 2; \quad (1.9.9)$$

$$y_1, \quad y_2, \quad y_3, \quad y_4 \geqslant 0. \quad (1.9.10)$$

Векторы $A_4 - A_6$ соответствуют матрице обратной базисной на текущей итерации — A_x^{-1}.

Оптимальные значения переменных двойственной задачи определяем из табл. 1.34 по формуле 1.6.7:

$$y_1 = \Delta_3 = \frac{1}{3}; \quad y_2 = \Delta_4 = \frac{4}{3}; \quad y_3 = \Delta_5 = 0; \quad y_4 = \Delta_6 = 0.$$

К недопустимости приводят два случая:

1. Изменения запасов ресурсов;
2. Введение новых ограничений.

Таблица 1.34

c_i			3	2	0	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
2	x_2	4/3	0	1	2/3	−1/3	0	0
3	x_1	10/3	1	0	−1/3	2/3	0	0
0	x_5	3	0	0	−1	1	1	0
0	x_6	2/3	0	0	−2/3	1/3	0	1
	Δ	38/3	0	0	1/3	4/3	0	0

1. Анализируя найденное оптимальное решение прямой и двойственной задачи, видим, что увеличение количества ресурсов сырья и первого, и второго видов выгодно, особенно второго, так как это приводит к большому увеличению целевой функции:

$$Z'_{\max} = Z_{\max} + \Delta Z, \quad \Delta Z = y_i \Delta b_i. \tag{1.6.9}$$

Так, увеличение на 1 ед. ресурса А:

$$\Delta Z_1 = \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{1}{3}; \quad Z'_{\max} = Z_{\max} + \Delta Z_1 = \frac{38}{3} + \frac{1}{3} = 13,$$

ресурса В:

$$\Delta Z_2 = \frac{4}{3} \cdot 1 = \frac{4}{3}; \quad Z''_{\max} = \frac{38}{3} + \frac{4}{3} = 14.$$

Таким образом, если имеется возможность, постараемся увеличить ресурсы. Допустим, что увеличили второй вид ресурсов до 9 единиц и новый вектор $A_0 = (6, 9, 1, 2)^T$. Найдем значения переменных для нового условия, воспользовавшись (1.8.3):

$$\begin{bmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{bmatrix} = A_x^{-1} A_{0\text{нов}} = \begin{bmatrix} {}^2/_3 & -{}^1/_3 & 0 & 0 \\ -{}^1/_3 & {}^2/_3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -{}^2/_3 & {}^1/_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 6 \\ 9 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 4 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Решение осталось допустимым, при этом $Z_{max} = 14$.

Допустим, ситуация изменилась так, что первый ресурс мы увеличили до 7, а второй вынуждены снизить до 4. Каким будет новое решение и будет ли оно допустимым? Имеем

$$\begin{vmatrix} x_2 \\ x_1 \\ x_5 \\ x_6 \end{vmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 & -1/3 & 0 & 0 \\ 1/3 & 2/3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 7 \\ 4 \\ 1 \\ 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 10/3 \\ 1/3 \\ -2 \\ -4/3 \end{vmatrix}$$

Решение стало недопустимым, так как $x_5 = -2$, $x_6 = -4/3$. Переходим к шагу 5. Заполняем с учетом нового вектора симплекс-таблицу 1.35.

Таблица 1.35

C_i			3	2	0	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
2	x_2	10/3	1	0	2/3	−1/3	0	0
3	x_1	1/3	0	1	−1/3	2/3	0	0
0	x_5	−2	0	0	−1	1	1	0
0	x_6	−4/3	0	0	−2/3	1/3	0	1
	Δ	23/3	0	0	1/3	4/3	0	0

За одну итерацию мы получим новое оптимальное решение $x_1 = 1$, $x_2 = 2$, $Z_{max} = 7$.

2. Добавление нового ограничения может привести к двум ситуациям: а) новое ограничение избыточное, и потому решение не изменяется; б) новое ограничение связывающее.

Пусть введено новое ограничение $x_1 \leqslant 4$. Очевидно, что при найденном оптимальном решении $x_1 = 10/3$, это ограничение выполняется и будет избыточным.

Допустим введено $x_1 \leqslant 3$. При оптимальном решении $x_1 = \frac{10}{3}$ оно не выполняется. Поэтому необходимо с учетом

$$x_1 \leqslant 3, \quad x_1 + x_7 = 3, \quad x_7 \geqslant 0$$

найти новое оптимальное решение.

Так как x_1 в найденном оптимальном решении является базисной переменной, выразим ее в вводимом ограничении через небазисные. Из оптимальной симплекс-таблицы 1.34

$$x_1 - {}^1/_3 x_3 + {}^2/_3 x_4 = {}^{10}/_3.$$

Тогда

$${}^{10}/_3 + {}^1/_3 x_3 - {}^2/_3 x_4 + x_7 = 3,$$

или

$${}^1/_3 x_3 - {}^2/_3 x_4 + x_7 = -{}^1/_3. \qquad (1.9.11)$$

Вводим дополнительное ограничение в виде (1.9.11) в симплекс-таблицу 1.34, приняв в качестве еще одной базисной переменной x_7. Выполняем шаг 5 и за одну итерацию получаем новое оптимальное решение: $x_1 = 3$, $x_2 = {}^3/_2$, $Z_{max} = 12$.

К нарушению оптимальности уже найденного решения могут привести: 1) изменение коэффициентов целевой функции, 2) изменение удельных расходов ресурсов, 3) добавление нового вида продукции и так далее.

1. Изменяться могут коэффициенты целевой функции, соответствующие как базисным переменным, так и небазисным.

Проверим, остается ли план оптимальным, если изменить коэффициенты при базисных переменных.

Пусть функция $Z = 6x_1 + 4x_2$. Найдем значения переменных двойственной задачи по формуле (1.6.10) и, используя их, определим новые оценки Δ_j.

$$Y^{опт} = (4, 6, 0, 0)\begin{bmatrix} {}^2/_3 & -{}^1/_3 & 0 & 0 \\ -{}^1/_3 & {}^2/_3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -{}^2/_3 & {}^1/_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = ({}^2/_3, {}^8/_3, 0, 0),$$

т. е. $y_1 = {}^2/_3$, $y_2 = {}^8/_3$, $y_3 = 0$, $y_4 = 0$.

Проверяем оценки Δ_j, воспользовавшись (1.6.17):

Δ_1: $y_1 + 2y_2 - y_3 \geqslant 6$; $\Delta_1 = {}^2/_3 - 2 \cdot {}^8/_3 - 0 - 6 = 0$;

Δ_2: $2y_1 + y_2 + y_3 + y_4 \geqslant 4$; $\Delta_2 = 2{}^2/_3 + {}^8/_3 + 0 + 0 - 4 = 0$;

Δ_3: $y_1 \geqslant 0$, $\Delta_3 = {}^2/_3 - 0 = {}^2/_3$; Δ_4: $y_2 \geqslant 0$, $\Delta_4 = {}^8/_3 - 0 = \frac{8}{3}$;

Δ_5: $y_3 \geqslant 0$, $\Delta_5 = 0 - 0 = 0$; Δ_6: $y_4 \geqslant 0$, $\Delta_6 = 0 - 0 = 0$.

Все значения оценок положительные, следовательно, план $x_1 = -\frac{10}{3}$; $x_2 = \frac{4}{3}$ остался оптимальным. Изменилась только величина $Z_{max} = 6x_1 + 4x_2 = 24{}^2/_3$.

Замечание. Значения оценок для базисных переменных всегда остаются равными нулю. Поэтому необходимо заново вычислять только оценки Δ_j для небазисных переменных.

Рассмотрим ситуацию, приводящую к нарушению признака оптимальности. Пусть целевая функция в рассматриваемой задаче станет $Z = 4x_1 + x_2$.

Тогда

$$Y^{опт} = (1, 4, 0, 0)\begin{bmatrix} {}^2/_3 & -{}^1/_3 & 0 & 0 \\ -{}^1/_3 & {}^2/_3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -{}^2/_3 & {}^1/_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} = (-{}^2/_3; {}^7/_3, 0, 0),$$

т. е.

$$y_1 = -\frac{2}{3}; \quad y_2 = \frac{7}{3}; \quad y_3 = 0; \quad y_4 = 0.$$

Определим оценки Δ_j, воспользовавшись соотношением (1.6.7). Для первых двух базисных переменных x_1 и x_2 оценки равны $\Delta_1 =$

$= 0$, $\Delta_2 = 0$ и далее: $y_1 = \Delta_3$, $y_2 = \Delta_4$, $y_3 = \Delta_5$, $y_4 = \Delta_6$; $\Delta_3 = -2/3$, $\Delta_4 = 7/3$, $\Delta_5 = 0$, $\Delta_6 = 0$.

Следовательно, план, представленный в табл. 1.34, с новыми коэффициентами целевой функции стал неоптимальным.

	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
Δ_j	44/3	0	0	−2/3	7/3	0	0

Выполняем шаг 4. Запишем новую симплекс-таблицу, изменив в табл. 1.34 значения индексной строки Δ_j и $c_1 = 4$, $c_2 = 1$. На следующей итерации получаем оптимальный план (табл. 1.36).

Таблица 1.36

C_i			4	1	0	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
0	x_3	2	0	3/2	1	−1/2	0	0
4	x_1	4	1	1/2	0	1/2	0	0
0	x_5	5	0	3/2	0	1/2	1	0
0	x_6	2	0	1	0	0	0	1
	Δ	16	0	1	0	2	0	0

Исследование случая изменения значений коэффициентов целевой функции при небазисных переменных выполняется с помощью аналогичных вычислений.

2. При рассмотрении вопроса о влиянии изменения удельных расходов ресурсов на оптимальное решение ограничимся коэффициентами при небазисных переменных. Исследование изменений при базисных переменных довольно сложно, проще решить задачу с новыми условиями заново.

Рассмотрим исследуемую задачу при целевой функции $Z = 4x_1 + x_2$ и ограничениях (1.9.2) — (1.9.6), оптимальное решение которой представлено в табл. 1.36. Изменим потребление ресурсов A и B для производства тонны краски второго вида. Вместо 2 и 1 при x_2 зададим коэффициенты 5 и 3. Ограничение двойственной задачи, соответствующее x_2, принимает вид:

$$5y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 \geqslant 1.$$

Определяем из табл. 1.36 значения y_1, y_2, y_3, y_4 и затем новую оценку Δ_2.

$$y_1 = \Delta_3 = 0; \quad y_2 = \Delta_4 = 2; \quad y_3 = \Delta_5 = 0; \quad y_4 = \Delta_6 = 0;$$

$$\Delta_2 = 5y_1 + 3y_2 + y_3 + y_4 - 1 = 5.$$

Поскольку Δ_2 неотрицательна, указанные изменения не нарушают оптимальности решения табл. 1.36. Если бы оценка получилась отрицательной, необходимо было бы выполнить шаг 4.

3. Добавление еще одного вида деятельности — выпуск краски третьего вида. Обозначим объем краски третьего вида через x_7. Тогда задача запишется следующим образом:

$$Z = 3x_1 + 2x_2 + 2x_7 \to \max; \qquad (1.9.11)$$

$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 + x_7 &\leqslant 6; \\ 2x_1 + x_2 + {}^3/_4 x_7 &\leqslant 8; \\ -x_1 + x_2 - x_7 &\leqslant 1; \\ x_2 &\leqslant 2; \end{aligned} \qquad (1.9.12)$$

$$x_1, \quad x_2, \quad x_7 \geqslant 0. \qquad (1.9.13)$$

Добавление нового вида производственной деятельности эквивалентно одновременному изменению целевой функции и коэффициентов в ограничениях.

Предположим, что переменная x_7 ранее присутствовала в задаче (1.9.1) — (1.9.6) с нулевыми коэффициентами, а в модифицированной модели коэффициенты приняли соответствующие (1.9.11) — (1.9.13) значения. Такой подход позволяет считать переменную x_7 для оптимального решения (табл. 1.34) небазисной. Найдем оценку Δ_7 по формуле (1.6.17) и проверим оптимальность новой задачи. Из табл. 1.34 определяем:

$$y_1 = \Delta_3 = {}^1/_3; \quad y_2 = \Delta_4 = {}^4/_3; \quad y_3 = \Delta_5 = 0; \quad y_1 + {}^3/_4 y_2 - y_3 \geqslant 2;$$

$$\Delta_7 = {}^1/_3 + {}^3/_4 \cdot {}^4/_3 - 1 - 2 = -{}^5/_3.$$

Следовательно, введением в базис новой переменной x_7 план может быть улучшен.

Приступаем к шагу 4. В симплекс-таблицу, представленную в табл. 1.34 добавляем столбец, ассоциированный с переменной x_7, $\Delta_7 = -\frac{5}{3}$ и $c_7 = 2$

$$\mathbf{A}_7 = \begin{bmatrix} {}^2/_3 & -{}^1/_3 & 0 & 0 \\ -{}^1/_3 & {}^2/_3 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 & 0 \\ -{}^2/_3 & {}^1/_3 & 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 \\ {}^3/_4 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^5/_{12} \\ {}^1/_6 \\ -{}^5/_4 \\ -{}^5/_2 \end{bmatrix}$$

За одну итерацию получаем новое оптимальное решение:

$$x_1 = {}^{14}/_5; \quad x_2 = 0; \quad x_7 = {}^{16}/_5; \quad Z = 14\,{}^4/_5.$$

Задачи и упражнения

Привести постоптимальный анализ следующих задач ЛП.

1.93. При изготовлении трех видов изделий применяются три технологические операции. Максимальное время использования станков по каждой из трех операций составляет 430, 460, 420 мин в сутки. Прибыль от продажи одного изделия каждого вида составляет 3, 2 и 5. Известны пооперационные затраты времени на изготовление каждого изделия. Определить план, при котором предприятие будет иметь максимальную прибыль.

Модель задачи будет иметь вид:

Максимизировать $F = 3x_1 + 2x_2 + 5x_3$ (величина прибыли за сутки)

при ограничениях

$$\begin{aligned} &\text{операция 1:} \quad 1x_1 + 2x_2 + 1x_3 \leqslant 430; \\ &\text{операция 2:} \quad 3x_1 + 0x_2 + 2x_3 \leqslant 460; \\ &\text{операция 3:} \quad x_1 + 4x_2 + 0x_3 \leqslant 420; \end{aligned}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 3}.$$

1. Решить задачу и определить выпуск каких изделий выгоден.

2. На сколько нужно сократить время второй операции, чтобы сделать производство первого изделия выгодным?

3. Определить время сокращения операции 1, при котором производство детали первого вида станет рентабельным, если время выполнения операции 2 можно уменьшить до 1,75 мин.

4. Определить, как влияет на оптимальный план изменение ресурса времени станков в следующих случаях:

а) по первой операции время уменьшилось с 430 до 380 мин;

б) по второй операции — уменьшилось с 460 до 400 мин;

в) по третьей операции — уменьшилось до 400 и затем увеличилось до 450 мин.

5. Как изменится план, если в производство включен выпуск четвертого изделия с пооперационными временными затратами соответственно 2 мин, 3 мин, 1 мин, $C_4 = 4$?

6. Как изменится оптимальное решение, если целевая функция будет иметь следующий вид:

а) $F = 4x_1 + 2x_2 + x_3 \to \max$; б) $F = 3x_1 + 4x_2 + 2x_3 \to \max$;

в) $F = 2x_1 + 2x_2 + 8x_3 \to \max$; г) $F = 5x_1 + 2x_2 + 5x_3 \to \max$.

7. Определить для задачи с исходными данными увеличение прибыли для изделия первого вида, обеспечивающее рентабельность его производства.

1.10. МЕТОД ДЕКОМПОЗИЦИИ ДАНЦИГА — ВУЛЬФА

Этот специальный метод был разработан для решения задач ЛП, имеющих блочно-диагональную структуру. По сравнению с общими методами он позволяет значительно сократить объем памяти для хранения пересчитываемой на каждой итерации информации.

Метод оказывается особенно эффективным при решении реальных задач ЛП большой размерности.

Идея метода состоит в том, что решение большой исходной задачи сводится к решению связанных между собой подзадач меньшей размерности.

Задача ЛП с блочно-диагональной структурой имеет следующий вид:

$$\text{найти } \max f = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n \tag{1.10.1}$$

при ограничениях

$$A_1x_1 + A_2x_2 + \cdots + A_nx_n = b_0 \quad \text{блок-связка}; \tag{1.10.2}$$

$$B_1x_1 = b_1 \quad \text{блок } 1; \tag{1.10.3}$$

$$B_2x_2 = b_2 \quad \text{блок } 2; \tag{1.10.4}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$B_px_p = b_p \quad \text{блок } p; \tag{1.10.5}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{1.10.6}$$

Наряду с ограничениями общего вида (1.10.2), содержащими все переменные (блок-связка), в задачу входят группы ограничений (1.10.3) — (1.10.5), содержащие только определенную часть переменных (блоки 1, 2, ..., p). Количеством диагональных блоков определяется в общем случае количество подзадач, которые необходимо решить на каждой итерации решения так называемой главной или координирующей задачи.

По сравнению с исходной координирующая задача имеет небольшое число строк и большое число столбцов. Однако существенным для метода является то, что для решения координирующей задачи не требуется задания всех столбцов в явном виде. По мере необходимости последние генерируются в процессе решения.

Частным случаем является задача с одним диагональным блоком:

$$\text{найти } \max f = C^TX \tag{1.10.7}$$

при ограничениях

$$A_1x = b_1 \text{ — блок-связка}; \tag{1.10.8}$$

$$A_2x = b_2 \text{ — блок } 1; \tag{1.10.9}$$

$$X \geqslant 0. \tag{1.10.10}$$

Блок-связка (1.10.8) имеет m_1 строк, блок (1.10.9) — m_2 строк.

Пусть S — множество допустимых решений задачи ЛП (1.10.7) — (1.10.10); S_0 — множество решений системы (1.10.8), (1.10.10); S_1 — множество решений системы (1.10.9), (1.10.10). Отсюда $S = S_0 \cap S_1$. Предположим, что S_1 — ограниченное замкнутое множество (выпуклый многогранник) и X_j, $j = \overline{1, r}$,— его крайние точки. Тогда любая точка $X \in S_1$ может быть представлена в виде выпуклой линейной комбинации крайних точек множества S_1, т. е.

$$X = \sum_{j=1}^{r} \delta_j X_j, \quad j = 1, \ldots, r; \quad \delta_j \geqslant 0, \quad \sum_{j=1}^{r} \delta_j = 1,$$

где r — число вершин многогранника.

Базируясь на этом, приходим к следующему выводу: чтобы получить множество S, являющееся пересечением множеств S_0 и S_1, следует рассмотреть лишь такие наборы коэффициентов $\delta_j \geqslant 0, \sum_{j=1}^{r} \delta_j = 1$, которые определяют точки, принадлежащие множеству S_0, т. е. при которых удовлетворяются ограничения:

$$A_1X = A_1 \sum_{j=1}^{r} \delta_j X_j = \sum_{j=1}^{r} (A_1X_j)\, \delta_j = b_1.$$

Тогда задача (1.10.7) — (1.10.10) принимает вид:

$$\text{найти } \max f = \sum_{j} (C^TX_j)\, \delta_j \tag{1.10.11}$$

при ограничениях

$$\sum_j (\mathbf{A}_1\mathbf{X}_j)\,\delta_j = \mathbf{b}_1; \qquad (1.10.12)$$

$$\sum_j \delta_j = 1; \qquad (1.10.13)$$

$$\delta_j \geqslant 0. \qquad (1.10.14)$$

Введем обозначения: $\mathbf{A}_1\mathbf{X}_j = \mathbf{P}_j$ и $\mathbf{C}^T\mathbf{X}_j = \sigma_j$. Тогда задача (1.10.7) — (1.10.10) превратится в задачу с новыми переменными δ_j:

$$\text{найти} \ \max \sum_j \sigma_j\delta_j \qquad (1.10.15)$$

при ограничениях

$$\sum_j \mathbf{P}_j\delta_j = \mathbf{b}_1; \qquad (1.10.16)$$

$$\sum_j \delta_j = 1; \qquad (1.10.17)$$

$$\delta_j \geqslant 0. \qquad (1.10.18)$$

Задача (1.10.15) — (1.10.18) эквивалентна исходной (1.10.7) — (1.10.10) и называется координирующей. Она имеет $(m_1 + 1)$ строку (против $m_1 + m_2$ строк исходной задачи) и число столбцов, равное количеству крайних точек множества S_1. Если $\delta^0 = (\delta_1^0, \delta_2^0, ..., \delta_r^0)$ — оптимальное решение задачи (1.10.15) — (1.10.18), то $\mathbf{X}^0 = \sum_{j=1}^{r} \mathbf{X}_j\delta_j^0$ — оптимальное решение задачи (1.10.7) — (1.10.10).

Для решения координирующей задачи используем модифицированный симплекс-метод.

Если известно, что векторы $\mathbf{P}_{l1}, \mathbf{P}_{l2}, ..., \mathbf{P}_{l(m+1)}$ составляют базис опорного решения задачи (1.10.15) — (1.10.18), то для проверки этого решения на оптимальность надо знать знаки оценок Δ_j всех небазисных векторов

$$\Delta_j = \Lambda \begin{bmatrix} \mathbf{P}_j \\ 1 \end{bmatrix} - \sigma_j. \qquad (1.10.19)$$

Представим вектор Λ в виде $\Lambda = (\lambda_1, \lambda_0)$, где λ_1 соответствует ограничению (1.10.16), а λ_0 — ограничению (1.10.17). Используя введенные обозначения для $\mathbf{P}_j$ и σ_j, получаем:

$$\Delta_j = (\mathbf{A}_1\lambda_1 - \mathbf{C})^T\,\mathbf{X}_j + \lambda_0. \qquad (1.10.20)$$

Каждая оценка Δ_j соответствует j-му вектору и, следовательно, j-й вершине многогранника S_1. Если в какой-то вершине многогранника S_1, где значение функции $(\mathbf{A}_1\lambda_1 - \mathbf{C})^T\mathbf{X}_j$ минимально, сумма $(\mathbf{A}_1\lambda_1 - \mathbf{C})^T\mathbf{X}_j + \lambda_0 = \Delta_j$ — величина неотрицательная, то можно утверждать, что во всех остальных вершинах тем более $\Delta_j \geqslant 0$, и проверяемый базис координирующей задачи будет оптимален. Если же для этой вершины $\Delta_j < 0$, то базис не оптимален и определена наименьшая из отрицательных оценок, допустим Δ_S, соответствующая вектору P_s.

Таким образом, проверка базиса задачи (1.10.7) — (1.10.10) сводится к отысканию минимального значения функции $(\mathbf{A}_1\lambda_1 - \mathbf{C})^T\mathbf{X}_j$ на множестве всех вершин многогранника S_1, определяемого диагональным блоком, т. е. к решению подзадачи вида:

$$\text{найти} \ \min\,(\mathbf{A}_1\lambda_1 - \mathbf{C})^T\,\mathbf{X}; \qquad (1.10.21)$$

при ограничениях

$$\mathbf{A}_2\mathbf{X} = \mathbf{b}_2; \qquad (1.10.22)$$

$$\mathbf{X} \geqslant 0. \qquad (1.10.23)$$

Если X^* — оптимальное решение задачи (1.10.21) — (1.10.23) и $(\lambda_1 A_1 - C)X^* + \lambda_0 \geqslant 0$, то проверяемый базис оптимален; если $(A_1\lambda_1 - C)^T X^* + \lambda_0 < 0$, то не оптимален, и полученная Δ_j — наименьшая из отрицательных оценок векторов P_j. Пусть $\min \Delta_j = \Delta_s$, тогда в базис координирующей задачи следует ввести вектор

$$P_s = \begin{bmatrix} A_1 X^* \\ 1 \end{bmatrix}. \qquad (1.10.24)$$

Нумерация переменных координирующей задачи совпадает с нумерацией вершин многогранника S_1, а последняя зависит от нашего выбора. Поэтому можно принять, что вершина $X^* = X_s$ — следующая за всеми ранее рассмотренными вершинами многогранника. Коэффициент в целевой функции, соответствующий этому вектору,

$$\sigma_s = CX^*. \qquad (1.10.25)$$

Вектор, который будем выводить из базиса, определяется, как обычно, по минимальному отношению A_0 к P_s. Далее для решения задачи используем модифицированный симплекс-метод.

Новый базис снова проверяем на оптимальность, построив и решив для него подзадачу, соответствующую диагональному блоку. Через конечное число итераций получим оптимальное решение координирующей задачи, а затем и оптимальное решение исходной задачи.

Пример 1.9.

Найти $\max f = x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4 \qquad (1.10.26)$

при ограничениях

$$x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 10 \text{ — блок-связка}; \qquad (1.10.27)$$

$$\left.\begin{array}{r} 2x_1 + x_2 \leqslant 4 \\ x_1 + 2x_2 \leqslant 6 \end{array}\right\} \text{— блок 1}; \qquad (1.10.28)$$

$$\left.\begin{array}{r} x_3 + x_4 \leqslant 5 \\ -2x_3 + 3x_4 \leqslant 6 \end{array}\right\} \text{— блок 2}; \qquad (1.10.29)$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 4}. \qquad (1.10.30)$$

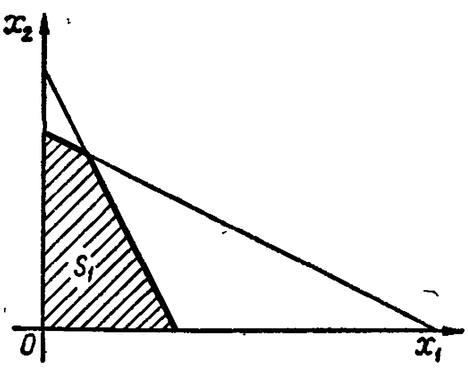

Рис. 1.10

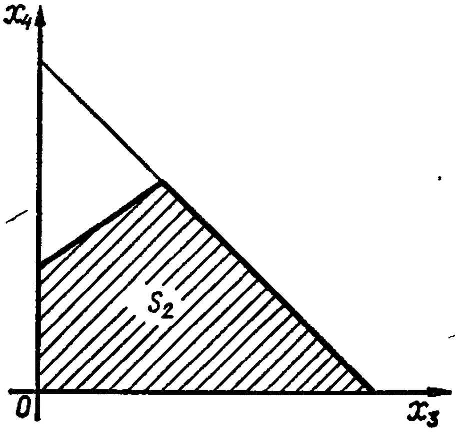

Рис. 1.11

Области допустимых решений (1.10.28) и (1.10.29) S_1 и S_2 представлены на рис. 1.10, 1.11.

Пусть $X = (x_1, x_2)$ и $Y = (y_1, y_2)$ — допустимые решения неравенств (1.10.28) и (1.10.29), где для удобства изложения y_1, y_2 соответствуют x_3 и x_4 рассматриваемого примера. Тогда справедливы соотношения $\mathbf{X} = \sum_i \alpha_i \mathbf{X}_i$, $\mathbf{Y} = \sum_i \beta_i \mathbf{Y}_i$, где $\mathbf{X}_i$, $\mathbf{Y}_i$ — крайние точки множеств S_1 и S_2. Целевую функцию представим в векторном виде:

$$\text{найти } \max f = \mathbf{C}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \mathbf{C}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{Y},$$

а связывающее ограничение так:

$$\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X} + \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{Y} + l = 10,$$

где $\mathbf{C}_1^{\mathrm{T}} = (1, 1)$; $\mathbf{C}_2^{\mathrm{T}} = (2, 1)$; $\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}} = (1, 2)$; $\mathbf{a}_2^{\mathrm{T}} = (1, -1)$; $l \geqslant 0$.

Запишем координирующую задачу:

$$\text{найти} \quad \max f = \sum_{i=1}^{4} (\mathbf{C}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_i)\,\alpha_i + \sum_{i=1}^{4} (\mathbf{C}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_i)\,\beta_i \tag{1.10.31}$$

при условиях

$$\sum_{i=1}^{4} (\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_i)\,\alpha_i + \sum_{i=1}^{4} (\mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_i)\,\beta_i + l = 10; \tag{1.10.32}$$

$$\sum_{i=1}^{4} \alpha_i = 1; \tag{1.10.33}$$

$$\sum_{i=1}^{4} \beta_i = 1; \tag{1.10.34}$$

$$\alpha_i \geqslant 0, \quad \beta_i \geqslant 0. \tag{1.10.35}$$

Для данной координирующей задачи можно определить суммарное количество переменных, входящих в нее. Множество $\mathbf{S}_1$ имеет 4 крайние точки и, следовательно, с ним связаны 4 переменные α_i. Множество $\mathbf{S}_2$ также имеет 4 крайние точки, а количество переменных β_i равно 4.

Таким образом, с учетом свободной переменной l в задаче (1.10.31) — (1.10.35) будет 9 переменных и, следовательно, 9 векторов-коэффициентов при этих переменных в условии задачи.

Выше описан общий принцип определения всех векторов. Однако на практике все векторы знать не обязательно. В нашей задаче нужно знать лишь три вектора, которые составляют начальное допустимое базисное решение. Необходимые в процессе решения другие векторы будут генерироваться в соответствии с выражением (1.10.24). Если рассмотреть в качестве начальных точки $\mathbf{X}_1 = (0, 0)$ из $\mathbf{S}_1$ и $\mathbf{Y}_1 = (0, 0)$ из $\mathbf{S}_2$, то пользуясь (1.10.24), (1.10.25) можно определить векторы при переменной α_1, β_1:

$$\mathbf{P}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_1 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты при α_1 и β_1 в целевой функции

$$\sigma_1 = C_1^T X_1 = [1,\ 1]\,[0,\ 0]^T = 0;$$

$$\tilde{\sigma}_1 = C_2^T Y_1 = [2,\ 1]\,[0,\ 0]^T = 0.$$

Тогда координирующая задача будет иметь вид

$$\text{найти}\quad \max f = 0\cdot\alpha_1 + \cdots + 0\beta_1 + \cdots + 0\cdot l \qquad (1.10.36)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &0\cdot\alpha_1 + \cdots + 0\cdot\beta_1 + \cdots + l = 10;\\ &\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \alpha_4 = 1;\\ &\beta_1 + \beta_2 + \beta_3 + \beta_4 = 1;\\ &\alpha_i \geqslant 0,\quad \beta_i \geqslant 0. \end{aligned} \qquad (1.10.37)$$

Первая большая итерация. Из системы (1.10.37) видно, что очень просто получается следующее допустимое базисное решение:

$$l = 10;\quad \alpha_1 = 1;\quad \beta_1 = 1.$$

Решаем координирующую задачу модифицированным симплекс-методом. Так как базисные векторы составляют единичную подматрицу, то матрица, обратная к базисной, совпадает с ней.

Заполняем основную таблицу для начального ДБР (табл. 1.37).

Таблица 1.37

$\delta_{баз}$	B_x	e_0	e_1	e_2	e_3
0	l	10	1	0	0
0	α_1	1	0	1	0
0	β_1	1	0	0	1
—	Λ	0	0	0	0

Определяем и заносим в последнюю строку табл. 1.37 значения Λ:

$$\Lambda = \sigma_{баз}^T A_x^{-1} = (0,\ 0,\ 0)\begin{bmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{bmatrix} = (0,\ 0,\ 0),$$

т. е. $\lambda_1 = 0$; $\lambda_{01} = 0$; $\lambda_{02} = 0$.

Для того, чтобы определить, является ли базис, представленный в табл. 1.37, оптимальным, составляем и решаем две подзадачи.

Подзадача 1.

$$\text{Найти}\quad \min z_1 = (\lambda_1 a_1 - C_1)^T X$$

при ограничениях $X \in S_1$.

Подзадача 2.

$$\text{Найти}\quad \min z_2 = (\lambda_1 a_2 - C_2)^T Y$$

при ограничениях $Y \in S_2$.

Подставляя в функции z_1 и z_2 значения $\lambda_1 = 0$, $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$, $\mathbf{C}_1$, $\mathbf{C}_2$, получаем

подзадачу 1

$$\text{найти} \quad \min z_1 = -x_1 - x_2,$$

$$\mathbf{X} = (x_1, x_2) \in \mathrm{S}_1;$$

подзадачу 2

$$\text{найти} \quad \min z_2 = -2x_3 - x_4,$$

$$\mathbf{Y} = (x_3, x_4) \in \mathrm{S}_2.$$

Таблица 1.38

$\delta_{баз}$	B_x	e_0	e_1	e_2	e_3	β_2
0	l	10	1	0	0	5
0	α_1	1	0	1	0	0
0	β_1	1	0	0	1	1
—	Λ	0	0	0	0	−10

Оптимальное решение этих подзадач легко найти графически (см. рис. 1.10, 1.11):

$$\mathbf{X}_2 = \left[\frac{2}{3}, \ \frac{8}{3}\right]; \quad z_1^0 = -\frac{10}{3}; \quad \mathbf{Y}_2 = [5, \ 0]; \quad z_2^0 = -10.$$

Найдем минимальные оценки стобцов:

$$\Delta_j(\alpha_2) = z_1^0 + \lambda_{01} = -\frac{10}{3};$$

$$\Delta_j(\beta_2) = z_2^0 + \lambda_{02} = -10.$$

Следовательно, базисное решение, представленное в табл. 1.37, не оптимально, и для его улучшения необходимо вводить в базис переменные β_2 и α_2.

Вторая большая итерация. Определим векторы, которые будем вводить в базис:

$$\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_2 = (1, \ 2)\left[\frac{2}{3}, \ \frac{8}{3}\right]^{\mathrm{T}} = 6;$$

$$\mathbf{P}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_2 = (1, \ -1)(5, \ 0)^{\mathrm{T}} = 5;$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_2 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Коэффициенты соответствующих переменных в целевой функции:

$$\sigma_2 = C_1^T X_2 = (1,\ 1)\left[\frac{2}{3},\ \frac{8}{3}\right]^T = \frac{10}{3};$$

$$\tilde{\sigma}_2 = C_2^T Y_2 = (2,\ 1)\,(5,\ 0)^T = 10.$$

В базис вводим вектор $\tilde{P}_2$, соответствующий переменной β_2. Этот вектор определяем по соотношению $\tilde{P}_2^{\text{осн}} = \tilde{A}_x^{-1} P_2$ и заполняем основную табл. 1.38.

Таблица 1.39

$\delta_{баз}$	B_x	e_0	e_1	e_2	e_3	α_2
0	l	5	1	0	−5	6
0	α_1	1	0	1	0	1
10	β_2	1	0	0	1	0
—	Λ	10	0	0	10	−10/3

Выводим из базиса переменную β_1. Новое базисное решение заносим в табл. 1.39. Затем в новый базис вводим переменную α_2 (вектор P_2) и выводим l.

Следующее базисное решение представлено в табл. 1.40: $\alpha_1 = {}^1/_6$, $\alpha_2 = {}^5/_6$, $\beta_2 = 1$. При этом

$$X = \alpha_1 X_1 + \alpha_2 X_2 = \frac{1}{6}(0,\ 0) + \frac{5}{6}\left[\frac{2}{3},\ \frac{8}{2}\right] = \left[\frac{5}{9},\ \frac{20}{9}\right],$$

$$Y = \beta_2 Y_2 = 1\,(5,\ 0) = (5,\ 0).$$

Значение целевой функции равно $12\frac{7}{9}$.

Таблица 1.40

$\delta_{баз}$	B_x	e_0	e_1	e_2	e_3
10/3	α_2	5/6	1/6	0	−5/6
0	α_1	1/6	−1/6	1	5/6
10	β_2	1	0	0	1
—	Λ	$12^7/9$	5/9	0	$7^2/9$

Далее необходимо проверить, будет ли новое базисное решение оптимальным. Из последней строки табл. 1.40 находим

$$\Lambda = \left[\frac{5}{9},\ 0,\ 7\frac{2}{9}\right].$$

Используем λ для формирования подзадач.

Подзадача 1.

$$\text{Найти} \quad \min(\lambda_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{C}_1)^{\mathrm{T}} \mathbf{X} = \min\left\{\frac{5}{9}(1,\ 2) - (1,\ 1)\right\}\mathbf{X} =$$

$$= -\frac{4}{9}x_1 + \frac{1}{9}x_2; \quad (x_1,\ x_2) \in \mathbf{S}_1.$$

Подзадача 2.

$$\text{Найти} \quad \min(\lambda_1 \mathbf{a}_2 - \mathbf{C}_2)^{\mathrm{T}} \mathbf{Y} = \left\{\frac{5}{9}(1,\ -1) - (2,\ 1)\right\}\mathbf{Y} =$$

$$= -\frac{13}{9}x_3 - \frac{14}{9}x_4; \quad \mathbf{Y} = (x_3,\ x_4) \in \mathbf{S}_2.$$

Решив эти подзадачи, получим оптимальные решения:

$$\mathbf{X}_3 = (2,\ 0); \quad z_1^0 = -\frac{8}{9} \text{ (подзадача 1)};$$

$$\mathbf{Y}_3 = \left[\frac{9}{5},\ \frac{16}{5}\right]; \quad z_2^0 = -7\frac{26}{45} \text{ (подзадача 2)}.$$

Определяем минимальные оценки столбцов:

$$\Delta_j(\alpha_3) = z_1^0 + \lambda_{01} = -\frac{8}{9} + 0 = -\frac{8}{9};$$

$$\Delta_j(\beta_3) = z_2^0 + \lambda_{02} = -7\frac{26}{45} + 7\frac{2}{9} = -\frac{16}{45}.$$

Так как оценки отрицательные, план координирующей задачи (табл. 1.40) не оптимален.

Третья большая итерация. Генерируем столбцы, которые должны быть введены в базис координирующей задачи:

$$\mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_3 = (1,\ 2)\,(2,\ 0)^{\mathrm{T}} = 2;$$

$$\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_3 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix};$$

$$\mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_3 = (1,\ -1)\cdot({}^9/_5,\ {}^{16}/_5) = -\frac{7}{3};$$

$$\tilde{\mathbf{P}}_3 = \begin{bmatrix} \mathbf{a}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_3 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -{}^7/_5 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix};$$

$$\sigma_3 = \mathbf{C}_1^{\mathrm{T}}\mathbf{X}_3 = (1,\ 1)\,(2,\ 0)^{\mathrm{T}} = 2;$$

$$\tilde{\sigma}_3 = \mathbf{C}_2^{\mathrm{T}}\mathbf{Y}_3 = (2,\ 1)\,({}^9/_5,\ {}^{16}/_5)^{\mathrm{T}} = {}^{34}/_5.$$

Переносим базисное решение из табл. 1.40 в табл. 1.41 и дописываем в нее столбец, соответствующий переменной α_3, которую будем вводить в базис на первом шаге,

$$\mathbf{P}_3^{\text{осн}} = \mathbf{A}_x^{-1}\mathbf{P}_3 = \begin{bmatrix} {}^1/_6 & 0 & -{}^5/_6 \\ -{}^1/_6 & 1 & {}^5/_6 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} {}^1/_3 \\ {}^2/_3 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Выводим из базиса переменную α_1. Новое базисное решение представлено в табл. 1.42.

Таблица 1.41

$\delta_{\text{баз}}$	B_x	e_0	e_1	e_2	e_3	α_3
10/3	α_2	5/6	1/6	6	–5/6	1/3
0	α_1	1/6	–1/6	1	5/6	2/3
10	β_2	1	0	0	1	0
	Λ	$12^7/9$	5/9	0	$1^2/9$	–8/9

Таблица 1.42

$\delta_{\text{баз}}$	B_x	e_0	e_1	e_2	e_3
10/3	α_2	3/4	1/4	–1/2	–5/4
2	α_3	1/4	–1/4	2/3	5/4
10	β_2	1	0	0	1
	Λ	13	1/3	4/3	$8^1/3$

На следующем шаге в базис следовало бы ввести вектор $\tilde{\mathbf{P}}_3$, для которого $\Delta_j(\beta_3) = -\frac{16}{45}$. Однако, прежде чем это сделать, целесообразно проверить, не стала ли оценка этого вектора в новом базисном решении (табл. 1.42) положительной:

$$\Delta_j(\beta_3) = \Lambda\tilde{\mathbf{P}}_3 - \tilde{\sigma}_3 = \left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}, 8\frac{1}{3}\right)\left(-\frac{7}{5}, 0, 1\right)^{\mathrm{T}} - \frac{34}{5} = 1\frac{1}{15}.$$

Так как $\Delta_j(\beta_3) > 0$, вектор $\tilde{P}_3$ в базис вводить не будем.

Проверяем, является ли базисное решение координирующей задачи, представленное в табл. 1.42, оптимальным.

Формируем и решаем две подзадачи.

Подзадача 1.

$$\text{Найти} \quad \min\,(\lambda_1\mathbf{a}_1 - \mathbf{C}_1)^{\mathrm{T}}\,\mathbf{X} = \left\{\frac{1}{3}(1, 2) - (1, 1)\right\}\mathbf{X} =$$

$$= -\frac{2}{3}x_1 - \frac{1}{3}x_2, \qquad \mathbf{X} \in \mathbf{S}_1.$$

Подзадача 2.

Найти $\min(\lambda_1 \mathbf{a}_1 - \mathbf{C}_2)^T \mathbf{Y} = \left\{\frac{1}{3}(1, -1) - (2, 1)\right\} \mathbf{Y} =$

$$= -\frac{5}{3}x_3 - \frac{4}{3}x_4, \quad (x_3, x_4) \in \mathbf{S}_2.$$

Решение

$$\mathbf{X}_4 = (2, 0), \quad z_1^0 = -\frac{4}{3}; \quad \mathbf{Y}_4 = (5, 0), \quad z_2^0 = -\frac{25}{3}.$$

Определяем минимальные оценки столбцов, не входящих в базис:

$$\Delta_j(\alpha_4) = z_1^0 + \lambda_{01} = -\frac{4}{3} + \frac{4}{3} = 0;$$

$$\Delta_j(\beta_4) = z_2^0 + \lambda_{02} = -\frac{25}{3} + 8\frac{1}{3} = 0.$$

Так как обе оценки неотрицательны, то базисное решение, представленное в табл. 1.42, является оптимальным решением координирующей задачи.

Тогда оптимальное решение исходной задачи будет

$$\mathbf{X}^{\text{опт}} = \alpha_2 \mathbf{X}_2 + \alpha_3 \mathbf{X}_3 = {}^3/_4\,({}^2/_3, {}^8/_3) + {}^1/_4\,(2, 0) = (1, 2);$$

$$\mathbf{Y}^{\text{опт}} = \beta_2 \mathbf{Y}_2 = 1 \cdot (5, 0) = (5, 0).$$

Итак, окончательно получим: $x_1^{\text{опт}} = 1$; $x_2^{\text{опт}} = 2$; $x_3^{\text{опт}} = 5$; $x_4^{\text{опт}} = 0$, $\max f = 13$.

Задачи и упражнения

Решить модифицированным симплекс-методом и методом декомпозиции.

1.94. $F = (-2x_3 + 2x_4 + x_5) \to \max;$
$x_1 - 2x_3 + 2x_4 + x_5 = 4,$
$x_2 + 3x_3 - x_4 + 2x_5 = 2,$
$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 5}.$

1.95. $F = (x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4) \to \min;$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3,$
$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1;$
$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 4}.$

1.96. $F = (70x_2 + 21x_3 - 12x_5 + 6x_7 + 17x_8 + 10x_9) \to \max;$
$x_3 + x_4 - 8x_5 + 2x_7 - x_8 - 3x_9 = 33,$
$6x_2 - x_3 + x_5 + x_6 - 2x_7 + 4x_8 = 27,$
$x_1 + 4x_2 + x_3 - 5x_5 + x_8 + x_9 = 86,$
$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 9}.$

1.97. $F = (x_1 + x_2 + 2x_3 + 8x_4) \to \min;$
$2x_1 - x_2 + 3x_3 - 2x_4 = 3,$
$-x_1 + 3x_2 - 4x_3 + 4x_4 = 1,$
$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 4}.$

1.98. $F = (2x_1 - x_2 + 3x_3 + 2x_4) \to \max;$
$$\begin{aligned} &x_1 - 2x_2 + 5x_3 - 3x_4 - x_6 = 1,\\ &2x_1 + 3x_2 - x_3 + 2x_4 + x_5 = 4,\\ &4x_1 + 10x_2 + 3x_3 + x_4 + x_7 = 8,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 7}. \end{aligned}$$

1.99. $F = (6x_1 - 3x_2 + 5x_3 - 2x_4 - 4x_5 + 2x_6) \to \min;$
$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_4 + 3x_5 = 17,\\ &4x_2 + x_3 + x_5 = 12,\\ &x_2 + 8x_4 - x_5 + x_6 = 6,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 6}. \end{aligned}$$

1.100. $F = (2x_1 + 3x_2 - 5x_3 + 6x_4 - 4x_5) \to \max;$
$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 5,\\ &x_1 + 3x_2 + x_3 - x_4 + 2x_5 = 8,\\ &-x_1 + 4x_2 + x_4 = 1,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 5}. \end{aligned}$$

1.101. $F = (2x_1 - x_2 + 3x_4) \to \max;$
$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + x_3 - x_4 \leqslant 2,\\ &2x_1 - x_2 \leqslant 1,\\ &x_1 + 2x_2 \leqslant 3,\\ &-x_3 + 2x_4 \leqslant 2,\\ &-2x_3 + x_4 \leqslant 1,\\ &x_j > 0, \quad j = \overline{1,\ 4}. \end{aligned}$$

1.102. $F = (x_1 + 8x_2 + 5x_3 + 6x_4 + x_5) \to \min;$
$$\begin{aligned} &x_1 + 4x_2 - {}^1/_4 x_3 + 2x_4 + {}^5/_4 x_5 = 7,\\ &2x_1 + 3x_2 = 5,\\ &5x_1 + x_2 = 6,\\ &3x_3 + 4x_4 + 3x_5 = 12,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 5}. \end{aligned}$$

1.103. $F = (x_1 + x_2 + 2x_3 + x_4) \to \max;$
$$\begin{aligned} &x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 \leqslant 40,\\ &x_1 + 3x_2 \leqslant 30,\\ &2x_1 + x_2 \leqslant 20,\\ &x_3 \leqslant 10,\\ &x_4 \leqslant 10,\\ &x_3 + x_4 \leqslant 15,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 5}. \end{aligned}$$

1.104. $F = (3x_1 + 2x_2 + 4x_3 + 8x_4 + 6x_5 + 12x_6) \to \max;$
$$\begin{aligned} &3x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 + 2x_5 + x_6 \leqslant 24,\\ &x_1 + 2x_2 + 6x_3 + x_4 \leqslant 18,\\ &x_5 + 2x_6 \leqslant 10,\\ &3x_5 + x_6 \leqslant 12,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 6}. \end{aligned}$$

1.105. $F = (x_1 + 2x_2 + \quad x_3 + 3x_4 + x_5) \to \max;$
$$\begin{aligned}&x_1 + \quad x_2 + 2x_4 + \quad x_5 = 5,\\&x_1 + \quad x_2 + \quad x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 9,\\&x_2 + \quad x_3 + 2x_4 + \quad x_5 = 6,\\&x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 5}.\end{aligned}$$

1.106. $F = 3x_1 + 2x_2 - 4x_3 - \quad x_4 + 5x_5 \to \min;$
$$\begin{aligned}&3x_1 + \quad x_2 + 2x_3 + 4x_4 + 3x_5 \leqslant 30,\\&3x_1 \leqslant 10,\\&x_3 + 4x_3 \leqslant 20,\\&2x_4 + \quad x_5 \leqslant 15,\\&x_j \geqslant 0.\end{aligned}$$

1.107. $F = (3x_1 + 2x_2 + 7x_3 + 6x_4 + \quad x_5) \to \max;$
$$\begin{aligned}&x_1 + 3x_2 + 4x_3 + \quad x_4 + 2x_5 = 28,\\&x_1 + \quad x_2 + 2x_3 \leqslant 16,\\&x_4 + 2x_5 \leqslant 12,\\&x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 6}.\end{aligned}$$

1.108. $F = (5x_1 + 4x_2 + 3x_3 + 11x_4 + 10x_5) \to \max;$
$$\begin{aligned}&x_1 + 2x_2 + 3x_3 + \quad 4x_4 + \quad 5x_5 = 9,\\&2x_1 + 3x_2 + \quad x_3 + \quad 5x_4 + \quad 6x_5 = 10,\\&3x_1 + \quad x_2 + 2x_3 + \quad 6x_4 + \quad 4x_5 = 14,\\&x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 5}.\end{aligned}$$

1.109. $F = (x_1 - x_2 + x_3 + \quad x_4 - \quad x_5 - \quad x_6) \to \max;$
$$\begin{aligned}&2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 + 3x_5 + 2x_6 = 7,\\&x_1 - x_3 + x_5 - \quad x_6 = 2,\\&x_2 + x_3 + x_4 + \quad x_5 + 2x_6 = 5,\\&x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 6}.\end{aligned}$$

1.110. $F = (x_1 + x_2 + \quad x_3 + x_4 + x_5) \to \max;$
$$\begin{aligned}&x_1 + x_2 + 2x_4 = 3,\\&-x_2 + x_3 + 2x_5 = 1,\\&-x_3 + x_4 - 2x_5 = -1,\\&x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 5}.\end{aligned}$$

1.111. $F = (2x_1 + \quad x_2 + 2x_3 + \quad 5x_4 - \quad 5x_5 - 5x_6) \to \max;$
$$\begin{aligned}&x_1 + 2x_2 + 2x_4 - \quad x_5 - \quad x_6 = 0,\\&x_2 + 2x_3 + 9x_4 - \quad 5x_5 - \quad 2x_6 = 2,\\&x_1 + 3x_2 + 4x_3 + 19x_4 - 10x_5 - 5x_6 = 4,\\&x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 6}.\end{aligned}$$

1.112. $F = (x_1 + \quad x_3 + \quad x_6) \to \max;$
$$\begin{aligned}&x_1 + 4x_2 + 3x_4 - 2x_5 + \quad x_6 = 15,\\&x_1 + 4x_2 + \quad x_3 - \quad x_4 + \quad x_5 + x_6 = 5,\\&2x_1 + 6x_2 + \quad x_3 + 4x_4 - 2x_5 + x_6 = 22,\\&x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 6}.\end{aligned}$$

1.113. $F = (x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + x_7 - x_8) \to \max;$
$$\begin{aligned} &x_1 + 7x_2 - x_3 + 7x_4 - 8x_5 + 2x_6 - 3x_7 - x_8 = 9,\\ &x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 7x_5 - 2x_7 - 2x_8 = 25,\\ &x_3 + x_4 + x_5 - x_6 + x_7 + x_8 = 3,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 5}. \end{aligned}$$

1.114. $F = (x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 + x_5 - 2x_6 + x_7 - x_7) \to \max;$
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - 2x_3 + x_5 + 6x_6 + 2x_7 - x_8 = 9,\\ &3x_1 + 3x_2 - x_3 + 5x_4 + x_5 + 6x_6 + 3x_7 + 2x_8 = 30,\\ &2x_1 + 2x_2 + x_4 + 5x_4 + x_5 + 6x_6 + 4x_7 - 3x_8 = 22,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 8}. \end{aligned}$$

1.115. $F = (x_1 + 2x_2 + 2x_3 + x_4 + 2x_5 + x_6 + 9x_7 - 8x_8) \to \max;$
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 - 5x_7 + 3x_8 = 15,\\ &x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_6 - 5x_7 + 3x_8 = 9,\\ &x_1 + x_2 - x_3 + x_4 + 2x_5 + 3x_6 + 3x_7 - x_8 = 7,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 8}. \end{aligned}$$

1.116. $F = (2x_1 + x_2 - x_3 - x_4 - x_5 - x_6) \to \max;$
$$\begin{aligned} &2x_1 + x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5 + 3x_6 = 15,\\ &x_1 - 2x_2 + x_3 + 2x_4 - x_5 - x_6 = 0,\\ &x_1 + x_2 + 3x_3 + 4x_4 + 4x_5 + 2x_6 = 22,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 6}. \end{aligned}$$

1.117. $F = (x_1 + 2x_2 + 3x_3 + x_4 + x_5) \to \max;$
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 4x_3 - x_4 + x_5 = 1,\\ &x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 + x_5 = 1,\\ &-x_1 + x_2 - 6x_3 + x_4 + x_5 = 1,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 5}. \end{aligned}$$

1.118. $F = (-x_1 - 3x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5) \to \min;$
$$\begin{aligned} &x_1 - x_2 + 2x_3 + x_4 + 5x_5 = 5,\\ &2x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + 5x_5 = 5,\\ &x_1 + x_3 + 2x_4 + 6x_5 = 6,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 5}. \end{aligned}$$

1.119. $F = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4) \to \max;$
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 - x_3 + 3x_4 + 2x_5 = 3,\\ &x_1 + x_2 - x_3 + x_4 = 1,\\ &x_1 - x_2 + x_3 + x_4 + x_5 = 1,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 5}. \end{aligned}$$

1.120. $F = (x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + x_5 + x_6) \to \max;$
$$\begin{aligned} &x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 + 6x_6 = 9,\\ &x_2 + x_3 + x_4 + x_6 = 3,\\ &x_3 + x_4 - x_5 + 2x_6 = 1,\\ &x_4 + x_6 = 1,\\ &x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1,\ 6}. \end{aligned}$$

1.121. $F = (x_1 + 2x_2 + x_3 + 3x_4 - 2x_5) \to \max;$
$x_1 + 7x_2 - x_3 + 7x_4 - 8x_5) = 9,$
$x_2 + 8x_3 + 9x_4 + 7x_5 = 25,$
$x_3 + x_4 + x_5 = 3;$
$x_j \geqslant 0. \quad j = \overline{1, 5}.$

1.122. $F = (x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - 2x_5) \to \max;$
$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 - 2x_5 = 10,$
$6x_1 + x_2 + 2x_3 + 3x_4 - 4x_5 = 20,$
$10x_1 + x_2 + 3x_3 + 6x_4 - 7x_5 = 30,$
$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, 5}.$

1.11. ТРАНСПОРТНЫЕ ЗАДАЧИ

Транспортные задачи составляют класс задач линейного программирования, специфика математической модели которых позволяет применять для их решения наряду с общими методами ЛП специальные методы, значительно сокращающие процесс вычислений. Простейшая постановка транспортной задачи (Т-задачи) по критерию стоимости следующая.

В m пунктах производства $A_1, A_2, \ldots, A_m$ имеются запасы какого-то однородного продукта в количествах $a_1, a_2, \ldots, a_m$ единиц. Необходимость в этом продукте в пунктах потребления $B_1, B_2, \ldots, B_n$ выражается соответственно величинами b_1, $b_2, \ldots, b_n$. Из каждого пункта производства возможна транспортировка продукта в любой пункт потребления. Транспортные издержки на перевозку единицы продукции (груза) из пункта A_i в B_j заданы и составляют $C = \| c_{ij} \|$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$.

Задача состоит в отыскании такого плана перевозок, при котором весь продукт из пунктов производства будет вывезен, запросы потребителей полностью удовлетворены и суммарные транспортные издержки минимальны.

Условия Т-задачи представим в виде

$$\begin{array}{cc}
 & a_i \\
C = \left\| \begin{array}{ccccc} c_{11} & c_{12} & c_{13} & \ldots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & c_{23} & \ldots & c_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{m1} & c_{m2} & c_{m3} & \ldots & c_{mn} \end{array} \right\| & \begin{array}{c} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_m \end{array} \\
b_j \quad\; b_1 \quad b_2 \quad b_3 \;\ldots\; b_m. &
\end{array}$$

Для составления математической модели задачи введем переменные $x_{ij} \geqslant 0$, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$, обозначающие количество груза, перевозимого из i-го пункта производства в j-й пункт потребления.

Требуется найти множество переменных $x_{ij} \geqslant 0$, минимизирующих функцию

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \qquad (1.11.1)$$

и удовлетворяющих условиям

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = a_i, \quad i = 1, \ldots, m; \qquad (1.11.2)$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = b_j, \quad j = 1, \ldots, n. \qquad (1.11.3)$$

Т-задача представляет собой задачу ЛП с числом переменных $m \times n$ и числом ограничений-равенств $m + n$.

Набор переменных $\{x_{ij}\}$, удовлетворяющий условиям (1.11.2) и (1.11.3), записывают в виде матрицы

$$X = \| x_{ij} \|_{i=m, j=n} = \begin{Vmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_{m1} & x_{m2} & \dots & x_{mn} \end{Vmatrix}$$

Матрицу X называют планом перевозок Т-задачи, а переменные x_{ij} — перевозками. План $X^{\text{опт}}$, при котором значение целевой функции минимально, называется оптимальным. Матрица $C = \| c_{ij} \|$, $i = 1, \dots, m$, $j = 1, \dots, n$, называется матрицей транспортных издержек.

Условие (1.11.2) гарантирует полный вывоз продукта из всех пунктов производства, а условие (1.11.3) означает полное удовлетворение спроса.

На практике существуют как задачи, где выполняется равенство между суммарными ресурсами и суммарными потребностями (условие баланса)

$$\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j, \tag{1.11.4}$$

так и задачи, где

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \neq \sum_{j=1}^{n} b_j. \tag{1.11.5}$$

Задача (1.11.1) — (1.11.3) при условии (1.11.4) называется закрытой моделью, а при условии (1.11.5) — открытой моделью. Равенство (1.11.4) является необходимым и достаточным условием совместности системы уравнений (1.11.2) — (1.11.3) в области допустимых решений, и, следовательно, разрешимости задачи. Если задача представляет собой открытую модель, то она должна быть сведена к закрытой транспортной модели.

При $\sum_{i=1}^{m} a_i > \sum_{j=1}^{m} b_j$ необходимо ввести дополнительный пункт потребления, в котором потребность

$$b_{n+1} = \sum_{i=1}^{m} a_i - \sum_{j=1}^{n} b_j,$$

а если $\sum_{j=1}^{n} b_j > \sum_{i=1}^{m} a_i$, то вводится дополнительный пункт производства. После этого можно приступать к решению задачи.

Существуют ручные и машинные методы решения Т-задачи. К ручным относятся распределительный метод, метод потенциалов. К машинным — венгерский метод, метод дифференциальных рент.

Решение Т-задачи с помощью ручных методов состоит из следующих основных этапов: определение исходного опорного плана задачи; оценка этого плана; переход к следующему, лучшему плану путем замены одной из базисных переменных на свободную.

Методы определения начального опорного плана

Как и в других задачах ЛП, итерационный процесс отыскания оптимального плана транспортной задачи начинается с какого-либо опорного плана. Опорный план Т-задачи строим в виде матрицы размером $m \times n$. Заполненные позиции матрицы, т. е. такие, в которых $x_{ij} \neq 0$, соответствуют базисным неизвестным. Для невырожденного опорного плана их количество равно $r = m + n - 1$, где r — ранг матрицы системы ограничений (1.11.2), (1.11.3).

Начальный опорный план может быть построен методом северо-западного угла.

Определяем элементы матрицы $X_{m \times n}$, начиная с верхнего левого угла. Находим величину $x_{11} = \min\{a_1, b_1\}$. Если $b_1 < a_1$, то $x_{11} = b_1$, и первый столбец закрыт для расчета остальных элементов, т. е. $x_{i1} = 0$, $i = 2,3, ..., m$. Если $b_1 > a_1$, то $x_{11} = a_1$ и $x_{1j} = 0$ для $j = 2, 3, ..., n$.

Затем вычисляем $x_{12} = \min\{a_1 - x_{11}, b_2\}$ при $a_1 > b_1$, $x_{21} = \min\{a_2, b_1 - x_{11}\}$ при $a_1 < b_1$.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока на каком-то этапе не исчерпаются ресурсы a_m и не удовлетворятся потребности b_n.

Пример 1.10. Даны: матрица транспортных издержек $C = \|c_{ij}\|$, $i = 1, m$, $j = 1, n$, объемы производства a_i. Объемы потребления b_j:

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} a_i \end{array} \\ C = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{array} \right\| & \left\| \begin{array}{c} 60 \\ 55 \\ 40 \\ 35 \end{array} \right. \\ b_j \quad \begin{array}{cccc} 70 & 5 & 45 & 70. \end{array} & \end{array}$$

Проверяем условие баланса $\sum_{i=1}^{m} a_i = \sum_{j=1}^{n} b_j$: $190 = 190$. Строим исходный опорный план X_0:

$$X_0 = \left\| \begin{array}{cccc} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{array} \right\|$$

$$x_{11} = \min\{60;\ 70\} = 60;$$

$$x_{21} = \min\{55;\ 70 - 60\} = 10;$$

$$x_{22} = \min\{5;\ 55 - 10\} = 5;$$

$$x_{23} = \min\{45;\ 55 - 10 - 5\} = 40;$$

$$x_{33} = \min\{40;\ 45 - 40\} = 5;$$

$$x_{34} = \min\{70;\ 40 - 5\} = 35;$$

$$x_{44} = 35.$$

Полученный план невырожденный, так как $r = 4 + 4 - 1 = 7$.

Начальный опорный план может быть найден также методом минимального элемента. Этот метод позволяет получить опорный план с учетом матрицы стоимости перевозок $C = \|c_{ij}\|$. План строим таким образом, чтобы перевозки x_{ij} выполнялись, по возможности, по маршрутам с минимальной стоимостью. Для этого элементы матрицы C

$$\begin{array}{cc} & a_i \\ C = \begin{Vmatrix} 1 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \\ 2 & 3 & 3 & 1 \end{Vmatrix} & \begin{matrix} 60 \\ 55 \\ 40 \\ 35 \end{matrix} \\ b_j \quad \begin{matrix} 70 & 5 & 45 & 70 \end{matrix} & \end{array}$$

нумеруем, начиная от минимального в порядке возрастания, а затем в этом же порядке определяем элементы матрицы X:

$$\begin{aligned} x_{11} &= \min\{60,\ 70\} = 60; \\ x_{23} &= \min\{55,\ 45\} = 45; \\ x_{44} &= \min\{35,\ 70\} = 35; \\ x_{12} &= 0; \\ x_{41} &= 0; \\ x_{21} &= \min\{55,\ 70-60\} = 10; \\ x_{42} &= 0; \\ x_{43} &= 0; \\ x_{34} &= \min\{40,\ 70-35\} = 35; \\ x_{22} &= 0; \\ x_{32} &= \min\{40-35,\ 5\} = 5. \end{aligned}$$

Элементы матрицы X, соответствующие c_{24}, c_{31}, c_{14}, c_{33}, c_{13}, не рассматриваются, так как исчерпаны все ресурсы и удовлетворены все потребности.

Строим опорный план X_0, заполняя x_{ij} в порядке полученной нумерации:

$$X_0 = \begin{Vmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 0 & 45 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{Vmatrix}$$

Построенный план вырожденный, поскольку количество ненулевых элементов $x_{ij} \neq 0$ равно 6, а $r = m + n - 1 = 7$.

Метод потенциалов

Идея метода состоит в следующем. Сначала строится начальный опорный план, а затем осуществляется его улучшение до тех пор, пока не будет удовлетворяться признак оптимальности плана.

Алгоритм метода потенциалов решения Т-задачи состоит из предварительного этапа и конечного числа итераций.

На предварительном этапе строят начальный опорный план X_0. Затем для этого плана рассчитывают оценочную матрицу

$$C_1 = \| c_{ij} - (v_j - u_i) \|_{m \times n}, \tag{1.11.6}$$

где v_j и u_i — потенциалы пунктов отправления A_i и пунктов назначения B_j.

Предварительные потенциалы выбирают таким образом, чтобы для связанных коммуникациями пар пунктов, для которых в плане X_0, $x_{ij} \neq 0$, разность потенциалов была равна c_{ij}:

$$v_j - u_i = c_{ij}. \qquad (1.11.7)$$

Если матрица C_1 не содержит отрицательных элементов, то X_0 — оптимальный план. В противном случае X_0 — неоптимальный план и его можно улучшить.

Описание алгоритма

Предварительный этап. 1. Определяем начальный опорный план X_0 одним из описанных способов.

2. Вычисляем оценочную матрицу C_1. Для расчета элементов матрицы необходимо первоначально определить все потенциалы v_j и u_i. Строим схему перевозок, соответствующую начальному опорному плану X_0, т. е. соединяем коммуникациями пункты отправления и назначения, для которых $x_{ij} \neq 0$. Пользуясь соотношением (1.11.7), определяем последовательно все потенциалы пунктов отправления и назначения, принимая для удобства $u_1 = 0$. Затем по (1.11.6) находим элементы матрицы C_1. Очевидно, позиции матрицы C_1, отвечающие базисным элементам плана X_0, будут заняты нулями.

(k + 1)-я итерация. 1. Если в оценочной матрице $C_{(k+1)}$ все элементы положительны, план $X_{(k)}$ — оптимальный, в противном случае следует приступить к его улучшению.

2. Выбираем наибольший по модулю отрицательный элемент оценочной матрицы $c_{st}^{(k+1)}$ и, начиная с соответствующего ему элемента x_{st}, в матрице $X_{(k)}$ строим замкнутую цепочку, в которую входят элементы $x_{ij}^{(k)} \neq 0$.

Затем определяем Θ — минимальный элемент среди всех нечетных по порядку расположения в цепочке, считая первым следующий за x_{st} элемент.

3. Строим новый план $X_{(k+1)}$, прибавляя Θ ко всем четным элементам цепочки и вычитая из нечетных. Элементы матрицы $X_{(k)}$, не входящие в цепочку, переносятся в матрицу $X_{(k+1)}$ без изменения.

4. С помощью эквивалентных преобразований матрицы $C_{(k)}$ находим оценочную матрицу $C_{(k+1)}$ для нового плана $X_{(k+1)}$. Для этого подчеркиваем в матрице $C_{(k)}$ все элементы, соответствующие ненулевым элементам матрицы $X_{(k+1)}$ (они обязательно равны 0). В матрице $C_{(k)}$ зачеркиваем строку, содержащую элемент c_{st}. Если в этой строке имеются подчеркнутые элементы, то зачеркиваем соответствующие этим элементам столбцы. Если в каждом зачеркнутом столбце имеются подчеркнутые элементы, зачеркиваем соответствующие им строки, и так до тех пор, пока описанная процедура выполнима. После этого ко всем элементам зачеркнутых строк прибавляем $|c_{st}|$, а от элементов зачеркнутых столбцов вычитаем $|c_{st}|$. Получаем новую оценочную матрицу. Если в матрице $C_{(k+1)}$ нет отрицательных элементов, то план $X_{(k+1)}$ — оптимальный, иначе переходим к следующей итерации.

На этом итерация завершается.

Рассмотрим работу алгоритма на примере 1.10. Решение начинаем с проверки выполнения условия баланса, т. е. условия разрешимости задачи:

$$\sum_{i=1}^{4} a_i = \sum_{j=1}^{4} b_j = 190.$$

Строим начальный опорный план по методу северо-западного угла:

$$X_0 = \begin{Vmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 & 40 & 0 \\ 0 & 0 & 5 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{Vmatrix}$$

Для удобства вычисления потенциалов u_i и v_j представим графически план перевозок, соответствующий начальному опорному плану (рис. 1.12).

По соответствующим маршрутам указываем стоимость перевозки c_{ij} единицы груза из i-го пункта в j-й. Принимаем $u_i = 0$ (можно взять любое число) и, пользуясь соотношением (1.11.7), определяем потенциалы:

$$\begin{array}{llll} u_1 = 0; & & & \\ c_{11} = 1, & v_1 - u_1 = c_{11}, & v_1 = 1; \\ c_{21} = 3, & v_1 - u_2 = c_{21}, & u_2 = -2; \\ c_{22} = 4, & v_2 - u_2 = c_{22}, & v_2 = 2 \end{array}$$

и т. д.

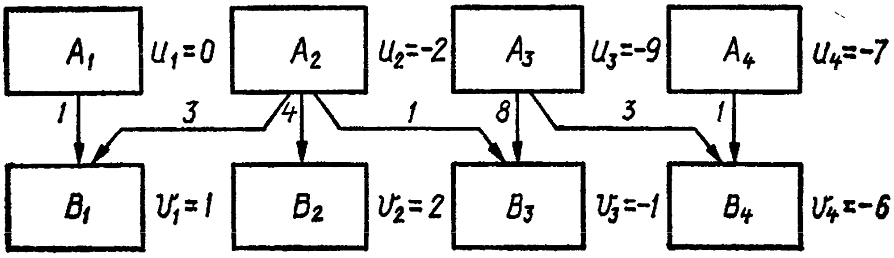

Рис. 1.12

Рассчитываем элементы оценочной матрицы по соотношению (1.11.6):

$$\begin{aligned} c'_{ij} &= c_{ij} - (v_j - u_i); \\ c'_{12} &= c_{12} - v_2 + u_1 = 2 - 2 + 0 = 0; \\ c'_{13} &= c_{13} - v_3 + u_1 = 9 + 1 - 0 = 10; \\ c'_{14} &= c_{14} - v_4 + u_1 = 7 + 6 - 0 = 13; \end{aligned}$$

и т. д.

Таким образом

$$C_1 = \begin{Vmatrix} 0 & 0 & 10 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 9 \\ -4 & -7 & 0 & 0 \\ -6 & -6 & -3 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Поскольку в C_1 имеются отрицательные элементы, план X_0 не является оптимальным.

Первая итерация. В матрице X_0, начиная с элемента x_{32}, соответствующего в оценочной матрице наибольшему отрицательному элементу, строим цепочку. Изменяя элементы, входящие в цепочку, на величину $\Theta = \min\{5, 5\} = 5$ строим новый план X_1:

$$X_0 = \begin{Vmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & 5 \rightarrow & 40 & 0 \\ 0 & 0 \leftarrow & 5 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{Vmatrix} \qquad X_1 = \begin{Vmatrix} 60 & 0 & 0 & 0 \\ 10 & \phi\& & 45 & 0 \\ 0 & 5 & 0 & 35 \\ 0 & 0 & 0 & 35 \end{Vmatrix}$$

Полученный план является вырожденным. Поскольку в дальнейших расчетах оперируем невырожденным планом, один из нулей цепочки заменяем величиной $\varepsilon \neq 0$. В случае вырожденности при построении начального опорного плана вводим $x_{ij} = \varepsilon$ по той коммуникации, которая необходима для определения потенциалов u_i и v_j.

Выполняем преобразования в матрице C_1, предварительно отметив в ней нули, соответствующие базисным переменным $x_{ij} \neq 0$ плана X_1, и строим оценочную матрицу C_2:

$$C_1 = \begin{array}{c c} \left\| \begin{array}{cccc} \bar{0} & 0 & 10 & 13 \\ \bar{0} & \bar{0} & \bar{0} & 9 \\ -4 & \boxed{-7} & 0 & \bar{0} \\ -6 & -6 & -3 & \bar{0} \end{array} \right\| & \begin{array}{c} \\ \\ +7 \\ +7 \end{array} \\ \begin{array}{cccc} & & & -7 \end{array} & \end{array} \qquad C_2 = \left\| \begin{array}{cccc} 0 & 0 & 10 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 2 \\ 3 & 0 & 7 & 0 \\ 1 & 1 & 4 & 0 \end{array} \right\|$$

В оценочной матрице C_2 нет отрицательных элементов, следовательно, план X_1 является оптимальным. Стоимость перевозок в условных единицах

$$L = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} = 60 \cdot 1 + 10 \cdot 3 + 40 \cdot 1 + 5 \cdot 4 +$$
$$+ 35 \cdot 3 + 35 \cdot 1 = 290.$$

Задачи и упражнения

Решить следующие Т-задачи.

1.123.

$$\begin{array}{cc} C = \left\| \begin{array}{cccc} 1 & 8 & 2 & 3 \\ 4 & 7 & 5 & 1 \\ 5 & 3 & 4 & 4 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} a_i \\ 30 \\ 50 \\ 20 \end{array} \\ b_j \quad 15 \ 15 \ 40 \ 30 & \end{array}$$

1.124.

$$\begin{array}{cc} C = \left\| \begin{array}{ccccc} 2 & 6 & 3 & 4 & 8 \\ 1 & 5 & 6 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 1 & 6 & 10 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} a_i \\ 40 \\ 30 \\ 35 \end{array} \\ b_j \quad 20 \ 34 \ 16 \ 10 \ 15 & \end{array}$$

1.125.

$$\begin{array}{cc} C = \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 5 & 1 \\ 2 & 3 & 9 & 4 \\ 3 & 4 & 22 & 5 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} a_i \\ 60 \\ 70 \\ 20 \end{array} \\ b_j \quad 40 \ 30 \ 30 \ 50 & \end{array}$$

1.126.

$$\begin{array}{cc} C = \left\| \begin{array}{cccc} 2 & 4 & 1 & 3 \\ 5 & 6 & 5 & 4 \\ 3 & 7 & 9 & 5 \\ 1 & 2 & 2 & 7 \end{array} \right\| & \begin{array}{c} a_i \\ 30 \\ 20 \\ 40 \\ 50 \end{array} \\ b_j \quad 35 \ 20 \ 55 \ 30 & \end{array}$$

1.127.

$$\begin{array}{r}\\ C=\end{array}\begin{array}{c}\\ \begin{Vmatrix}4&5&5&7\\8&7&5&4\\9&6&4&5\\3&2&9&3\end{Vmatrix}\end{array}\begin{array}{c}a_i\\100\\120\\150\\130\end{array}$$

b_j 140 130 90 140

1.128.

$$C=\begin{Vmatrix}1&3&3&4\\5&2&7&5\\6&4&8&2\\7&1&5&7\end{Vmatrix}\begin{array}{c}a_i\\50\\20\\30\\20\end{array}$$

b_j 40 30 35 15

1.129.

$$C=\begin{Vmatrix}2&4&5&1\\2&3&9&4\\3&4&2&5\end{Vmatrix}\begin{array}{c}a_i\\60\\70\\20\end{array}$$

b_j 40 30 30 50

1.130.

$$C=\begin{Vmatrix}1&2&6&4\\3&1&3&2\\5&7&5&1\end{Vmatrix}\begin{array}{c}a_i\\40\\30\\20\end{array}$$

b_j 30 25 18 20

1.131.

$$C=\begin{Vmatrix}2&4&3&2\\3&1&2&3\\5&4&1&5\end{Vmatrix}\begin{array}{c}a_i\\60\\65\\70\end{array}$$

b_j 40 60 70 25

1.132.

$$C=\begin{Vmatrix}10&5&7&4\\7&4&9&10\\6&14&8&7\end{Vmatrix}\begin{array}{c}a_i\\40\\25\\35\end{array}$$

b_j 15 40 30 15

1.133.

$$C=\begin{Vmatrix}3&2&4&1\\2&3&1&5\\3&2&7&4\end{Vmatrix}\begin{array}{c}a_i\\50\\40\\20\end{array}$$

b_j 30 25 35 20

1.134.

$$C=\begin{Vmatrix}8&12&4&9&10\\7&5&15&3&6\\9&4&6&12&7\\5&3&2&6&4\end{Vmatrix}\begin{array}{c}a_i\\60\\40\\100\\50\end{array}$$

b_j 30 80 65 35 40

1.135.

$$C=\begin{Vmatrix}2&3&6&3&2&10\\8&1&2&3&5&6\\7&4&4&1&4&8\\2&8&5&1&3&6\end{Vmatrix}\begin{array}{c}a_i\\130\\90\\100\\140\end{array}$$

b_j 110 50 30 80 100 90

1.136.

$$C=\begin{Vmatrix}18&2&9&7\\30&4&1&55\\6&4&8&3\end{Vmatrix}\begin{array}{c}a_i\\68\\55\\40\end{array}$$

b_j 2 3 3 16

1.137.

$$C=\begin{array}{c} \\ \left\|\begin{array}{cccc} 1 & 2 & 9 & 7 \\ 3 & 40 & 15 & 5 \\ 6 & 4 & 8 & 3 \\ 24 & 3 & 3 & 1 \end{array}\right\| \\ \begin{array}{cccc} 70 & 5 & 45 & 70 \end{array}\end{array}\begin{array}{c} a_i \\ 60 \\ 55 \\ 40 \\ 35 \\ \end{array}$$

b_j 70 5 45 70

1.138.

$$C=\left\|\begin{array}{cccc} 2 & 3 & 9 & 7 \\ 3 & 4 & 6 & 1 \\ 5 & 1 & 2 & 2 \\ 4 & 5 & 8 & 1 \end{array}\right\|\begin{array}{c} a_i \\ 20 \\ 16 \\ 14 \\ 11 \end{array}$$

b_j 16 18 12 15

1.139.

$$C=\left\|\begin{array}{ccccc} 3 & 7 & 1 & 5 & 4 \\ 7 & 5 & 8 & 6 & 3 \\ 6 & 4 & 8 & 3 & 2 \\ 3 & 1 & 7 & 4 & 2 \end{array}\right\|\begin{array}{c} a_i \\ 30 \\ 5 \\ 45 \\ 70 \end{array}$$

b_j 10 35 15 25 35

1.140.

$$C=\left\|\begin{array}{ccccc} 4 & 5 & 6 & 8 & 10 \\ 10 & 3 & 2 & 3 & 15 \\ 4 & 10 & 5 & 1 & 16 \end{array}\right\|\begin{array}{c} a_i \\ 130 \\ 90 \\ 40 \end{array}$$

b_j 110 30 50 80 90

1.141.

$$C=\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 7 & 7 & 3 & 8 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right\|\begin{array}{c} a_i \\ 20 \\ 20 \\ 40 \\ 45 \end{array}$$

b_j 25 30 40 15

1.142.

$$C=\left\|\begin{array}{cccc} 2 & 5 & 3 & 4 \\ 6 & 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 3 & 8 \end{array}\right\|\begin{array}{c} a_i \\ 45 \\ 35 \\ 70 \end{array}$$

b_j 20 60 55 45

1.143.

$$C=\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 7 & 2 & 5 \\ 3 & 8 & 4 & 1 \\ 6 & 3 & 5 & 3 \end{array}\right\|\begin{array}{c} a_i \\ 40 \\ 30 \\ 50 \end{array}$$

b_j 20 18 44 75

1.144.

$$C=\left\|\begin{array}{cccc} 2 & 7 & 3 & 6 \\ 9 & 4 & 5 & 7 \\ 5 & 7 & 6 & 2 \end{array}\right\|\begin{array}{c} a_i \\ 30 \\ 70 \\ 50 \end{array}$$

b_j 10 40 20 60

1.145.

$$C=\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 9 & 7 & 2 \\ 3 & 1 & 5 & 5 \\ 6 & 8 & 3 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 3 \end{array}\right\|\begin{array}{c} a_i \\ 30 \\ 40 \\ 70 \\ 60 \end{array}$$

b_j 35 80 25 70

1.146.

$$C=\left\|\begin{array}{cccc} 1 & 3 & 3 & 8 \\ 8 & 6 & 2 & 6 \\ 4 & 7 & 7 & 3 \\ 5 & 2 & 4 & 5 \end{array}\right\|\begin{array}{c} a_i \\ 10 \\ 20 \\ 35 \\ 45 \end{array}$$

b_j 25 30 40 15

1.147.

$$
\begin{array}{c}
C = \left\| \begin{matrix} 1 & 5 & 2 & 2 & 1 & 6 \\ 3 & 6 & 2 & 4 & 3 & 3 \\ 8 & 10 & 4 & 5 & 6 & 8 \\ 7 & 3 & 7 & 9 & 1 & 2 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} a_i \\ 100 \\ 15 \\ 90 \\ 55 \end{matrix} \\
b_j \quad 30 \quad 40 \quad 55 \quad 80 \quad 45 \quad 10
\end{array}
$$

1.148.

$$
\begin{array}{c}
C = \left\| \begin{matrix} 3 & 5 & 6 & 12 & 7 & 8 \\ 4 & 4 & 2 & 10 & 9 & 5 \\ 7 & 6 & 9 & 5 & 4 & 8 \\ 12 & 10 & 4 & 3 & 9 & 6 \\ 5 & 3 & 8 & 4 & 2 & 7 \end{matrix} \right\| \begin{matrix} a_i \\ 105 \\ 30 \\ 80 \\ 20 \\ 20 \end{matrix} \\
b_j \quad 80 \quad 43 \quad 10 \quad 17 \quad 50 \quad 30
\end{array}
$$

Глава 2
ДИСКРЕТНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

2.1. МЕТОД ОТСЕКАЮЩИХ ПЛОСКОСТЕЙ *

Многие задачи исследования операций из области экономики и управления описываются математическими моделями дискретного программирования (ДП).

Методы решения задачи ДП делятся на 3 группы: 1) отсекающих плоскостей, 2) ветвей и границ, 3) случайного поиска и эвристические методы.

Метод отсекающих плоскостей предназначен для решения частного случая задач дискретного программирования — задач линейного целочисленного программирования (ЛЦП).

Метод состоит в следующем. Временно отбросив условия целочисленности, отыскиваем оптимальный опорный план. Если окажется, что он не удовлетворяет условию целочисленности, то формируем дополнительное ограничение, называемое правильным отсечением, которому заведомо удовлетворяет любое целочисленное и не удовлетворяет найденное оптимальное нецелочисленное решение.

Решим задачу ЛЦП.

Найти максимум

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.1.1}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i \leqslant b_i, \quad i = 1, \ldots, m; \tag{2.1.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.1.3}$$

$$x_j \text{ — целые}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.1.4}$$

Если исходная система ограничений совместна и функция ограничена на множестве решений, отыскиваем оптимальное решение, отбросив условие целочисленности.

Допустим, что найденный оптимальный план не является целочисленным. Тогда для i-й переменной, имеющей нецелочисленное значение, формируем дополнительное ограничение, которое имеет вид

$$\sum_{j=m+1}^{n} \gamma_{ij} x_j \geqslant \gamma_{i0}, \tag{2.1.5}$$

где γ_{ij} — дробная часть значения коэффициента x_{ij} разложения небазисной j-й переменной по i-й базисной; γ_{i0} — дробная часть значения i-й базисной переменной x_{i0}; $\gamma_{ij} = x_{ij} - [x_{ij}]$, причем $x_{ij} \geqslant [x_{ij}]$, $\gamma_{i0} = x_{i0} - [x_{i0}]$, $x_{i0} \geqslant [x_{i0}]$ значит, $0 \leqslant \gamma_{ij} < 1$ и $0 \leqslant \gamma_{i0} < 1$.

* В литературе этот метод встречается также под названиями: *метод отсечения*, *или метод Гомори*.

Минуя рассуждения, которые привели к выражению (2.1.5), укажем на его особенность.

Нецелочисленный план $X^{\text{опт}}$ не удовлетворяет неравенству (2.1.5), так как $\gamma_{i0} \geqslant 0$, а левая часть неравенства равна нулю, поскольку небазисные переменные x_j равны нулю. В то же время любой целочисленный план удовлетворяет выражению (2.1.5) как строгому равенству, так как $\gamma_{i0} = 0$ для всех i.

Таким образом, дополнив исходную систему ограничения (2.1.2), (2.1.3) правильным отсечением (2.1.5), отыскиваем оптимальное решение новой задачи ЛП. Если дополнительное ограничение сформулировано правильно, через несколько итераций будет найдено искомое решение задачи ЛЦП, либо мы установим ее неразрешимость.

Двойственный симплекс-метод позволяет отыскать оптимальный целочисленный план, добавляя дополнительное ограничение (2.1.5) не к исходной системе (2.1.2), (2.1.3), а к полученному оптимальному нецелочисленному решению. Для этого запишем (2.1.5) как равенство

$$\sum_{j=m+1}^{n} \gamma_{ij}x_j - x_{n+1} = \gamma_{i0}. \tag{2.1.6}$$

Введением ограничения (2.1.6) мы увеличили размер базиса на единицу. Возьмем в качестве дополнительной базисной переменной x_{n+1} и запишем (2.1.6) в виде

$$-\gamma_{i0} = x_{n+1} - \sum_{j=m+1}^{n} \gamma_{ij}x_j. \tag{2.1.7}$$

Сформируем в оптимальной симплекс-таблице дополнительную строку, в которую запишем величины γ_{i0} и γ_{ij}, соответствующие (2.1.7). Получим некоторый псевдоплан с базисными компонентами x_{i0} и новой составляющей $x_{n+1} = -\gamma_{i0}$. Используя двойственный симплекс-метод, находим оптимальный план. Если в этом плане все компоненты x_{i0} — целые числа, задача решена, если нет — формируем следующее правильное отсечение по той переменной, значение которой нецелочисленное и т. д., до получения полностью целочисленного плана.

Для того чтобы иметь право после формирования правильного отсечения пользоваться двойственным симплекс-методом, исходную задачу необходимо привести к задаче на максимум. Это связано с тем, что двойственный симплекс-метод применим, если оценки в индексной строке положительны.

Пример 2.1.

$$\text{Найти} \quad \max F(x) = x_1 + 4x_2$$

$$\text{при условиях} \quad 2x_1 + 4x_2 \leqslant 7;$$

$$10x_1 + 3x_2 \leqslant 15;$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0;$$

$$x_1,\ x_2 \text{ — целые.}$$

Отбрасывая условия целочисленности, находим оптимальное решение симплекс-методом (табл. 2.1 и 2.2). Из табл. 2.2 получим оптимальное решение $X^{\text{опт}} = \left\{0, \frac{7}{4}\right\}$, $F_{\max} = 7$.

Данное решение не удовлетворяет условию целочисленности, поэтому формируем правильное отсечение:

$$\gamma_{i0} = x_{i0} - [x_{i0}], \quad \gamma_{20} = x_{20} - [x_{20}];$$

$$^7/_4 - 1 = {}^3/_4, \quad \gamma_{20} = {}^3/_4;$$

$$\gamma_{ij} = x_{ij} - [x_{ij}], \quad \gamma_{21} = {}^1/_2 - 0 = {}^1/_2, \quad \gamma_{23} = {}^1/_4 - 0 = {}^1/_4.$$

Таблица 2.1

C_i		0	1	4	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
0	x_3	7	2	$\boxed{4}$	1	0
0	x_4	15	10	3	0	1
	Δ	0	–1	–4	0	0

Таблица 2.2

C_i		0	1	4	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
4	x_2	7/4	1/2	1	1/4	0
0	x_4	39/4	34/4	0	–3/4	1
	Δ	7	1	0	1	0

Таблица 2.3

C_i		0	1	4	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
4	x_2	7/4	1/2	1	1/4	0	0
0	x_4	39/4	34/4	0	–3/4	1	0
0	x_5	–3/4	$\boxed{-1/2}$	0	–1/4	0	1
	Δ	7	1	0	1	0	0
	Θ	—	2	—	4	—	—

Таблица 2.4

C_i		0	1	4	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
4	x_2	1	0	1	0	0	1
0	x_4	–3	0	0	$\boxed{-5}$	1	17
1	x_1	3/2	1	0	1/2	0	–2
	Δ	11/2	0	0	1/2	0	2
	Θ	—	—	—	1/10	—	—

Таблица 2.5

c_i		0	1	4	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
4	x_2	1	0	1	0	0	1
0	x_3	3/5	0	0	1	–1/5	–17/5
1	x_1	12/10	1	0	0	1/10	–3/10
	Δ	52/10	0	0	0	1/10	37/10

Таблица 2.6

c_i		0	1	4	0	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
4	x_2	1	0	1	0	0	1	0
0	x_3	3/5	0	0	1	–1/5	–17/5	0
1	x_1	12/10	1	0	0	1/10	–3/10	0
0	x_6	–2/10	0	0	0	$\boxed{-1/10}$	–7/10	1
	Δ	52/10	0	0	0	1/10	37/10	0
		–	–	–	–	1	37/7	–

Таблица 2.7

c_i		0	1	4	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
4	x_2	1	0	1	0	0
0	x_3	1	0	0	1	0
1	x_1	1	1	0	0	0
0	x_4	2	0	0	0	1
	Δ	5	0	0	0	0

Запишем правильное отсечение $-\frac{3}{4} = x_5 - \frac{1}{2}x_1 - \frac{1}{4}x_3$ и, сформировав дополнительную строку, запишем все результаты в табл. 2.3.

В табл. 2.4 и 2.5 приводятся результаты отыскания плана задачи с помощью двойственного симплекс-метода. В табл. 2.5 представлен новый оптимальный план, в котором опять один компонент x_1 не является целым. По строке x_1 формируем новое правильное отсечение:

$$\gamma_{10} = x_{10} - [x_{10}] = {}^{12}/_{10} - 1 = {}^{2}/_{10}, \quad \gamma_{10} = {}^{2}/_{10};$$
$$\gamma_{14} = x_{14} - [x_{14}] = {}^{1}/_{10} - 0 = {}^{1}/_{10}, \quad \gamma_{14} = {}^{1}/_{10};$$
$$\gamma_{15} = x_{15} - [x_{15}] = -{}^{3}/_{10} - (-1) = {}^{7}/_{10}, \quad \gamma_{15} = {}^{7}/_{10}.$$

Запишем правильное отсечение: $-\frac{2}{10} = x_6 - \frac{1}{10}x_4 - \frac{7}{10}x_5$ и, сформировав дополнительную строку, получим табл. 2.6.

В табл. 2.7 приводится искомое решение:

$$X^{\text{опт}} = \{1;\ 1\}; \quad F_{\max} = 5.$$

2.2. МЕТОД ВЕТВЕЙ И ГРАНИЦ В ЗАДАЧАХ ЛЦП

Реализация этого метода состоит в последовательном ветвлении исходного множества решений на дерево подмножеств с нахождением решений на всех подмножествах, пока не получим искомое.

Пусть необходимо отыскать максимум

$$F(X) = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j \tag{2.2.1}$$

при ограничениях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j \leq b_i, \quad i = 1, \ldots, m; \tag{2.2.2}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n; \tag{2.2.3}$$

$$x_j \text{ — целые}, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{2.2.4}$$

Искомое решение задачи (2.2.1) — (2.2.4) будет найдено на множестве, соответствующем висячей вершине с максимально возможной оценкой. Уточним, что множество, на котором получено оптимальное целочисленное решение, ветвлению не подлежит. Ему соответствует концевая, или висячая вершина дерева решений.

Как в методе отсекающих плоскостей, процесс начинается с решения непрерывной задачи ЛП. Если полученный план $X^{\text{опт}}$ не удовлетворяет условию (2.2.4), то значение целевой функции $\xi_0 = F(X^{\text{опт}})$ дает верхнюю оценку искомого решения на множестве $G^{(0)}$, определенном условиями (2.2.2), (2.2.3). Если некоторая переменная не получила целочисленного значения, то в целочисленном плане ее следует либо уменьшить до $[x_{i0}]$, либо увеличить до $[x_{i0}] + 1$.

Таким образом исходное множество $G^{(0)}$ разбиваем на два непересекающихся подмножества:

$$G^{(0)} = G_1^{(1)} \cup G_2^{(1)};$$

$$G_1^{(1)} = \{X/X \in G^{(0)},\ x_i \leqslant [x_{i0}]\}; \tag{2.2.5}$$

$$G_2^{(1)} = \{X/X \in G^{(0)},\ x_i \geqslant [x_{i0}] + 1\}. \tag{2.2.6}$$

Находим решения и оценки на множествах (2.2.5) и (2.2.6). Если решения, полученные на $G_1^{(1)}$ и $G_2^{(1)}$, целочисленные, то оптимальным будет то, у которого оценка ξ — большая. Если же, допустим, на множестве $G_1^{(1)}$ получено целочисленное решение, а на $G_2^{(1)}$ — нецелочисленное, но $\xi(G_2^{(1)}) > \xi(G_1^{(1)})$, продолжаем ветвление множества $G_2^{(1)}$, так как на следующем этапе мы можем получить целочисленное решение, оценка которого будет больше, чем оценка $\xi(G_1^{(1)})$.

Построение дерева решений продолжается до тех пор, пока не будет найдено решение задачи (2.2.1) — (2.2.4), полученное на множестве, соответствующем висячей вершине с максимально возможной оценкой.

Пример 2.2.

$$\text{Найти} \quad \max F(X) = 2x_1 + 3x_2 \tag{2.2.7}$$

при условиях

$$x_1 + 4x_2 \leqslant 14; \tag{2.2.8}$$

$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 12; \tag{2.2.9}$$

$$x_1,\ x_2 \geqslant 0,$$

$$x_1,\ x_2 \text{ — целые.} \tag{2.2.10}$$

Таблица 2.8

c_i		0	2	3	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
3	x_2	16/5	0	1	2/5	−1/5
2	x_1	6/5	1	0	−3/5	4/5
	Δ	12	0	0	0	1

Ш а г 0. Отбрасывая условие целочисленности, любым методом отыскиваем оптимальное решение на исходном множестве $G^{(0)}$, определяемом (2.2.8), (2.2.9).

В табл. 2.8 представлено решение. Верхняя оценка на множестве $G^{(0)}$ равна $\xi(G^{(0)}) = 12$. Так как решение нецелочисленное, приступаем к первому шагу.

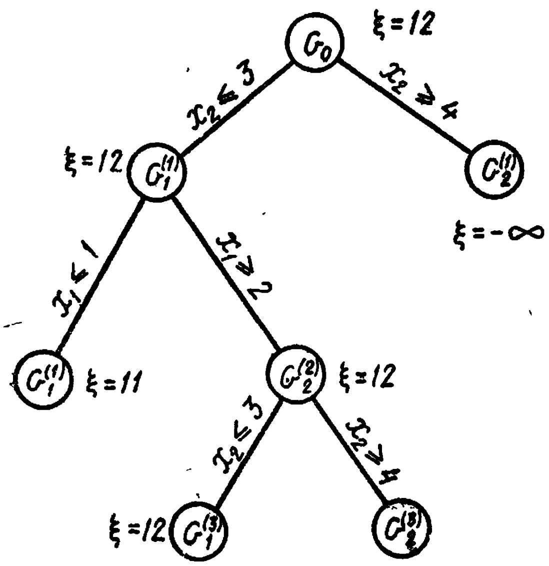

Рис. 2.1

Ш а г 1. Разбиваем исходное множество $G^{(0)}$ на 2 подмножества (рис. 2.1):

$$G_1^{(1)} = \left\{X/X \in G^{(0)},\ x_2 \leqslant \left[\frac{16}{5}\right]\right\};$$

$$G_2^{(1)} = \left\{X/X \in G^{(0)},\ x_2 \geqslant \left[\frac{16}{5}\right] + 1\right\}$$

и находим решение и оценки на этих множествах.

Для отыскания решения на множествах $G_1^{(1)}$ и $G_2^{(1)}$ дописываем ограничения $x_2 \leqslant 3$ и $x_2 \geqslant 4$ к решению, найденному на множестве $G^{(0)}$. Для этого дополнительные ограничения представим в расширенной форме:

$$x_2 \leqslant 3 \to x_2 + x_5 = 3; \tag{2.2.11}$$

$$x_2 \geqslant 4 \to x_2 - x_5^1 = 4 \to -x_2 + x_5^1 = -4 \tag{2.2.12}$$

Таблица 2.9

C_i		0	2	3	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
3	x_2	16/5	0	1	2/5	−1/5	0
2	x_1	6/5	1	6	−3/5	4/5	0
	Δ	12	0	0	0	1	0
	x_5	3	6	1	0	0	1
	$\widetilde{x}_5$	−1/5	0	0	$\boxed{-2/5}$	1/5	1
	Θ	—	—	—	0	—	—

Таблица 2.10

C_i		0	2	3	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
3	x_2	16/5	0	1	2/3	−1/5	6
2	x_1	6/5	1	0	−3/5	4/5	0
	Δ	12	0	6	0	1	0
	x'_5	−4	0	−1	0	0	1
	$\widetilde{x}'_5$	−4/5	0	0	2/5	$\boxed{-1/5}$	1
	Θ	—	—	—	—	5	—

Таблица 2.11

C_i		0	2	3	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
3	x_2	3	0	1	0	6	1
2	x_1	3/2	1	0	0	1/2	−3/2
0	x_3	1/2	0	6	1	−1/2	−5/2
—	Δ	12	0	0	0	1	0

Таблица 2.12

C_i		0	2	3	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5
3	x_2	4	0	1	0	0	1
2	x_1	–2	1	0	0	0	5
0	x_4	4	0	0	–2	1	–5
	Δ	8	0	0	0	0	13

Таблица 2.13

C_i		0	2	3	0	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
3	x_2	3	0	1	0	0	1	0
2	x_1	3/2	1	0	0	1/2	–3/2	0
0	x_3	1/2	0	6	1	–1/2	–5/2	0
	Δ	12	0	6	0	1	0	0
	x_6	1	1	0	0	0	0	1
	$\tilde{x}_6$	–1/2	0	0	0	– 1/2	3/2	1
	Θ	—	—	—	—	2	—	—

Таблица 2.14

C_i		0	2	3	0	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6
3	x_2	3	0	1	0	0	1	0
2	x_1	3/2	1	0	0	1/2	1	6
0	x_3	1/2	0	0	1	–1/2	–3/2	0
	Δ	12	6	0	0	1	–5/2	0
	x_6	–2	– 1	0	0	0	0	1
←	$\tilde{x}'_6$	–1/2	0	0	0	1/2	–3/2	1
	Θ	—	—	—	—	—	5/3	—

Эти ограничения дописываем к множеству $G^{(0)}$ в виде строки, используя в качестве еще одной базисной переменной x_5 или x_5', и заполняем табл. 2.9 и 2.10 соответственно. Вследствие введения строки x_5 переменная x_2 перестала быть базисной, поэтому вместо x_5 записываем строку $\tilde{x}_5$, представляющую собой линейную комбинацию строки x_2 и строки x_5. В результате этого x_2 сохраняется в базисе, и для дальнейшего решения мы имеем возможность использовать двойственный симплекс-метод.

Таблица 2.15

c_i		0	2	3	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4
3	x_2	3	0	1	0	0
2	x_1	1	1	0	0	0
0	x_3	1	0	6	1	0
0	x_4	1	0	0	0	1
	Δ	11	0	0	0	0

В табл. 2.9 из строки x_5 вычли строку x_2 и получили строку $\tilde{x}_5$, а в табл. 2.10 соответственно складываем строки x_2 и $\tilde{x}_5'$ и записываем новую строку $\tilde{x}_5'$.

Решения на множестве $G_1^{(1)}$ и $G_2^{(1)}$ представлены соответственно в табл. 2.11 и 2.12. Множество $G_2^{(1)}$ оказалось пустым и оценка $\xi\,(G_2^{(1)}) = \infty$. Оценка $\xi\,(G_1^{(1)}) = 12$. На этом первый шаг заканчивается.

Шаг 2. Разбиваем множество $G_1^{(1)}$ на два подмножества:

$$G_1^{(2)} = \{X/X \in G_1^{(1)},\ x_1 \leqslant [^3/_2]\};$$

$$G_2^{(2)} = \{X/X \in G_1^{(1)},\ x_1 \geqslant [^3/_2] + 1\}.$$

Далее, поступив так, как на первом шаге, дописываем

$$x_1 \leqslant 1 \rightarrow x_1 + x_6 = 1$$

и

$$x_1 \geqslant 2 \rightarrow x_1 - x_6 = 2 \rightarrow -x_1 + x_6 = -2$$

к множеству $\vec{G}_1^{(1)}$ и заполняем соответственно табл. 2.13 и 2.14. Решения, полученные на множествах $G_1^{(2)}$ и $G_2^{(2)}$, представлены соответственно в табл. 2.15 и 2.16.

Решение на множестве $G_1^{(2)}$ удовлетворяет условию целочисленности. Оценка $\xi\,(G_1^{(2)}) = 11$. Решение, полученное на множестве $G_2^{(2)}$, не является целочисленным, но оценка $\xi\,(G_2^{(2)}) = 12$ и $\xi\,(G_2^{(2)}) >$

$> \xi(G_1^{(2)})$, поэтому будем разбивать множество $G_2^{(2)}$ дальше, так как можно получить решение с оценкой большей, чем $\xi(G_1^{(2)})$.

Шаг 3. Разбиваем $G_2^{(2)}$ на два подмножества:

$$G_1^{(3)} = \left\{X/X \in G_2^{(2)},\ x_2 \leqslant \left[\frac{8}{3}\right]\right\};$$

$$G_2^{(3)} = \left\{X/X \in G_2^{(2)},\ x_2 \geqslant \left[\frac{8}{3}\right] + 1\right\}.$$

Таблица 2.16

c_i		0	2	3	0	0	0	0	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	A_5	A_6	A_7
3	x_2	8/3	6	1	6	1/3	0	2/3	0
2	x_1	2	1	0	0	0	0	−1	0
0	x_3	4/3	0	0	1	−4/3	0	−5/3	0
0	x_5	1/3	0	0	0	−1/3	1	−2/3	0
	Δ	12	0	0	0	1	0	0	0
	x_7	2	0	0	0	0	0	0	1
	$\tilde{x}_7$	−2/3	0	1	0	−1/3	0	$\boxed{-2/3}$	1
	Θ	—	—	—	—	3	—	0	—

Таблица 2.17

c_i		0	2	3	0
	B_x	A_0	A_1	A_2	A_3
3	x_2	2	0	1	0
2	x_1	3	1	0	0
0	x_3	3	0	0	1
0	x_5	1	0	0	0
0	x_6	1	0	0	0
	Δ	12	0	0	0

Дописываем ограничение $x_2 \leqslant 2 \rightarrow x_2 + x_7$ в табл. 2.16 и найдем решение на множестве $G_1^{(3)}$. Решение представлено в табл. 2.17.

На множестве $G_1^{(3)}$ получено целочисленное решение и $\xi(G_1^{(3)}) = 12$. Дальнейшие вычисления прекращаются, так как не может быть решения с лучшей оценкой, ибо $\xi(G^{(0)}) \geqslant \xi(G_1^{(k)})$, а $\xi(G^{(0)}) = 12$. Итак, задача решена: $X^{опт} = \{3, 2\}$, $F_{max} = 12$.

Найти решение следующих задач линейного целочисленного программирования.

2.1. $F = x_1 + 4x_2 \to \max;$
$2x_1 + 4x_2 \leqslant 17,$
$10x_1 + 3x_2 \leqslant 15,$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0,$
$x_1,\ x_2$ — целые.

2.2. $F = 2x_1 + x_2 \to \max;$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 16,$
$x_1 + 2x_2 \geqslant 2,$
$2x_1 + x_2 \leqslant 16,$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0;$
$x_1,\ x_2$ — целые.

2.3. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$2x_1 + 2x_2 \leqslant 7,$
$4x_1 - 5x_2 \leqslant 9,$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0,$
$x_1,\ x_2$ — целые.

2.4. $F = 8x_1 + 6x_2 \to \max;$
$3x_1 + 5x_2 \leqslant 11,$
$4x_1 + x_2 \leqslant 8,$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0,$
$x_1,\ x_2$ — целые.

2.5. $F = 8x_1 + 6x_2 \to \max;$
$2x_1 + 5x_2 \leqslant 12,$
$4x_1 + x_2 \leqslant 10,$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0,$
$x_1,\ x_2$ — целые.

2.6. $F = x_1 + 4x_2 \to \max;$
$2x_1 + 4x_2 \leqslant 7,$
$10x_1 + 3x_2 \leqslant 15,$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0,$
$x_1,\ x_2$ — целые.

2.7. $F = x_1 + 2x_2 \to \max;$
$5x_1 + 7x_2 \leqslant 21,$
$-x_1 + 3x_2 \leqslant 8,$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0,$
$x_1,\ x_2$ — целые.

2.8. $F = 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \to \min;$
$2x_1 + 4x_2 \geqslant 10,$
$2x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geqslant 10,$
$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0,$
$x_1,\ x_2,\ x_3$ — целые.

2.9. $F = x_1 + x_2 \to \max;$
$6x_1 + 5x_2 \leqslant 20,$
$2x_1 + 3x_2 \leqslant 10,$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0;$
$x_1,\ x_2$ — целые.

2.10. $F = x_1 + 2x_2 \to \min;$
$2x_1 + 9x_2 \leqslant 36,$
$x_1 + x_2 \leqslant 7,$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0;$
$x_1,\ x_2$ — целые.

2.11. $F = 8x_1 + 6x_2 \to \max;$
$2x_1 + 5x_2 \leqslant 11;$
$4x_1 + x_2 \leqslant 10,$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0;$
$x_1,\ x_2$ — целые.

2.12. $F = x_1 + x_2 \to \max;$
$2x_1 + x_2 \leqslant 18,$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 16,$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0;$
$x_1,\ x_2$ — целые.

2.13. $F = x_1 + x_2 \to \max;$
$x_1 + 2x_2 \leqslant 10,$
$x_1 + 2x_2 \geqslant 2,$
$2x_1 + x_2 \leqslant 10,$
$x_1,\ x_2 \geqslant 0;$
$x_1,\ x_2$ — целые.

2.14. $F = 5x_1 + 6x_2 + 6x_3 \to \min;$
$2x_1 + 4x_2 \geqslant 10,$
$3x_1 + 2x_2 + 2x_3 \geqslant 8,$
$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0;$
$x_1,\ x_2,\ x_3$ — целые.

2.15. $F = 2x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 12, \\ 4x_1 + x_2 &\geqslant 10, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0, \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.16. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 + 4x_2 &\leqslant 14, \\ 2x_1 + 3x_2 &\geqslant 12, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0; \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.17. $F = x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\leqslant 5, \\ x_2 &\leqslant 2, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0, \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.18. $F = x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 20x_1 + 10x_2 &\leqslant 75, \\ 12x_1 + 7x_2 &\leqslant 55, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0; \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.19. $F = 5x_1 + 3x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 3x_1 + 5x_2 &\leqslant 15, \\ 5x_1 + 2x_2 &\leqslant 1, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0; \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.20. $F = 5x_1 - 3x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 3x_1 + 2x_2 &\geqslant 6, \\ 2x_1 - 3x_2 &\geqslant -6, \\ x_1 - x_2 &\leqslant 4, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0; \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.21. $F = 6x_1 + 4x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geqslant 3, \\ x_1 - x_2 &\geqslant 1, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0; \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.22. $F = 2x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 11, \\ 4x_1 + x_2 &\leqslant 10, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0; \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.23. $F = x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + 11x_2 &\leqslant 38, \\ x_1 + x_2 &\leqslant 7, \\ 4x_1 - 5x_2 &\leqslant 5; \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0, \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.24. $F = 4x_1 + 4x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 5, \\ 2x_1 + x_2 &\leqslant 9; \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0; \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.25. $F = 2x_1 - x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\leqslant 8, \\ x_1 + 3x_2 &\geqslant 6, \\ 3x_1 + x_2 &\geqslant 3, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0: \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.26. $F = x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 6x_1 + 5x_2 &\leqslant 20, \\ 2x_1 + 3x_2 &\leqslant 10, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0; \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.27. $F = 7x_1 - 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 5, \\ 2x_1 - 3x_2 &\leqslant 6, \\ 3x_1 + x_2 &\geqslant 2, \\ x_1 - x_2 &\geqslant -3, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0; \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.28. $F = x_1 - 3x_2 + 3x_3 \to \max;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 - x_3 &\leqslant 4, \\ 4x_1 - 3x_2 &\leqslant 2, \\ -3x_1 + 2x_2 &\leqslant 3, \\ x_1, \quad x_2 &\geqslant 0; \\ x_1, \quad x_2, \quad x_3 &\text{ — целые} \end{aligned}$$

2.29. $F = 6x_1 + 4x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 &\geq 3, \\ x_1 - x_2 &\leq 1, \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0; \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.30. $F = 2x_1 + x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} 7x_1 + 4x_2 &\leq 28, \\ -x_1 + 2x_2 &\leq 14, \\ 5x_1 + 2x_2 &\geq 10, \\ 4x_1 - 3x_2 &\leq 12, \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0, \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.31. $F = 8x_1 + 2x_2 \to \max;$
$$\begin{aligned} x_1 - 4x_2 &\leq 4, \\ -4x_1 + x_2 &\leq 4, \\ x_1 + x_2 &\leq 6, \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0 \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

2.32. $F = 2x_1 + 3x_2 \to \min;$
$$\begin{aligned} x_1 + 2x_2 &\geq 16, \\ 2x_1 + x_2 &\geq 16, \\ x_1, \quad x_2 &\geq 0; \\ x_1, \quad x_2 &\text{ — целые.} \end{aligned}$$

Глава 3

НЕЛИНЕЙНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

3.1. МЕТОД МНОЖИТЕЛЕЙ ЛАГРАНЖА

Нелинейное программирование — это математический аппарат для поиска экстремума нелинейных функций при наличии ограничений.

Задача нелинейного программирования (НП) в общем виде записывается так:

$$\text{найти } \max f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (3.1.1)$$

при условиях

$$\begin{aligned} &g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0; \\ &g_2(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) \geq 0, \end{aligned} \qquad (3.1.2)$$

где $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и/или ограничения $g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — нелинейные функции переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. В отличие от линейного программирования в нелинейном программировании отсутствуют универсальные методы решения типа симплекс-метода. Это связано с тем, что допустимое множество решений $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, определяемое условиями (3.1.2), в общем случае не является выпуклым, а, кроме того, даже в случае выпуклости $R(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ множество его крайних точек не будет конечным.

В связи с указанными обстоятельствами методы НП разрабатываются лишь под специальные классы задач.

Метод множителей Лагранжа позволяет отыскивать максимум или минимум функции $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ при ограничениях-равенствах. Основная идея метода заключается в переходе от задачи на условный экстремум к задаче отыскания безусловного экстремума некоторой специально построенной функции Лагранжа.

Пусть требуется найти

$$\min f(x_1, x_2, \ldots, x_n) \qquad (3.1.3)$$

при ограничениях

$$\begin{aligned} &g_1(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0; \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ &g_m(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0. \end{aligned} \qquad (3.1.4)$$

Предположим, что функции f, g_1, g_2, ..., g_m дифференцируемы. Введем набор переменных $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m$ по числу ограничений, которые называются множителями Лагранжа, и составим так называемую функцию Лагранжа следующего вида:

$$L(x_1, x_2, \ldots, x_n; \lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m) =$$
$$= f(x_1, x_2, \ldots, x_n) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(x_1, x_2, \ldots, x_n). \qquad (3.1.5)$$

Для того чтобы вектор $X_0 = \{x_j^0\}$, $j = \overline{1, n}$, являлся решением задачи (3.1.3) — (3.1.4), необходимо существование такого вектора $\Lambda_0 = \{\lambda_1^0, \lambda_2^0, ..., \lambda_m^0\}$, чтобы пара векторов (X_0, Λ_0) удовлетворяла системе уравнений

$$\frac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial x_j} = 0, \quad j = \overline{1, n}; \qquad (3.1.6)$$

$$\frac{\partial L(X_0, \Lambda_0)}{\partial \lambda_i} = g_i(X_0) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \qquad (3.1.7)$$

Таким образом, метод множителей Лагранжа состоит из следующих шагов.
Шаг 1. Составляем функцию Лагранжа вида (3.1.5).
Шаг 2. Составляем систему нелинейных уравнений (3.1.6) — (3.1.7).
Шаг 3. Находим ее решения (X_s^*, Λ_s^*) и исследуем функцию $f(X)$ в окрестности точек X_s^* на максимум (минимум).

Пример 3.1. Найти условный экстремум следующей НП-задачи $\min (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2$ при условии $x_1 + x_2 = 7$.

Составим функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda) = (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 3)^2 + \lambda(7 - x_1 - x_2).$$

Уравнения (3.1.5) — (3.1.7) в данном случае принимают вид:

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_1} = 2(x_1 - 2) - \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L(x_1, x_2, \lambda)}{\partial x_2} = 2(x_2 - 3) - \lambda = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda} = 7 - x_1 - x_2 = 0$$

Решая эту систему, легко находим ее корни: $x_1^0 = 3$, $x_2^0 = 4$, $\lambda^0 = 2$. Далее исследуем характер функции $f(x_1, x_2)$ в окрестности точки $(x_1^0 = 3, x_2^0 = 4)$.

Находим

$$f_{11} = \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1^2} = 2 > 0; \quad \frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_2^2} = 2 > 0;$$

$$\frac{\partial^2 f(X^0)}{\partial x_1 \partial x_2} = f_{12} = f_{21} = 0.$$

Так как $f_{11}(X^0) > 0$ и $\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} > 0$, то функция выпукла, и в точке X^0 имеем абсолютный минимум.

Пример 3.2. Найти условный экстремум функции $f(\mathbf{X})$ методом множителей Лагранжа для следующей задачи:

$$f(\mathbf{X}) = x_1 x_2 x_3$$

при условиях

$$x_1 + x_2 + x_3 = 6;$$

$$x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3 = 12.$$

Составляем функцию Лагранжа

$$L(\mathbf{X}, \Lambda) = f(x_1, x_2, x_3) + \lambda_1 (6 - x_1 - x_2 - x_3) + $$
$$+ \lambda_2 (12 - x_1 x_2 - x_1 x_3 - x_2 x_3).$$

Составляем систему уравнений:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} = x_2 x_3 - \lambda_1 - \lambda_2 (x_2 + x_3) = 0; \qquad (3.1.8)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} = x_1 x_3 - \lambda_1 - \lambda_2 (x_1 + x_3) = 0; \qquad (3.1.9)$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} = x_1 x_2 - \lambda_1 - \lambda_2 (x_1 + x_2) = 0; \qquad (3.1.10)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_1} = 6 - (x_1 + x_2 + x_3) = 0; \qquad (3.1.11)$$

$$\frac{\partial L}{\partial \lambda_2} = 12 - (x_1 x_2 + x_1 x_3 + x_2 x_3) = 0. \qquad (3.1.12)$$

Сложив первые три уравнения с учетом (3.1.11) и (3.1.12), получим

$$x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_2 - 3\lambda_1 - 2\lambda_2 (x_1 + x_2 + x_3) = 0,$$

или

$$12 - 3\lambda_1 - 12\lambda_2 = 0;$$

$$\lambda_1 + 4\lambda_2 = 4;$$

$$\lambda_2 = \frac{1}{12}(4 - \lambda_1).$$

Умножим первое уравнение на x_1, второе на x_2, а третье на x_3 и получим:

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} x_1 = x_1 x_2 x_3 - \lambda_1 x_1 - \lambda_2 (x_1 x_2 + x_1 x_3)) = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_2} x_2 = x_1 x_2 x_3 - \lambda_1 x_2 - \lambda_2 (x_1 x_2 + x_2 x_3) = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_3} x_3 = x_1 x_2 x_3 - \lambda_1 x_3 - \lambda_2 (x_3 x_1 + x_3 x_2) = 0;$$

$$\frac{\partial L}{\partial x_1} x_1 + \frac{\partial L}{\partial x_2} x_2 + \frac{\partial L}{\partial x_3} x_3 = 3 x_1 x_2 x_3 - \lambda_1 (x_1 + x_2 + x_3) -$$
$$- 2\lambda_2 (x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3) = 3 x_1 x_2 x_3 - 6\lambda_1 - 24\lambda_2 = 0;$$

$$x_1x_2x_3 - 2\lambda_1 - 8\lambda_2 = 0;$$
$$x_1x_2x_3 = 2(\lambda_1 + 4\lambda_2) = 8.$$

Итак, получаем следующую систему:

$$x_1x_2x_3 = 8; \qquad (3.1.13)$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 6; \qquad (3.1.14)$$
$$x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3 = 12. \qquad (3.1.15)$$

Ее вещественное решение $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 2$. Определим характер функции $f(x_1, x_2, x_3)$ в окрестности $X_0 = (2; 2; 2)$:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} = 0; \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x_3^2} = 0; \quad f_{12} = f_{21} = f_{31} = 2.$$

Исследуем $f(x_1, x_2, x_3)$ на выпуклость-вогнутость

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} = 0, \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = -4 < 0;$$

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} & f_{13} \\ f_{21} & f_{22} & f_{23} \\ f_{31} & f_{32} & f_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 2 & 0 & 2 \\ 2 & 2 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 0 - 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} + 2\begin{vmatrix} 2 & 2 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} = 16 > 0.$$

Так как знаки определителей чередуются, то функция $f(x_1, x_2, x_3)$ вогнута, и в точке X_0 ($x_1^0 = 2$; $x_2^0 = 2$; $x_3^0 = 2$) — максимум.

Решить задачи нелинейного программирования методом множителей Лагранжа.

3.1. Определить условные экстремумы функций в следующих задачах методом Лагранжа, сопроводив решение графической иллюстрацией:

1) $z = x^2 + y^2$ при $x + y = 1$;
2) $z = 3x^2 + 2y^2 - 3x + 1$ при $x^2 + y^2 = 4$;
3) $z = 2(x-1)^2 + 3(y-3)^2$ в области $x + y \leqslant 10$ при $x + y = 6$, $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$;
4) $z = x^2 - y^2$ при $x - y = 4$;
5) $z = (x-3)^2 + (y-5)^2$ при $y - 2x = 5$.

3.2. Методом множителей Лагранжа определить стационарные точки функции $z = f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ и исследовать их характер:

1) $z = x_1 + x_2 + x_3$ при $\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3} = 1$;
2) $z = \frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2}$ при $\frac{1}{x_1^2} + \frac{1}{x_2^2} = 1$;
3) $z = x_1x_2x_3x_4$ при $x_1 + x_2 + x_3x_4 = 4$;
4) $z = 2x_1 + 3x_2^2 + x_3^2$ при $x_1 + x_2 + x_3 = 8$ и $x_1 \geqslant 0$, $x_2 \geqslant 0$, $x_3 \geqslant 0$.

3.2. ТЕОРЕМА КУНА — ТАККЕРА В НЕЛИНЕЙНОМ ПРОГРАММИРОВАНИИ

Имеется задача НП в общем случае ограничений-неравенств:

$$\min f(\mathrm{X}) \qquad (3.2.1)$$

при условиях

$$g_i(\mathrm{X}) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m}. \qquad (3.2.2)$$

Допустим, что функция $f(\mathrm{X})$ и все $g_i(\mathrm{X})$, $i = \overline{1, m}$ выпуклы по X. Такая задача носит название задачи выпуклого программирования и множество решений $R(\mathrm{X})$, определяемое условиями (3.2.2), является выпуклым. Для задачи (3.2.1) — (3.2.2) справедлива следующая теорема Куна — Таккера [7].

Теорема 3.1. *Пусть f, $g_i(\mathrm{X})$, $i = \overline{1, m}$ обладают непрерывными частными производными на некотором открытом множестве R^n, содержащем X^*. Если X^* является точкой минимума $f(\mathrm{X})$ при ограничениях $g_i(\mathrm{X}) \leqslant 0$, $i = \overline{1, m}$, удовлетворяющих некоторому дополнительному условию регулярности, то существуют такие неотрицательные множители Лагранжа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$, для которых выполняются следующие условия:*

$$\nabla f(\mathrm{X}^*) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\mathrm{X}^*) = 0; \qquad (3.2.3)$$

$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathrm{X}^*) = 0, \qquad (3.2.4)$$

где (3.2.4) — условие дополняющей нежесткости.

Если функции $f(\mathrm{X})$ и $g_i(\mathrm{X})$ — выпуклы по X, то условия оптимальности (3.2.3) и (3.2.4) будут не только необходимыми, но и достаточными [7]. В этом случае условие существования решения X и Λ, удовлетворяющего (3.2.3) и (3.2.4), которое называют условием регулярности, примет вид

$$\exists X, \quad g(\mathrm{X}) < 0, \text{ для всех } i = \overline{1, m}.$$

Пользуясь теоремой Куна — Таккера, задачу НП решают так:

Шаг 1. Составляют функцию Лагранжа $L(\mathrm{X}, \Lambda) = f(\mathrm{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathrm{X})$.

Шаг 2. Составляют систему уравнений вида (3.2.3) — (3.2.4).

Шаг 3. Находят ее решение $(\mathrm{X}^*, \Lambda^*)$. Заметим, что в отличие от задачи с ограничениями-равенствами вектор Λ^* должен в этом случае удовлетворять условию неотрицательности.

Применение теоремы Куна — Таккера для задач выпуклого и вогнутого программирования

Выше была рассмотрена НП-задача (3.2.1) — (3.2.2), когда на переменные $\{x_j\}$ не накладывались условия неотрицательности. Часто в задачах исследования операций приходится решать задачи, в которых переменные x_j должны удовлетворять условию $x_j \geqslant 0$ для всех $j = \overline{1, n}$.

Основные положения теории могут быть легко распространены на этот случай. Действительно, пусть НП-задача записана в виде:

$$\text{найти } \min f(\mathrm{X}) \qquad (3.2.5)$$

при условиях

$$g_i(\mathrm{X}) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m}; \qquad (3.2.6)$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n}. \qquad (3.2.7)$$

Введем обозначения $x_j = -h_j$ (X).

Тогда ограничения (3.2.7) можно записать в общем виде:

$$h_j(\mathrm{X}) \leqslant 0, \quad j = \overline{1, n}.$$

Задача теперь оказывается заданной в каноническом виде (3.2.1) — (3.2.2). Применим к ней теорему Куна — Таккера, для чего составим функцию Лагранжа

$$L(\mathrm{X}, \Lambda, \mathrm{U}) = f(\mathrm{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i g_i(\mathrm{X}) + \sum_{j=1}^{n} u_j h_j(\mathrm{X}), \tag{3.2.8}$$

где $u_j \geqslant 0$ множители, связанные с ограничениями (3.2.7). Условия теоремы Куна — Таккера для (3.2.8) выглядят так:

$$\nabla L(\mathrm{X}, \Lambda, \mathrm{U}) = \nabla f(\mathrm{X}) + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \nabla g_i(\mathrm{X}) + \sum_{j=1}^{n} u_j \nabla h_j(\mathrm{X}) = 0 \tag{3.2.9}$$

или

$$\frac{\partial L(\mathrm{X}, \Lambda, \mathrm{U})}{\partial x_j} = \frac{\partial f(\mathrm{X})}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{n} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathrm{X})}{\partial \mathrm{X}_j} - u_j = 0, \quad j = \overline{1, n}; \tag{3.2.10}$$

$$u_j x_j = 0, \quad u_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n}; \tag{3.2.11}$$

$$\lambda_i g_i(\mathrm{X}) = 0, \quad \lambda_i \geqslant 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.2.12}$$

Условия (3.2.10) и (3.2.11) можно записать в следующей эквивалентной форме:

$$\frac{\partial L(\mathrm{X}, \Lambda)}{\partial x_j} = \frac{\partial f}{\partial x_j} + \sum_{i=1}^{m} \lambda_i \frac{\partial g_i(\mathrm{X})}{\partial x_j} = u_j \geqslant 0; \tag{3.2.13}$$

$$\frac{\partial L(\mathrm{X}, \Lambda)}{\partial x_j} x_j^0 = 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.2.14}$$

Нетрудно увидеть, что условия (3.2.14) представляют собой условия дополняющей нежесткости для ограничений неотрицательности. Таким образом, получили необходимые условия для оптимального решения задачи НП вида (3.2.1—3.2.2), которые могут быть сформулированы в следующей теореме.

Теорема 3.2. *Пусть* НП-*задача имеет вид* (3.2.5) — (3.2.7), *а функции* f (X) *и* g_1 (X), ..., g_m (X) *дифференцируемы и выпуклы по* X. *Вектор* $\mathrm{X}_0 \geqslant 0$ *является оптимальным решением задачи тогда и только тогда, когда существует такой вектор* $\Lambda^0 \geqslant 0$, *что пара* (X^0, Λ^0) *является седловой точкой функции Лагранжа* L (X, Λ), *т. е. выполняются следующие условия:*

$$\frac{\partial L(\mathrm{X}^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n}; \tag{3.2.15}$$

$$\frac{\partial L(\mathrm{X}^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} x_j = 0; \tag{3.2.16}$$

$$\frac{\partial L(\mathrm{X}^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = g_i(\mathrm{X}) \leqslant 0; \tag{3.2.17}$$

$$\lambda_i g_i(\mathrm{X}^0) = 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.2.18}$$

Задача (3.2.5) — (3.2.7) при условии, что f (X) и все g_i (X) — выпуклые функции, является задачей выпуклого программирования. Ограничения $g_i(\mathrm{X}) \leqslant 0$, $i = \overline{1, m}$, определяют выпуклое множество, и требуется найти минимум выпуклой функции f (X) на выпуклом множестве решений $R(\mathrm{X}) = \{\mathrm{X} : \mathrm{X} \geqslant 0;\ g_i(\mathrm{X}) \leqslant 0,\ i = \overline{1, m}\}$.

Рассмотрим задачу так называемого вогнутого программирования.

$$\text{Найти } \max f(X) \tag{3.2.19}$$

при условиях

$$g_1(X) \geqslant 0;$$
$$\cdots\cdots$$
$$g_m(X) \geqslant 0; \tag{3.2.20}$$

$$X = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\} \geqslant 0, \tag{3.2.21}$$

где функция $f(X)$ и все $g_i(X)$ вогнуты по X. Покажем ее эквивалентность задаче выпуклого программирования (3.2.15) — (3.2.17). Для этого обозначим $f'(X) = -f(X)$, $g_i'(X) = -g_i(X)$, и так как $\max f(X) \sim \min \{-f(X)\}$, то мы приходим к задаче

$$\min f'(X) \tag{3.2.22}$$

при условиях

$$g_i'(X) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m}; \tag{3.2.23}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.2.24}$$

Заметим, что все функции $f'(X)$, $g_i'(X)$ будут выпуклы по X, а потому задача (3.2.22) — (3.2.24) — это задача выпуклого программирования. Итак, эквивалентность задач (3.2.19—3.2.21) и (3.2.5) — (3.2.7) установлена.

Нетрудно получить соответствующие условия оптимальности для задачи вогнутого программирования, аналогичные условиям (3.2.15) — (3.2.18). Они формулируются следующим образом.

Пусть НП-задача имеет вид (3.2.19) — (3.2.21), функции $f(X)$, $g_i(X)$, $i = \overline{1, m}$,— дифференцируемы. *Для того чтобы* X_0 *являлся оптимальным решением этой задачи, необходимо существование такого вектора* $\Lambda^0 \geqslant 0$, *для которого выполняются условия:*

$$\frac{\partial L(X^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} \leqslant 0, \quad j = \overline{1, n}; \tag{3.2.25}$$

$$\frac{\partial L(X^0, \Lambda^0)}{\partial x_j} x_j^0 = 0, \quad j = \overline{1, n}; \tag{3.2.26}$$

$$\frac{\partial L(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} = g_i(X^0) \geqslant 0, \quad i = \overline{1, m}; \tag{3.2.27}$$

$$\frac{\partial L(X^0, \Lambda^0)}{\partial \lambda_i} \lambda_i^0 = 0, \quad i = \overline{1, m}; \tag{3.2.28}$$

Если функции $f(X)$ и $g_i(X)$ вогнуты, то эти условия (3.2.25) — (3.2.28) оказываются и достаточными.

Таким образом, для решения задачи вогнутого программирования необходимо найти совместное решение (X^0, Λ^0) системы уравнений (3.2.26), (3.2.28) и неравенств (3.2.25), (3.2.27).

3.3. КВАДРАТИЧНОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Частным случаем нелинейного программирования является квадратичное программирование, которое предназначено для решения специального класса задач НП, в которых целевая функция квадратичная, а все ограничения линейны. В матричном виде эта задача записывается так:

$$\text{найти } \max f(X) = B^T X + \frac{1}{2} X^T C X = \sum_{j=1}^{n} b_j x_j + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_i x_j \tag{3.3.1}$$

при ограничениях $\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{A}_0$, или $\mathbf{A}_0 - \mathbf{AX} \geqslant 0$, (3.3.2), где $\mathbf{C} = \| c_{ij} \|$, $i, j = \overline{1, n}$ симметричная, отрицательно определенная матрица,

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A}^{(m \times n)} = \| a_{ij} \|_{j=\overline{1,n}}^{i=\overline{1,m}}; \quad \mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} a_{10} \\ \vdots \\ a_{m0} \end{bmatrix}.$$

Заметим, что если C — отрицательно определенная матрица, то квадратичная форма $\mathbf{X}^{\mathrm{T}}\mathbf{CX}$ вогнута, и, следовательно, задача (3.3.1) — (3.3.2) является задачей вогнутого программирования.

Применив к задаче (3.3.1) — (3.3.2) теорему Куна — Таккера для вогнутого программирования, получим необходимые и достаточные условия оптимальности в виде следующей теоремы [7].

Вектор $\mathbf{X} \geqslant 0$ *является оптимальным решением задачи квадратичного программирования тогда и только тогда, когда существуют такие m-мерные векторы* Λ, $\mathbf{W} \geqslant 0$ *и n-мерный вектор* $\mathbf{V} \geqslant 0$, *что выполняются следующие условия:*

$$\mathbf{B} + \mathbf{CX} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\Lambda + \mathbf{V} = 0; \tag{3.3.3}$$

$$\mathbf{A}_0 - \mathbf{AX} - \mathbf{W} = 0; \tag{3.3.4}$$

$$\mathbf{V}^{\mathrm{T}}\mathbf{X} = 0; \tag{3.3.5}$$

$$\mathbf{W}^{\mathrm{T}}\Lambda = 0. \tag{3.3.6}$$

Условия (3.3.3) — (3.3.4) образуют систему из $n + m$ линейных уравнений с $2(n + m)$ неизвестными (векторы $\mathbf{X}$, Λ, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$). Условия (3.3.5) — (3.3.6) — это условия дополняющей нежесткости, которые накладывают дополнительные ограничения на переменные $\mathbf{X}$, Λ, $\mathbf{V}$, $\mathbf{W}$, а именно: если $x_j^0 > 0$, то $v_j^0 = 0$; и наоборот, если $x_j^0 = 0$, то $v_j^0 \geqslant 0$; если $\lambda_i > 0$, то $w_i^0 = 0$, $i = \overline{1, m}$, и наоборот.

В силу этих условий искомое решение системы (3.3.3) — (3.3.4) должно быть одним из допустимых базисных, и для его отыскания можно применить любой из известных методов ЛП, в частности метод искусственных переменных.

С этой целью запишем систему (3.3.3) — (3.3.4) в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{CX} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\Lambda + \mathbf{V} &= -\mathbf{B}; \\ \mathbf{AX} + \mathbf{W} &= \mathbf{A}_0. \end{aligned} \tag{3.3.7}$$

Введем искусственные переменные $z = \{z_1, z_2, \ldots, z_n\}$, $\mathbf{Y} = \{y_1, \ldots, y_m\}$ в ограничения (3.3.7), выбрав их одинакового знака со знаком соответствующих свободных членов — $\mathbf{B}$ и $\mathbf{A}_0$, и составим псевдоцелевую функцию

$$z = M \sum_i y_i + M \sum_j z_j \to \min \tag{3.3.8}$$

при условиях

$$\begin{aligned} \mathbf{CX} - \mathbf{A}^{\mathrm{T}}\Lambda + \mathbf{V} + \mathbf{Z} &= -\mathbf{B}; \\ \mathbf{AX} + \mathbf{W} + \mathbf{Y} &= \mathbf{A}_0. \end{aligned} \tag{3.3.9}$$

Решаем задачу (3.3.8) при условии (3.3.9) и выводим из базиса все искусственные переменные $\{y_i\}$ и $\{z_j\}$, а вводим $\mathbf{X}$, Λ, $\mathbf{V}$ и $\mathbf{W}$. Если найденное ДБР $\mathbf{X}_0$, Λ_0, $\mathbf{V}_0$ и $\mathbf{W}_0$ удовлетворяет условиям $\mathbf{X}_0^{\mathrm{T}}\mathbf{V}_0 = 0$, $\Lambda_0^{\mathrm{T}}\mathbf{W}_0 = 0$, то оно и будет оптимальным. В противном случае, если некоторое условие дополняющей нежесткости оказывается нарушенным, например $x_{j_1}^0 \; v_{j_1}^0 \neq 0$, то необходимо перейти к следующему ДБР, выведя из базиса одну из переменных x_{j_1} или v_{j_1} (для чего выполнить итерацию симплекс-метода).

Пример 3.3. Решить следующую задачу на отыскание условного экстремума:

найти

$$\max f(x_1, x_2) = \max (32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2)$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} 2x_1 + 5x_2 &\leqslant 20 \\ 2x_1 - x_2 &= 8 \end{aligned}\right\}$$

$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

Решение. Поскольку $f_{11} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_1^2} = -8 < 0$,

$$\begin{vmatrix} f_{11} & f_{12} \\ f_{21} & f_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -8 & 0 \\ 0 & -30 \end{vmatrix} > 0,$$

то $f(x_1, x_2)$ вогнута и имеется задача квадратичного программирования. Составляем функцию Лагранжа

$$L(x_1, x_2, \lambda_1, \lambda_2) = (32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 15x_2^2 + $$
$$+ \lambda_1 (20 - (2x_1 + 5x_2)) + \lambda_2 (8 - (2x_1 - x_2)).$$

Применив теорему Куна — Таккера, получим следующие условия для оптимального решения:

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} &= 32 - 8x_1 - 2\lambda_1 - 2\lambda_2 \leqslant 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} &= 120 - 30x_2 - 5\lambda_1 + \lambda_2 \leqslant 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} &= 20 - 2x_1 - 5x_2 \geqslant 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_2} &= 8 - 2x_2 + x_2 = 0. \end{aligned} \qquad (3.3.10)$$

$$\begin{aligned} \frac{\partial L}{\partial x_1} x_1 &= 0; \\ \frac{\partial L}{\partial x_2} x_2 &= 0; \\ \frac{\partial L}{\partial \lambda_1} \lambda_1 &= 0. \end{aligned} \qquad (3.3.11)$$

Введя в систему (3.3.10) свободные переменные v_1, v_2, w_1, получим следующую систему:

$$\begin{aligned} 32 - 8x_1 - 2\lambda_1 + v_1 &= 0; \\ 120 - 30x_2 - 5\lambda_1 + \lambda_2 + v_2 &= 0; \\ 20 - 2x_1 - 5x_2 - w_1 &= 0; \\ 8 - 2x_1 + x_2 &= 0 \end{aligned} \qquad (3.3.12)$$

и условия дополняющей нежесткости

$$x_1 v_1 = 0; \quad x_2 v_2 = 0; \quad \lambda_1 w_1 = 0. \qquad (3.3.13)$$

Поскольку второе ограничение исходной задачи выполняется как строгое равенство, то на переменную λ_2 нет ограничения на знак. Так как симплекс-метод позволяет отыскивать лишь неотрицательные базисные решения, то сделаем следующую замену переменных: $\lambda_2 = \lambda_3 - \lambda_4$, где $\lambda_3 \geqslant 0$ и $\lambda_4 \geqslant 0$.

Запишем систему (3.3.12) в эквивалентном виде

$$\begin{aligned} &8x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_3 - 2\lambda_4 - v_1 = 32; \\ &30x_2 + 5\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 - v_2 = 120; \\ &2x_1 + 5x_2 + w_1 = 20; \\ &2x_1 - x_2 = 8. \end{aligned} \qquad (3.3.14)$$

Таблица 3.1

C_j	—	0	0	0							M	M	M
	B_x	A_0	x_1	x_2	λ_1	λ_3	λ_4	v_1	v_2	w_1	y_3	y_1	y_2
0	w_1	20	2	5	0	0	0	0	6	1	0	0	0
M	y_3	8	2	−1	0		0	0	0	0	1	0	0
M	y_1	32	8	0	2	2	−2	−1	0	0	0	1	0
M	y_2	120	0	$\boxed{30}$	5	−1	1	0	−1	0	0	0	1
	Δ	$160M$	$10M$	$29M$	$7M$	M	$-M$	$-M$	$-M$	0	0	0	0

Таблица 3.2

C_j			0	0	0	0	0	0	0	0	M	M
0	B_x	A_0	x_1	x_2	λ_1	λ_3	λ_4	v_1	v_2	w_1	y_3	y_1
0	w_1	0	$\boxed{2}$	0	−5/6	1/6	−1/6	0	$\frac{1}{6}$	1	0	0
M	y_3	12	2	0	1/6	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$	0	$-\frac{1}{30}$	0	1	0
M	y_1	32	8	0	2	2	−2	−1	0	0	0	1
0	x_2	4	0	1	1/6	$-\frac{1}{30}$	$\frac{1}{30}$		$-\frac{1}{30}$	0	0	0
	Δ	$44M$	$10M$	0	$2\frac{1}{6}M$	$1\frac{29}{30}M$	$-1\frac{29}{30}M$	$-M$	$-\frac{M}{30}$	0	0	0

Необходимо найти ДБР системы (3.3.14), удовлетворяющее дополнительно всем условиям (3.3.13).

Для этого применим метод искусственных переменных, введя искусственные переменные y_1, y_2 и y_3 в первое, второе и четвертое ограничения. В результате приходим к следующей ЛП-задаче:

$$\text{Найти } \min M\,(y_1 + y_2 + y_3) \qquad (3.3.15)$$

при условиях

$$\begin{aligned} &8x_1 + 2\lambda_1 + 2\lambda_3 - 2\lambda_4 - v_1 + y_2 = 32; \\ &30x_2 + 5\lambda_1 - \lambda_3 + \lambda_4 - v_2 + y_3 = 120; \\ &2x_1 + 5x_2 + w_1 = 20; \\ &2x_1 - x_2 + y_1 = 8. \end{aligned} \qquad (3.3.16)$$

Таблица 3.3

c_i											M	M
	B_x	A_0	x_1	x_2	λ_1	λ_3	λ_4	v_1	v_2	w_1	y_3	y_1
0	x_1	0	1	0	−5/12	1/2	−1/2	0	1/12	1/2	0	0
M	y_3	12	0	0	1	−1/5	1/5	0	−1/5	−1	1	0
M	y_1	32	0	0	$\boxed{16/3}$	4/3	−4/3	−1	−2/3	−4	0	1
0	x_2	4	0	1	1/6	−1/30	1/30	0	−1/30	0	0	0
	Δ	44M	0	0	19M/3	17M/15	−17M/15	−M	−13M/15	−5M	0	0

Таблица 3.4

c_i											M
	B_x	A_0	x_1	x_2	λ_1	λ_3	λ_4	v_1	v_2	w_1	y_3
0	x_1	5/2	1	0	0	3/16	−3/16	−5/64	1/32	3/16	0
M	y_3	6	0	0	1	−9/20	$\boxed{9/20}$	3/16	−3/40	−1/4	1
0	λ_1	6	0	0	1	1/4	−1/4	−3/16	−1/8	−3/4	0
0	x_2	3	0	1	0	−3/40	3/40	1/32	−1/80	1/8	0
	Δ	6M	0	0	0	−9M/20	9M/20	3/16	−3M/40	−M/4	0

Таблица 3.5

c_i			0	0	0	0	0	0	0	0
	B_x	A_0	x_1	x_2	λ_1	λ_3	λ_4	v_1	v_2	w_1
0	x_1	5	1	0	0	0	0	0	0	1/12
0	λ_4	40/3	0	0	0	−1	1	5/12	−1/6	−5/9
0	λ_1	28/3	0	0	1	0	0	−1/12	−1/6	−8/9
0	x_2	2	0	1	0	0	0	0	0	0
	Δ	0	0	0	0	0	0	0	0	0

Решаем задачу (3.3.15) — (3.3.16) симплекс-методом при дополнительном ограничении (3.3.13) на выбор базиса.

Результаты последовательных итераций приведены в табл. 3.1—3.5. После четвертой итерации получаем оптимальное решение, удовлетворяющее условиям дополняющей нежесткости: $x_1^0 = 5$, $x_2^0 = 2$; $\lambda_1^0 = 28/3$; $\lambda_2^0 = \lambda_3^0 - \lambda_4^0 = -40/3$; $\max f(x_1, x_2) = 240$.

Решить следующие задачи **квадратичного программирования.**

3.3. $z = -x_1 - 2x_2 + x_2^2 \to \min;$
$$3x_1 + 2x_2 \leqslant 6;$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 4;$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

3.4. $z = x_1^2 + x_2^2 - 8x_1 - 10x_2 \to \min;$
$$3x_1 + 2x_2 + x_3 = 6;$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

3.5. а) $z = 3x_1 - 3x_2 - x_1^2 - 3x_2^2 \to \max;$
$$3x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 16;$$
$$-x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 4;$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0,\ x_3 \geqslant 0,\ x_4 \geqslant 0.$$

б) $z = 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max;$
$$2x_1 - x_2 \leqslant 6;$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 10;$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

3.6. $z = 2x_1x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max;$
$$2x_1 - x_2 \leqslant 6;$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 10;$$
$$x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0.$$

3.7.

В пятиугольнике с вершинами О (0, 0), А (0, 6), В (5, 8), Д (0, 4) и Е (8, 0) найти экстремумы следующих **функций:**

а) $z = x_1^2 + x_2^2 - 6x_1 - 4x_2 \to \min;$
б) $z = 18x_1 + 16x_2 - 3x_1^2 - x_1x_2 - 5x_2^2 \to \max;$
в) $z = 20x_1 + 16x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max;$
г) $z = x_1x_2 \to \max;$
д) $z = 2x_1^2 + 3x_2^2 - 40x_1 - 48x_2 \to \min;$
е) $z = 2x_1^2 - 2x_1x_2 + x_2^2 \to \min.$

3.8. $z = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 2x_1 + x_2 \to \min;$
$$x_1 + 2x_2 + 3x_3 \leqslant 12;$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6.$$

3.9. $z = x_1 - x_2^2 + 2x_1x_2 \to \max;$
$$x_1 + x_2 = 8;$$
$$x_1 + x_2 = 4.$$

3.10. $z = (x_1 + x_2 + x_3)^2 \to \min;$
$$x_1 \leqslant 2,\ x_2 \leqslant 4,\ x_3 \leqslant 6.$$

3.11. $z = x_1 - x_2^2 + 2x_2 - x_3^2 \to \max;$

$x_1 + 2x_2 - x_3 = 6;$

$x_1 \geqslant 0,\ \ x_2 \geqslant 0,\ \ \ x_3 \geqslant 0.$

3.12. $z = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_1 - 6x_2 \to \min;$

$2x_1 + 3x_2 \leqslant 8;$

$x_1 + 3x_2 \leqslant 15;$

$x_1,\ \ \ x_2 \geqslant 0.$

3.13. $z = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_1 - 6x_2 \to \min;$

$x_1 + 3x_2 \leqslant 12;$

$x_1 + \ \ x_2 \geqslant 6;$

$x_1,\ \ \ x_2 \geqslant 0.$

3.14. $z = 2x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_1 - 6x_2 \to \min;$

$x_1 - \ \ x_2 \geqslant 6;$

$2x_1 + x_2 \geqslant 15;$

$x_1,\ \ \ x_2 \geqslant 0.$

3.15. $z = x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 + 5x_1 \to \min;$

$2x_1 + 3x_2 \leqslant 15;$

$x_1 + 2x_2 \leqslant 10;$

$x_1,\ \ \ x_2 \geqslant 0.$

3.16. $z = 3x_1 + 4x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max;$

$x_1 + 2x_2 \leqslant 20;$

$x_1 + \ \ x_2 \geqslant 8;$

$x_1,\ \ \ x_2 \geqslant 0.$

3.17. $z = x_1 + 2x_2 - x_1^2 - x_2^2 \to \max:$

$x_1 + 2x_2 \leqslant 16,$

$x_1 + \ \ x_2 = 8;$

$x_1,\ \ \ x_2 \geqslant 0.$

3.18. $z = (32x_1 + 120x_2 - 4x_1^2 - 3x_2^2) \to \max;$

$2x_1 + 5x_2 \leqslant 20;$

$2x_1 - \ \ x_2 = 8;$

$x_1,\ \ \ x_2 \geqslant 0.$

3.19. $z = (5x_1 + 2x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - x_2^2) \to \max;$

$2x_1 + 3x_2 \leqslant 15;$

$x_1 + 2x_2 = 8;$

$x_1,\ \ \ x_2 \geqslant 0.$

3.20. $z = (x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1 - 4x_2) \to \min;$

$x_1 + 2x_2 \leqslant 20;$

$x_1 + x_2 \geqslant 8,\ \ \ x_1,\ x_2 \geqslant 0.$

3.21. $z = (x_1 + 3x_2 - 2x_1^2 - 3x_2^2) \to \max;$
$$x_1 + 3x_2 \leqslant 12;$$
$$x_1 + x_2 \geqslant 6;$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

3.22. $z = (2x_1^2 - 3x_1x_2 + 2x_2^2 + 5x_1 + 6x_2) \to \min;$
$$x_1 - x_2 = 6;$$
$$2x_1 + x_2 = 15.$$

3.23. $z = (3x_1 + 8x_2 - x_1^2 - 2x_2^2) \to \max;$
$$2x_1 + x_2 \geqslant 8;$$
$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 20;$$
$$x_1, \quad x_2 \geqslant 0.$$

3.24. $z = (8x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_1^2 - 2x_3^2) \to \max;$
$$2x_1 + x_2 - x_3 \leqslant 16;$$
$$3x_2 + 4x_3 \leqslant 20;$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$$

3.25. $z = (8x_1 + x_2 - x_1^2) \to \max;$
$$2x_1 + x_2 \leqslant 16;$$
$$x_1 + 5x_2 = 20;$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

3.26. $z = (3x_1 + 10x_2 - 2x_1^2 - 5x_2^2) \to \max;$
$$4x_1 - x_2 \leqslant 8;$$
$$x_1 + x_2 = 12;$$
$$x_1 \geqslant 0, x_2 \geqslant 0.$$

3.27. $z = (15x_1 + 8x_2 - x_1^2 + x_1x_2 - 3x_2^2) \to \max;$
$$3x_1 + x_2 \leqslant 15;$$
$$x_1 + 2x_2 \leqslant 10;$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

3.28. $z = (x_1^2 - 2x_1x_2 + 2x_2^2 + 3x_1 + 4x_2) \to \min;$
$$x_1 + x_2 \geqslant 6;$$
$$2x_1 + 3x_2 \leqslant 18;$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

3.29. $z = (x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3^2) \to \min;$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 10;$$
$$3x_1 - 2x_2 - x_3 \geqslant 6;$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0.$$

3.30. $z = (x_1^2 - x_1x_2 + x_2^2 + x_3^2 - 5x_1 + 6x_2) \to \min;$
$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 20;$$
$$x_1 + x_2 \leqslant 15;$$
$$x_2 + x_3 \leqslant 10;$$
$$x_1 \geqslant 0, \quad x_2 \geqslant 0, \quad x_3 \geqslant 0.$$

3.4. ГЕОМЕТРИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

Достаточно широкий и интересный с практической точки зрения класс задач исследования операций составляют задачи геометрического программирования (ГП).

Задача ГП в общем виде записывается следующим образом:

$$\text{Найти } \min_{t} g_0(t_1, t_2, \ldots, t_m) \tag{3.4.1}$$

при ограничениях

$$g_1(t_1, t_2, \ldots, t_m) \leqslant 1; \tag{3.4.2}$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$g_p(t_1, t_2, \ldots, t_m) \leqslant 1; \tag{3.4.3}$$

$$t_1 \geqslant 0, \ldots, t_m \geqslant 0; \tag{3.4.4}$$

$$g_k(t_1, t_2, \ldots, t_m) = \sum_{i \in I[k]} c_i t_1^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \ldots t_m^{a_{im}}; \tag{3.4.5}$$

$$I[k] = \{m_k, m_k + 1, \ldots, n_k\}, \quad k = 0, 1, \ldots, p; \tag{3.4.6}$$

$$m_0 = 1, \; m_1 = n_0 + 1, \; m_k = n_{k-1} + 1, \ldots, n_p = n;$$

$$c_i > 0.$$

Функция $g_k(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ вида (3.4.5) называется *позиномом*, ограничения (3.4.2) — *вынужденными ограничениями*, а ограничения (3.4.4) — условиями неотрицательности.

Матрица $A = \| a_{ij} \|_{j=\overline{1,m}}^{i=\overline{1,n}}$ называется *матрицей экспонент*. Задача (3.4.1— 3.4.6) является прямой задачей ГП. Двойственная задача, соответствующая ей, формулируется следующим образом:

$$\text{Найти } \max v(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n) = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{c_i}{\delta_i} \right)^{\delta_i} \prod_{k=1}^{p} \lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)} \tag{3.4.7}$$

при условиях

$$\sum_{i \in I[0]} \delta_i = 1, \tag{3.4.8}$$

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ij}\delta_i = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m; \tag{3.4.9}$$

$$\delta_1 \geqslant 0, \; \delta_2 \geqslant 0, \ldots, \delta_n \geqslant 0, \tag{3.4.10}$$

где

$$\lambda_k(\delta) = \sum_{i \in I[k]} \delta_i, \quad k = \overline{1, p}, \tag{3.4.11}$$

а множества индексов $I[k]$ определяются согласно (3.4.6).

Функция $v(\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_r)$ называется *двойственной функцией*, переменные $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ — *двойственными переменными*, условие (3.4.8) — *условием нормализации*, а (3.4.9) — *условием ортогональности*.

Путем сопоставления форм записи прямой задачи (3.4.1) — (3.4.6) и двойственной ей (3.4.7) — (3.4.11) можно установить между ними следующие соответствия.

1. Каждому члену позиномов прямой задачи $u_i = c_i t_1^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \ldots t_m^{a_{im}}$ соответствует одна двойственная переменная δ_i, и наоборот.

2. Каждый множитель вида $\lambda_k(\delta)^{\lambda_k(\delta)}$ функции $v(\delta)$ определяется вынужденным ограничением $g_k(t) \leqslant 1$.

3. Условие нормализации (3.4.8) — это единственное условие, по которому различаются целевая функция $g_0(t)$ и позиномы-ограничения $g_k(t)$.

В основе теории геометрического программирования лежат обобщенное геометрическое неравенство и теорема Куна — Таккера для задач выпуклого программирования. Отметим, что функции-позиномы $g_k(t_1, t_2, \ldots, t_m)$ являются выпуклыми и потому задача является задачей выпуклого программирования.

Связь между оптимальными решениями прямой и двойственной задач геометрического программирования устанавливается в следующей теореме.

Теорема 3.3. *Пусть прямая задача A совместна и существует решение* t *такое, что* $g_k(\mathbf{t}) < 1$, $k = \overline{1, p}$, *а также оптимальное решение. Тогда:*

1. *Соответствующая двойственная задача совместна и существует точка, удовлетворяющая двойственным ограничениям, в которой достигается условный максимум двойственной функции* $v(\delta)$.

2. *Максимальное значение целевой функции двойственной задачи равно минимальному значению целевой функции прямой задачи, т. е.*

$$\min_{t} g_0(\mathbf{t}) = \max_{\delta} v(\delta). \qquad (3.4.12)$$

3. *Если* $\mathbf{t}^* = (t_1^*, t_2^*, \ldots, t_m^*)$ *— минимизирующая точка прямой задачи, то существуют такие неотрицательные множители Лагранжа* μ_k^*, $k = \overline{1, p}$, *что функция Лагранжа обладает тем свойством, что*

$$L(\mathbf{t}, \mu) = g_0(t) + \sum_{k=1}^{p} \mu_k [g_k(\mathbf{t}) - 1], \qquad (3.4.13)$$

$$L(\mathbf{t}^*, \mu) \leqslant L(\mathbf{t}^*, \mu^*) \leqslant L(\mathbf{t}, \mu^*), \qquad (3.4.14)$$

для произвольных $t_j > 0$ и $\mu_k \geqslant 0$, т. е. *пара* $(\mu^*, \mathbf{t}^*)$ *является седловой точкой функции Лагранжа.*

4. *Существует максимизирующий вектор* δ^* *двойственной задачи с компонентами, определяемыми из условий*

$$\delta_i^* = \frac{c_i t_1^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \ldots t_m^{a_{im}}}{g_0(\mathbf{t})}, \quad i = I[0]; \qquad (3.4.15)$$

$$\delta_i^* = \frac{\mu_k c_i t_1^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \ldots t_m^{a_{im}}}{g_0(\mathbf{t})}, \quad i \in I[k], \quad k = \overline{1, p}; \qquad (3.4.16)$$

где $\mathbf{t} = \mathbf{t}^*$ и $\mu = \mu^*$.

Кроме того,

$$\lambda_k(\delta^*) = \frac{\mu_k^*}{g_0(\mathbf{t}^*)}; \qquad (3.4.17)$$

5. *Если* δ^* *— максимизирующая точка двойственной задачи B, то любая минимизирующая точка* $\mathbf{t}^*$ *прямой задачи удовлетворяет системе уравнений*

$$c_i t_1^{a_{i1}} t_2^{a_{i2}} \ldots t_m^{a_{im}} = \begin{cases} \delta_i^* v(\delta^*), & i \in I[0]; \qquad (3.4.18) \\ \dfrac{\delta_i^*}{\lambda_k(\delta^*)}, & i \in I[k], \qquad (3.4.19) \end{cases}$$

где k пробегает все положительные целочисленные значения, для которых $\lambda_k(\delta^*) \geqslant 0$.

Пользуясь результатами этой теоремы и зная решение прямой задачи, можно на основании соотношений (3.4.16) определить максимизирующий вектор двойственной задачи δ^* Наоборот, если известно решение двойственной задачи δ^*, то, используя формулы (3.4.18), можно определить оптимальное решение прямой задачи $\mathbf{t}^*$.

Таким образом, для нахождения решений пары двойственных задач $(\mathbf{t}^*, \delta^*)$ достаточно найти решение одной из них.

Рассмотрим двойственную задачу. Ее ограничения линейны и допустимое множество решений образует выпуклый многогранник (многогранное множество).

Заметим, что задача содержит n переменных $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_n$ и $m+1$ — ограничение. Назовем величину $d = n - m - 1$ *степенью трудности* задачи ГП, она равна числу свободных (небазисных) переменных в ограничениях задачи (3.4.8) — (3.4.9).

Для задачи ГП с нулевой степенью трудности двойственная область содержит не более одной точки $\delta = \delta_0$. Для задачи с положительной степенью трудности d можно определить такие (базисные) свободные векторы $\mathbf{b}^{(1)}, \mathbf{b}^{(2)}, \ldots, \mathbf{b}^{(d)}$, что общее решение двойственных ограничений будет иметь вид

$$\delta = \mathbf{b}^{(0)} + \sum_{j=1}^{d} r_j \mathbf{b}^{(j)} \geqslant 0, \tag{3.4.20}$$

где r_j — произвольные вещественные числа, удовлетворяющие условиям неотрицательности

$$\delta_i = b_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{d} r_j b_i^{(j)} \geqslant 0. \tag{3.4.21}$$

Вектор $\mathbf{b}^{(0)}$, удовлетворяющий условиям нормализации

$$\sum_{i=1}^{n_0} b_i^0 = 1 \tag{3.4.22}$$

и условиям ортогональности $\sum\limits_{i=1}^{n} a_{ij} b_i^{(0)} = 0,\ j = \overline{1, m},$ (3.4.23) называется вектором нормализации.

Векторы $\mathbf{b}^{(j)}$, $j = \overline{1, d}$ образуют базис пространства решений линейной однородной системы уравнений

$$\sum_{i \in I[0]} y_i = 0, \quad \sum_{i=1}^{n} a_{ij} = 0,\ j = \overline{1, m}. \tag{3.4.24}$$

Векторы $\mathbf{b}^{(j)}$ называются базисными векторами, а переменные r_j, связанные с $\mathbf{b}^{(j)}$, — базисными переменными. Выразив все δ_i через базисные переменные и подставив значения $\delta_i\,[r_j]$ в двойственную функцию, получим

$$v(\delta_1, \ldots, \delta_n) = v(r_1, r_2, \ldots, r_d), \tag{3.4.25}$$

и далее необходимо найти $\max v(r_1, r_2, \ldots, r_d)$, причем на вектор $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_d)$ наложены условия неотрицательности

$$\delta_i(r) = b_i^{(0)} + \sum_{j=1}^{d} r_j b_i^{(j)} \geqslant 0, \quad i = \overline{1, n}. \tag{3.4.26}$$

Для нахождения $\max v(r)$ по переменным $r_1, \ldots, r_d$ используется тот факт, что функция $\ln v(\mathbf{r})$ вогнута по $\mathbf{r}$.

Для отыскания оптимального решения двойственной задачи $v(\delta) = v(\mathbf{r})$ по переменным $\mathbf{r} = (r_1, r_2, \ldots, r_d)$ используется следующая теорема.

Теорема 3.4. *Если δ удовлетворяет ограничениям двойственной задачи B и все компоненты δ положительны, то δ является максимизирующей точкой двойственной задачи тогда и только тогда, когда*

$$K_j = \prod_{i=1}^{n} \delta_i(r)^{b_i(j)} \prod_{k=1}^{p} \lambda_k(\delta(\mathbf{r}))^{-\lambda_k(j)},\ j = \overline{1, d}, \tag{3.4.27}$$

где

$$K_j = \prod_{i=1}^{n} c_i^{b_i(j)}, \quad j = \overline{1, d}. \tag{3.4.28}$$

При этом, если δ удовлетворяет соотношениям (3.4.27), *то*

$$v(\delta) = K_0\left(\prod_{i=1}^{n} \delta_i^{-b_i^{(0)}}(r)\right)\prod_{k=1}^{p} \lambda_k(r)^{\lambda_k^{(0)}}. \qquad (3.4.29)$$

Уравнения (3.4.27) называются *максимизирующими*. Они образуют систему, состоящую из d нелинейных уравнений относительно базисных переменных r_j, $j = \overline{1, d}$.

Решив эту систему, можно определить максимизирующую точку двойственной задачи B. Формула (3.4.29) определяет максимальное значение двойственной задачи B для такой точки. Заметим, что базисные постоянные K_j и двойственные переменные входят в разные части максимизирующих уравнений и такое разделение переменных и постоянных облегчает исследование зависимости оптимальных решений прямой и двойственной задач от коэффициентов c_i.

Пусть прямая задача ГП записана в виде (3.4.1) — (3.4.6).

Описание алгоритма. Алгоритм решения состоит из следующих этапов.

1. Составляем задачу (3.4.7) — (3.4.11), двойственную к задаче (3.4.1) — (3.4.6).

2. Находим решение ограничений ортогональности (3.4.8) и нормализации (3.4.9) δ^*. Если степень трудности задачи $d = n - m - 1$, то это решение единственно.

3. Тогда используя значение $\delta^* = \{\delta_i^*\}$, $i = \overline{1, n}$, составляем систему уравнений (3.4.18) — (3.4.19), которую решаем относительно неизвестных $\mathbf{t}^* = \{t_j^*\}_{j=\overline{1,m}}$. При этом для искомого решения $v(\delta^*) = g(\mathbf{t}^*)$. Конец.

4. Если же степень трудности $d > 0$, то общее решение системы уравнений (3.4.8) — (3.4.9) будет иметь вид

$$\delta_i(\mathbf{r}) = b_i^0 + \sum_{j=1}^{d} r_j b_i^{(j)} \geqslant 0, \ i = \overline{1, n},$$

где $\mathbf{r}$ — вектор произвольных параметров.

5. Используя условия оптимальности (3.4.27), составляем и решаем систему нелинейных уравнений относительно неизвестных r_j, $j = \overline{1, d}$. Найдя ее решение r^* и подставляя в (3.4.26), определяем оптимальные значения двойственных переменных $\delta_i^* = \delta_i(\mathbf{r}^*)$, а подставляя δ^* в (3.4.29), определим оптимальное значение целевой функции двойственной задачи $v(\delta^*) = \max v$.

6. Переходим к прямой задаче, используя соотношения (3.4.18), решаем систему уравнений относительно искомых значений $t_1^*, t_2^*, \ldots, t_m^*$ при уже найденных значениях переменных $\{\delta_i^*\}$ $i = \overline{1, n}$.

Пример 3.4. Пусть требуется минимизировать позином

$$g_0(\mathbf{t}) = 40t_1t_2 + 20t_2t_3 \qquad (3.4.30)$$

при ограничениях

$$g(\mathbf{t}) = \frac{1}{5}t_1^{-1}t_2^{-1/2} + \frac{3}{5}t_2^{-1}t_3^{-2/3} \leqslant 1. \qquad (3.4.31)$$

Заметим, что в данной задаче число членов $n = 4$, а число переменных $m = 3$. Следовательно, степень трудности задачи $d = 0$. Таким образом, решение двойственных ограничений единственно.

Двойственная задача к задаче (3.4.30) — (3.4.31) запишется в виде

$$\max v(\delta) = \left(\frac{40}{\delta_1}\right)^{\delta_1}\left(\frac{20}{\delta_2}\right)^{\delta_2}\left(\frac{1/5}{\delta_3}\right)^{\delta_3}\left(\frac{3/5}{\delta_4}\right)^{\delta_4}(\delta_3+\delta_4)^{\delta_3+\delta_4} \qquad (3.4.32)$$

при условиях

$$\delta_1 + \delta_2 = 1; \tag{3.4.33}$$

$$\delta_1 - \delta_3 = 0;$$

$$\delta_1 + \delta_2 - {}^1/_2\delta_3 - \delta_4 = 0; \tag{3.4.34}$$

$$\delta_2 - {}^2/_3\delta_4 = 0;$$

$$\delta_1 \geqslant 0,\ \delta_2 \geqslant 0,\ \delta_3 \geqslant 0,\ \delta_4 \geqslant 0. \tag{3.4.35}$$

Условия (3.4.33) — (3.4.34) образуют систему из четырех уравнений с четырьмя неизвестными и имеют единственное решение:

$$\delta_1^* = {}^1/_2,\ \delta_2^* = {}^1/_2,\ \delta_3^* = {}^1/_2,\ \delta_4^* = {}^3/_4.$$

Из выражения для g (t) видно, что выполнены условия теоремы 3.3 и прямая задача совместна. Применим эту теорему для нахождения искомого решения t*. Находим значение двойственной функции:

$$v(\delta^*) = v({}^1/_2;\ {}^1/_2;\ {}^1/_2;\ {}^3/_4) = 40.$$

Следовательно, по теореме двойственности

$$g_0(t_1^*,\ t_2^*,\ t_3^*) = 40.$$

Используя четвертое утверждение теоремы 3.3 и соотношение (3.4.18), составим следующую систему уравнений:

$$40t_1t_2 = \delta_1^* v(\delta^*) = {}^1/_2 \cdot 40; \tag{3.4.36}$$

$$20t_2t_3 = \delta_3^* v(\delta^*) = {}^1/_2 \cdot 40; \tag{3.4.37}$$

$${}^1/_5 t_1^{-1} t_2^{-1/2} = \frac{\delta_3}{\lambda} = \frac{{}^1/_2}{\delta_3 + \delta_4} = \frac{2}{5}; \tag{3.4.38}$$

$${}^3/_5 t_2^{-1} t_3^{-2/3} = \frac{\delta_4}{\delta_3 + \delta_4} = {}^3/_5. \tag{3.4.39}$$

Для решения этой системы прологарифмируем обе части соотношений (3.4.36) — (3.4.39). Получим систему линейных уравнений относительно $\ln t_1$, $\ln t_2$, $\ln t_3$. Она имеет единственное решение: $\ln t_1 = -\ln 2$, $\ln t_2 = 0$, $\ln t_3 = 0$. Откуда искомое решение имеет вид: $t_1^* = {}^1/_2$, $t_2^* = 1$, $t_3^* = 1$.

Нетрудно убедиться непосредственно, что $g({}^1/_2;\ 1;\ 1) = 40$.

Пример 3.5. Пусть требуется минимизировать позином

$$g_0(\mathbf{t}) = 40t_1^{-1}t_2^{-1/2}t_3^{-1} + 20t_1t_3 + 20t_1t_2t_3 \tag{3.4.40}$$

при условии

$$g(\mathbf{t}) = {}^1/_3 t_1^{-2} t_2^{-2} + {}^4/_3 t_2^{1/2} t_3^{-1} \leqslant 1.$$

Соответствующая этой задаче двойственная задача состоит в максимизации

$$\max v(\delta) = \left(\frac{40}{\delta_1}\right)^{\delta_1} \left(\frac{20}{\delta_2}\right)^{\delta_2} \left(\frac{20}{\delta_3}\right)^{\delta_3} \cdot \left(\frac{{}^1/_3}{\delta_4}\right)^{\delta_4} \cdot \left(\frac{{}^4/_3}{\delta_5}\right)^{\delta_5} (\delta_4 + \delta_5)^{\delta_4+\delta_5} \tag{3.4.41}$$

Таблица 3.6

δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	A_0
$\boxed{1}$	1	1	0	0	1
−1	1	1	−2	0	0
−1/2	0	1	−2	1/2	0
−1	1	1	0	−1	0

Таблица 3.7

δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	A_0
1	1	1	0	0	1
0	$\boxed{2}$	2	−2	0	1
0	1/2	$1^1/2$	−2	1/2	1/2
0	2	2	0	−1	1

Таблица 3.8

δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	A_0
1	0	0	1	0	1/2
0	1	1	−1	0	1/2
0	0	1	−3/2	$\boxed{1/2}$	1/4
0	0	0	2	−1	0

Таблица 3.9

δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	A_0
1	0	0	1	0	1/2
0	1	1	−1	0	1/2
0	0	2	−3	1	1/2
0	0	$\boxed{2}$	−1	0	1/2

Таблица 3.10

δ_1	δ_2	δ_3	δ_4	δ_5	A_0
1	0	0	1	0	1/2
0	1	0	−1/2	0	1/4
0	0	0	−2	1	0
0	0	1	−1/2	0	1/4

при ограничениях

$$\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 = 1; \qquad (3.4.42)$$

$$-\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - 2\delta_4 = 0;$$

$$-{}^1/_2\delta_1 + \delta_3 - 2\delta_4 + {}^1/_2\delta_5 = 0;$$

$$-\delta_1 + \delta_2 + \delta_3 - \delta_5 = 0; \qquad (3.4.43)$$

$$\delta_1 \geqslant 0,\ \delta_2 \geqslant 0,\ \delta_3 \geqslant 0,\ \delta_4 \geqslant 0,\ \delta_5 \geqslant 0. \qquad (3.4.44)$$

Степень трудности задачи равна: $n - m - 1 = d = 5 - 3 - 1 = 1$.

1. Решаем систему методом Гаусса и результаты последовательных итераций приведем в табл. 3.6—3.10, откуда получаем следующее базисное решение системы (3.4.42) — (3.4.43):

$$\delta_1^* = {}^1/_2; \quad \delta_2^* = {}^1/_4; \quad \delta_3^* = {}^1/_4; \quad \delta_4^* = 0; \quad \delta_5^* = 0.$$

Полное множество решений этой системы равно (при $\delta_4 = r$):

$$\begin{aligned} \delta_1^{(r)} &= {}^1/_2 - r; \\ \delta_2(r) &= {}^1/_4 + {}^1/_2 r; \\ \delta_3(r) &= {}^1/_4 + {}^1/_2 r; \\ \delta_4(r) &= r; \\ \delta_5(r) &= 2r. \end{aligned} \tag{3.4.45}$$

Из этих уравнений, используя условия неотрицательности, получаем, что r должно удовлетворять неравенству

$$0 \leqslant r \leqslant {}^1/_2. \tag{3.4.46}$$

2. Записав общее решение системы в виде $\delta = \mathbf{b}^{(0)} + r\mathbf{b}^{(1)}$, определяем, что

$$\mathbf{b}^{(0)} = [{}^1/_2 \quad {}^1/_4 \quad {}^1/_4 \quad 0 \quad 0]; \tag{3.4.47}$$

$$\mathbf{b}^{(1)} = [-1 \quad {}^1/_2 \quad {}^1/_2 \quad 1 \quad 2]. \tag{3.4.48}$$

3. Используя условия оптимальности (3.4.27) теоремы 3.4, определяем искомое значение r^*, при котором $v(\delta(r^*)) = \max\limits_r v(r)$.

Имеем: $j = d = 1$.

Вычисляем $K_1 = \prod\limits_{i=1}^{n} c_i^{b_i^{(1)}} = 40^{-1} \cdot (20^{1/2}) \cdot ({}^1/_3)^1 \cdot ({}^4/_3)^2 = ({}^{20}/_{40}) \times$ $\times ({}^1/_3) \cdot ({}^{16}/_9) = {}^8/_{27}$.

Но в силу (3.4.27), с учетом $j = 1$ и $k = 1$, получим

$$K_1 = \prod_{i=1}^{5} \delta_i^{b_i^{(1)}}(r)\, \lambda_1(r)^{-\lambda_1^{(1)}}, \tag{3.4.49}$$

где $\delta_i(r)$ определяется из (3.4.45); $b_i^{(1)}$ — из (3.4.48):

$$\lambda_1(r) = \delta_4(r) + \delta_5(r) = r + 2r = 3r;$$

$$\lambda_1(1) = b_4^{(1)} + b_5^{(1)} = 1 + 2 = 3.$$

Подставляя эти значения в (3.4.42), получим

$$K_1 = ({}^1/_2 - r)^{-1} ({}^1/_4 + {}^1/_2 r)^{1/2} ({}^1/_4 + {}^1/_2 r)^{1/2} (r)^1 (2r)^2 (r + 2r)^{-3} = {}^8/_{27}. \tag{3.4.50}$$

Отсюда $\dfrac{({}^1/_4 + {}^1/_2 r)\, r \cdot 4r^2}{({}^1/_2 - r)\, 3^3 r^3} = \dfrac{8}{27}$, или

$${}^1/_4 + {}^1/_2 r = 2({}^1/_2 - r). \tag{3.4.51}$$

Из (3.4.50) определяем искомое значение $r^* = 0.3$. Заметим, что это значение удовлетворяет неравенству (3.4.46). Подставляя $r^* = 0.3$ в (3.4.45), находим оптимальные значения двойственных переменных:

$$\delta_1^* = {}^1/_2 - r^* = 0.2; \quad \delta_2^* = {}^1/_4 + {}^1/_2 r = 0.4;$$

$$\delta_3^* = \delta_2^* = 0.4; \quad \delta_4^* = 0.3; \quad \delta_5^* = 0.6.$$

Тогда максимум двойственной функции будет равен:

$$v(\delta^*) = \left(\frac{40}{0.2}\right)^{0.2}\left(\frac{20}{0.4}\right)^{0.4}\cdot\left(\frac{20}{0.4}\right)^{0.4}\cdot\left(\frac{1/3}{0.3}\right)^{0.3}\cdot\left(\frac{4/3}{0.6}\right)^{0.6}\cdot(0.9)^{0.9} =$$

$$= 200^{0.2}\cdot(50)^{0.4}\cdot(50)^{0.4}\cdot\left(\frac{10}{9}\right)^{0.3}\cdot\left(\frac{20}{9}\right)^{0.6}\cdot(0.9)^{0.9} = 100. \quad (3.4.52)$$

Итак, $v(\delta^*) = 100$.

Теперь используя соотношения (3.4.18) из теоремы двойственности, нетрудно составить уравнения относительно неизвестных прямой задачи t_1, t_2, t_3:

$$40t_1^{-1}t_2^{-1/2}t_3^{-1} = \delta_1^* v(\delta^*) = 0.2\cdot 100 = 20; \quad (3.4.53)$$

$$20t_1t_3 = \delta_2^* v(\delta^*) = 0.4\cdot 100 = 40; \quad (3.4.54)$$

$$20t_1t_2t_3 = \delta_3^* v(\delta) = 0.4\cdot 100 = 40; \quad (3.4.55)$$

$$1/3\, t_1^{-2}t_2^{-2} = \frac{\delta_4^*}{\delta_4^* + \delta_5^*} = \frac{0.3}{0.3+0.6} = 1/3. \quad (3.4.56)$$

Умножив уравнение (3.4.54) на (3.4.53), получим $t_2^* = 40/40 = 1$. Подставляя $t_2^* = 1$ в (3.4.56), получим $1/3\cdot t_1^{-2} = 1/3$, откуда $t_1^* = 1$.

Наконец, подставив $t_1^* = 1$ в (3.4.53), находим $t_3^* = 2$.

Итак, мы нашли следующее оптимальное решение прямой задачи: $t_1^* = 1$, $t_2^* = 1$, $t_3^* = 2$, $g(\mathbf{t}^*) = v(\delta^*) = 100$.

Задачи и упражнения

Найти и исследовать решения следующих задач геометрического программирования.

3.31. Допустим, требуется построить каркас прямоугольного ящика объемом в 100 м^3. Каркас должен быть построен из брусков дерева шириной 0,1 м. Стоимость брусков дерева, из которых изготавливается каркас, равна 10 руб/м. Какими необходимо выбрать размеры ящика, чтобы стоимость каркаса была минимальной? Указания.

1. Составить математическую модель задачи.
2. Определить степень ее трудности.
3. Сформулировать двойственную к ней задачу.
4. Выписать матрицу экспонент $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$.
5. Найти полное множество решений ограничений двойственной задачи. Определить вектор нормализации $\mathbf{b}^{(0)}$ и векторы невязки $\mathbf{b}^{(1)}$, $\mathbf{b}^{(2)}$.
6. Записать общее решение системы в виде

$$\delta(\mathbf{r}) = \mathbf{b}^{(0)} + r_1\mathbf{b}^{(1)} + r_2\mathbf{b}^{(2)};$$

$$\delta_i = b_i^{(0)} + r_1b_i^{(1)} + r_2b_i^{(2)}.$$

7. Составить систему нелинейных максимизирующих уравнений вида (3.4.27) и найти ее решение r_1^*, r_2^*.

8. Определить $\delta_i^* = \delta_i^* (r^*)$ и оптимальное значение целевой функции двойственной задачи $v(\delta^*) = \max v$.

9. Используя соотношения (3.4.18), составить и решить систему уравнений относительно искомых значений переменных прямой задачи: x, y, z.

3.32. Минимизировать функцию $U(x, y) = A(x^2 + y^2)^{1/2} + \frac{B}{x^2 y}$, где $A > 0$, $B > 0$.

Указания: а) ввести переменное $\xi \geqslant x^2 + y^2$ и свести задачу минимизации к стандартной задаче ГП;

б) определить степень трудности этой задачи;

в) определить относительные вклады первого и второго слагаемых в минимальное значение U;

г) найти минимальное значение U.

3.33. Исследовать функцию

$$U = A(x + y^{-1})^{1/2} + \frac{B}{(x - y)^2} \to \min,$$

где $A > 0$, $B > 0$ — произвольные положительные константы.

Указания: а) ввести 2 новые переменные:

$$\zeta \geqslant x + y^{-1}, \quad \eta \leqslant x - y$$

и привести задачу минимизации U к стандартной задаче ГП;

б) определить степень трудности этой задачи;

в) выписать матрицу экспонент $\mathbf{A} = \| a_{ij} \|$;

г) из этой матрицы найти общее решение двойственных ограничений $\delta = \mathbf{b}^{(0)} + \mathbf{b}^{(1)} r$;

д) найти значение базисной переменной r, которое максимизирует двойственную функцию;

е) определить максимальное значение двойственной функции для значений $A = 20$, $B = 5$.

3.34.

$$\text{Найти } \min g_0(t) = 40 t_1^{-1} t_2^{-1/2} t_3^{-1} + 20 t_1 t_3 + 20 t_1 t_2 t_3$$

при условии

$$g_1(t) = \frac{1}{3} t_1^{-2} t_2^{-2} + \frac{4}{3} t_2^{1/2} t_3^{-1} \leqslant 1.$$

Указание. Составить двойственную задачу, определить степень ее трудности, найти ее решение.

3.35.

$$\text{Найти минимум } G(t) = t_1^{-1/2} t_2^{1/6} + \left(\frac{4}{5} t_1^{1/2} t_2^{2/3} + \frac{2}{5} t_1^{1/3} t_2\right)^{1/2} t_1^{1/4} t_2^{-1/2}.$$

Указание. Привести эту задачу к эквивалентной задаче ГП, для чего ввести вспомогательную переменную t_0 из условия

$$\frac{4}{5} t_0^{-1} t_1^{\frac{1}{2}} t_2^{\frac{2}{3}} + \frac{2}{5} t^{\frac{1}{3}} t_2 t_0^{-1} \leqslant 1.$$

3.36.

$$\text{Найти } g_0(t) = 20t_1^{-\frac{1}{2}}t_2^2 + 30t_1^{-2}t_3^{\frac{1}{2}} \to \min,$$

при ограничении

$$\frac{4}{5}t_1t_2^{-1} + \frac{2}{5}t_1^{-1}t_2^{-2} \leqslant 1.$$

3.37. Не решая прямой задачи, определить минимум $g_0(t)$, а также вклад каждого позинома в значение целевой функции:

$$\min g_0(t) = 40t_1t_2^{-1}t_3^{\frac{1}{2}} + 10t_1^{-2}t_2^{\frac{1}{2}} + 20t_1t_2^2t_3^{-2}.$$

В каждом из следующих примеров определить степень трудности прямой задачи ГП, составить задачу, двойственную к данной, найти оптимальное решение двойственной задачи δ_i^*, $i = \overline{1, m}$, найти решение прямой задачи и определить вклад каждого позинома $u_i(t)$ в значение целевой функции $g_0(t)$.

3.38.

$$\text{Найти } \min(20t_1t_2 + 40t_1t_3 + 30t_2t_3^3)$$

при условиях

$$\frac{1}{3}t_1t_2^{-1} + \frac{2}{3}t_1^{-1}t_3 \leqslant 1,$$

$$t_i \geqslant 0.$$

3.39.

$$\text{Найти } \min(5t_1t_2 + 10t_2t_3)$$

при условиях

$$\left(\frac{1}{5}t_1^{-1}t_2^{-1} + \frac{2}{5}t_1^{-1}t_3^{-1} + \frac{1}{10}t_2^{-1}t_3^{-1}\right) \leqslant 1.$$

$$t_1, t_2, t_3 \geqslant 0.$$

3.40.

$$\text{Найти } \min(10t_1^{\frac{1}{2}}t_2^{-1} + 5t_1^{\frac{1}{2}}t_3^{-1} + 10t_2^{\frac{1}{2}}t_3^{-1})$$

при условиях

$$\left(\frac{2}{15}t_1^{-2}t_2^{-1} + \frac{1}{15}t_2^2t_3^{-1}\right) \leqslant 1,$$

$$t_1, t_2, t_3 \geqslant 0.$$

3.41.

$$\text{Найти } \min(20t_1t_2 + 30t_2^{-1}t_3 + 50t_3t_4^2)$$

при условиях

$$\frac{1}{5}t_1^{-1}t_2^{-1}t_3^{-1} + \frac{2}{5}t_2t_3^{-1}t_4^{-1} \leqslant 1.$$

$$t_1, t_2, t_3 \geqslant 0.$$

3.42.

$$\text{Найти } \min\left(5t_1^{\frac{1}{2}}t_2t_3^2 + 10t_2^2t_3^{\frac{1}{2}} + 20t_1^{-1}t_2t_3^{-1}\right)$$

при условиях

$$t_1, t_2, t_3 \geqslant 15, \; t_1, t_2, t_3 \geqslant 0.$$

3.43.

$$\text{Найти } \min\left(20t_1^{-1}t_2t_3^{-3} + 40t_2^{-1}t_3\right)$$

при условиях

$$\frac{1}{3}t_1t_2 + \frac{2}{3}t_1t_2t_3^2 \leqslant 1, \; t_1, t_2, t_3 \geqslant 0.$$

3.44.

$$\text{Найти } \min\left(30t_1^{-1}t_2t_3^{-1} + 10t_2^{-1}t_3\right)$$

при условиях

$$\frac{2}{3}t_1t_2 + \frac{1}{3}t_1^{-1}t_2t_3^{-4} \leqslant 1, \; t_1, t_2, t_3 \geqslant 0.$$

3.45.

$$\text{Найти } \min\left(5t_1t_2t_3 + 10t_2t_3\right)$$

при условиях

$$\frac{1}{5}t_1^{-1}t_2^{-2} + \frac{2}{5}t_1^{-1}t_3^{-4} \leqslant 1, \; t_1, t_2, t_3 \geqslant 0.$$

3.46.

$$\text{Найти } \min\left(20t_1t_2t_3 + 30t_2t_3\right)$$

при условиях

$$\frac{1}{5}t_1^{-\frac{3}{4}}t_2^{-1} + \frac{2}{5}t_1t_2t_3^{-1} \leqslant 1; \quad t_1 \geqslant 0, \; t_2 \geqslant 0, \; t_3 \geqslant 0.$$

3.47.

$$\text{Найти } \min\left(5t_1^{\frac{1}{2}}t_2t_3^2 + 10t_2^{-2}t_3^{\frac{1}{2}} + 20t_1^{-1}t_2t_3^{-1}\right)$$

при условиях

$$t_1t_2^4t_3^{-4} \leqslant 1, \; t_1, t_2, t_3 \geqslant 0.$$

3.48.

$$\text{Найти } \min\left(30t_1t_2t_3 + 20t_2^{-1}t_3^{-1}\right)$$

при условиях

$$\frac{1}{3}t_1^{-2}t_2^{-3} + \frac{2}{3}t_1^{-1}t_3^{-2} \leqslant 1, \quad t_1, t_2, t_3 \geqslant 0.$$

3.49.

$$\text{Найти } \min\left(10t_1t_2t_3 + 20t_1^{-1}t_3^{-2} + 30t_1^{-1}t_2^{-2}t_3^{-3}\right)$$

при условиях

$$15t_1t_2t_3^4 \leqslant 1, \; t_1, t_2, t_3 \geqslant 0.$$

3.50.

$$\text{Найти } \min(5t_1t_2t_3 + 10t_1^{-1}t_3^{-2} + 20t_2t_3)$$

при условиях

$$\frac{1}{3}t_1^{-2}t_2^{-3}t_3^{-3} + \frac{2}{3}t_1t_2^2 \leqslant 1,\ t_1, t_2, t_3 \geqslant 0.$$

3.51.

$$\text{Найти } \min(10t_1t_2t_3 + 20t_1^{-1}t_3^{-2})$$

при условиях

$$\frac{1}{3}t_2t_3 + \frac{2}{3}t_1^{-2}t_2^{-3} + \frac{4}{3}t_1t_3 \leqslant 1,\ t_1 \geqslant 0,\ t_2 \geqslant 0,\ t_3 \geqslant 0.$$

3.52.

$$\text{Найти } \min(20t_1^{-1}t_2^{-\frac{1}{2}}t_3^{-1} + 40t_1t_3 + 10t_1t_2t_3)$$

при условиях

$$\frac{4}{3}t_1^{-2}t_2^{-2} + \frac{1}{3}t_2^{\frac{1}{2}}t_3^{-1} \leqslant 1,\ t_1 \geqslant 0,\ t_2 \geqslant 0,\ t_3 \geqslant 0.$$

3.53.

$$\text{Найти } \min(4t_1t_2t_3 + 8t_1^{-1}t_2^{-3}t_3^{-\frac{1}{3}})$$

при условиях

$$\frac{1}{5}t_1t_3 + \frac{4}{5}t_2t_3^{-\frac{1}{2}} \leqslant 1,\quad t_1, t_2, t_3 \geqslant 0.$$

3.54.

$$\text{Найти } \min(20t_1t_2t_3^{-1} + 10t_2t_3)$$

при условиях

$$\frac{1}{3}t_1^{\frac{1}{2}}t_2^2t_3 + \frac{2}{3}t_1^{-1}t_2^{-3}t_3^{-1} \leqslant 1,\quad t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, t_3 \geqslant 0.$$

3.55.

$$\text{Найти } \min(5t_1t_3 + 10t_1^{-1}t_2^2t_3)$$

при условиях

$$\frac{2}{5}t_1^{-1}t_2t_3^{-2} + \frac{1}{5}t_1^{-1}t_2^{-4}t_3^{-1} \leqslant 1,\quad t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, t_3 \geqslant 0.$$

3.56.

$$\text{Найти } \min(5t_1t_2t_3 + 10t_1t_2t_4 + 15t_2^{-1}t_3^{-1}t_4^{-1})$$

при условиях

$$\frac{1}{5}t_1^{-1}t_2^{\frac{1}{2}}t_3 + \frac{3}{5}t_1^{-2}t_3t_4^{-1} \leqslant 1,\quad t_1 \geqslant 0, t_2 \geqslant 0, t_3 \geqslant 0.$$

3.57.

$$\text{Найти } \min\,(5t_1^{-1}t_2^{-2}t_3 + 10t_2t_3 + 20t_1t_3^{-3})$$

при условиях

$$\frac{1}{5}t_1t_2t_3^{-4} + \frac{2}{5}t_1^{-1}t_2^3t_3^7 \leqslant 1, \quad t_1 \geqslant 0,\ t_2 \geqslant 0,\ t_3 \geqslant 0.$$

3.58.

$$\text{Найти } \min\,(5t_1t_2t_3 + 20t_1t_2^{\frac{1}{2}}t_3^{-2})$$

при условиях

$$\frac{1}{3}t_1^{-1}t_3 + \frac{2}{3}t_1^{-2}t_2^{-5} \leqslant 1, \quad t_1 \geqslant 0,\ t_2 \geqslant 0,\ t_3 \geqslant 0.$$

3.59.

$$\text{Найти } \min\,(20t_1t_2t_3 + 10t_2t_3^{-1})$$

при условиях

$$\frac{4}{3}t_1t_2^{-2}t_3 + \frac{1}{3}t_1^{-2}t_2^{-1}t_3^{-\frac{3}{2}} \leqslant 1, \quad t_1 \geqslant 0,\ t_2 \geqslant 0,\ t_3 \geqslant 0.$$

3.60.

$$\text{Найти } \min\,(10t_1t_2t_3^2 + 5t_1^{-1}t_2^{-2})$$

при условиях

$$\frac{1}{5}t_1^2t_2^{-\frac{1}{2}}t_3^{-3} + \frac{4}{5}t_1^{-1}t_3^{-1} + \frac{2}{5}t_1^{-3}t_2^4t_3^3 \leqslant 1, \quad t_1 \geqslant 0,\ t_2 \geqslant 0,\ t_3 \geqslant 0.$$

3.5. МЕТОДЫ ПОИСКА ЭКСТРЕМУМА БЕЗ ОГРАНИЧЕНИЙ

Известные методы отыскания экстремумов нелинейных функций в зависимости от используемой информации для получения следующей точки можно разбить на три группы.

1. Прямые методы, которые используют только значения функций.

2. Методы первого порядка, использующие дополнительно и значения первых производных.

3. Методы второго порядка, которые требуют знания и вторых производных.

Заметим, что производные могут вычисляться как аналитически (если функция задана аналитически), так и численно.

Методы поиска экстремума первого порядка

Градиентные методы

Градиентные методы представляют собой одну из наиболее многочисленных групп методов поиска экстремума, и все они используют значения градиента функции $f(X)$.

Обозначим вектор-градиент $f(X)$ в точке X_k через $\nabla f(X_k)$:

$$\nabla f(X_k) = \left[\frac{\partial f(X_k)}{\partial x_1}, \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_2}, \ldots, \frac{\partial f(X_k)}{\partial x_n}\right].$$

Тогда движение представляющей точки в градиентном методе описывается уравнением

$$X_{k+1} = X_k - \lambda_k \nabla f(X_k), \tag{3.5.1}$$

где λ_k — величина шага на k-й итерации ($\lambda_k > 0$).

В различных вариантах градиентного метода используются различные способы выбора скаляра λ. Этот выбор может зависеть также и от степени близости X_k к X^*. В том случае, если величина шага λ определяется из условия

$$\lambda^* = \min_{\lambda > 0} f(X_k - \lambda s_k), \tag{3.5.2}$$

то соответствующий метод называется методом наискорейшего спуска (он был предложен еще Коши).

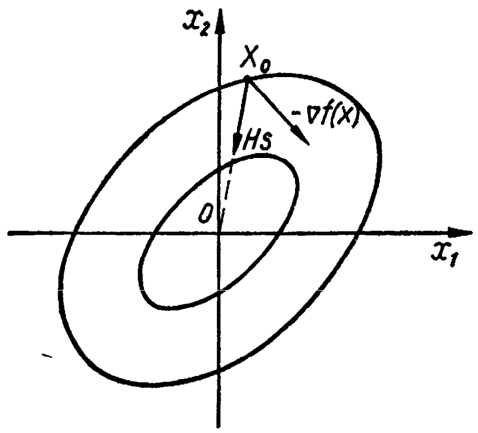

Рис. 3.1

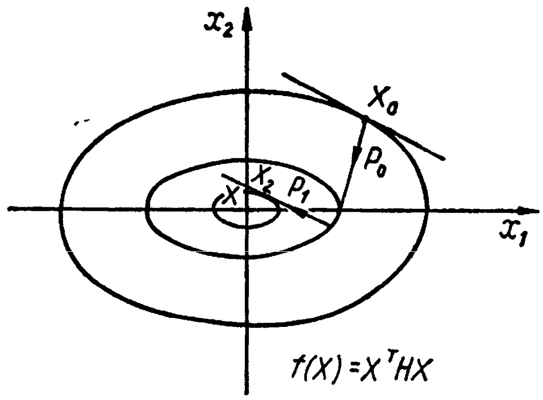

Рис. 3.2

Согласно этому методу в качестве X_{k+1} выбирается такая точка, расположенная в направлении s_k, в которой функция $f(X)$ принимает минимальное значение. Затем определяется новое значение градиента $\nabla f(X_{k+1})$ в точке X_{k+1} и процедура повторяется вновь. Метод наискорейшего спуска еще называют полношаговым методом.

Заметим, что метод наискорейшего спуска в общем случае не обладает какими-то оптимальными свойствами, например способностью отыскивать искомую точку X^* за минимальное число шагов или при минимальном объеме вычислений. Это можно проиллюстрировать на примере минимизации квадратичной функции. Найти

$$\min f(X) = \frac{1}{2} X^T H X, \tag{3.5.3}$$

где матрица H — положительно-определенная. В этом случае $f(X) > 0$ для всех $X \neq 0$ и $f(0) = 0$ и, следовательно, $f(X)$ достигает минимума при $X^* = 0$.

Так как

$$\nabla f(X) = HX = s, \tag{3.5.4}$$

то в соответствии с методом наискорейшего спуска нужно найти

$$\min f(X - \lambda s) = \min X^T (H - 2\lambda H^2 + \lambda^2 H^3) X. \tag{3.5.5}$$

Беря производные в выражении (3.5.5) по λ, получим оптимальную величину шага

$$\lambda^* = \frac{X^T H^2 X}{X^T H^3 X}. \tag{3.5.6}$$

Если обратиться к геометрической интерпретации (рис. 3.1), то станет ясно, что луч $X - \lambda s = X - \lambda \nabla f(X)$, $\lambda > 0$, исходящий из точки X в направлении $\nabla f(X)$, не проходит через точку минимума $X^* = 0$. Следовательно, за один шаг точки X^* нельзя достигнуть, если только X_0 не оказывается лежащей на одной из полуосей эллипса, задаваемого функцией $X^T H X$. Направление, вдоль которого должен производиться поиск точки минимума,— это направление, соединяющее точку $\mathbf{X}$ с началом координат $\mathbf{H}^{-1}\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X})$. Если мы ведем поиск по направлению $\mathbf{H}^{-1}\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X})$, то начало может быть достигнуто за один шаг при $\lambda^* = 1$, так как

$$f(\mathbf{X} - \mathbf{H}^{-1}\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X})) = f(\mathbf{X} - \mathbf{H}^{-1}\mathbf{H}\mathbf{X}) = f(0) = 0. \tag{3.5.7}$$

Таким образом, в данном случае метод наискорейшего спуска оказывается хуже, чем метод, согласно которому поиск производится в направлении $\mathbf{H}^{-1} \times \times \nabla \mathbf{f}(X)$. При методе наискорейшего спуска приближение к точке минимума происходит зигзагообразно. Введем вектор $\mathbf{P}_k = \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k$. Тогда вектор-градиент $\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k+1})$ ортогонален к вектору $\mathbf{P}_k$, поскольку $\mathbf{X}_{k+1}$ был выбран путем минимизации $f(\mathbf{X}_k - \lambda \mathbf{s}_k)$. Таким образом, последовательность точек $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \ldots, \mathbf{X}_k$, вырабатываемых методом наискорейшего спуска, зигзагообразно приближается к точке $\mathbf{X}^*$ (рис. 3.2). Заметим, что на рис. 3.2. вектор $\mathbf{P}_0$ параллелен $\mathbf{P}_2$, $\mathbf{P}_3$ параллелен $\mathbf{P}_1$ и т. д.

Описание алгоритма наискорейшего спуска

Начальный этап. Пусть $\varepsilon > 0$ — константа остановки. Выбрать начальную точку $\mathbf{X}_1$, положить $k = 1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап. Если $\|\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}_k)\| < \varepsilon$, то нужно остановиться, в противном случае положить $\mathbf{s}_k = -\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}_k)$ и найти λ_k — оптимальное решение задачи минимизации $f(\mathbf{X}_k + \lambda \mathbf{s}_k)$ при $\lambda \geqslant 0$. Положить $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \lambda_k \mathbf{s}_k$, заменить k на $k + 1$ и повторить основной этап.

Пример 3.6. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать } (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2.$$

Будем решать ее методом наискорейшего спуска при начальной точке $\mathbf{X}_0 = [0.00;\ 3.00]^T$. В табл. 3.11 приведены результаты вычислений. После семи итераций получена точка $\mathbf{X}_8 = [2.28;\ 1.15]^T$. Так как норма $\|\nabla f(\mathbf{X}_8)\| = 0.09$ достаточно мала ($\varepsilon = 0.10$),

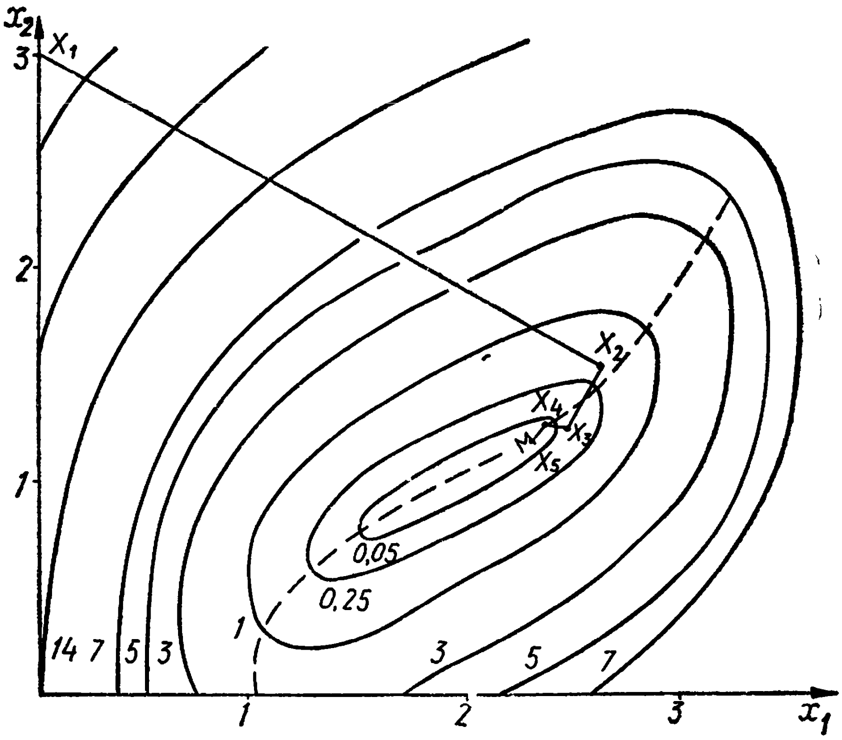

Рис. 3.3

Таблица 3.11

k	X_k	$f(X_k)$	$\nabla f(X_k)$	$\|\nabla f(X_k)\|$	$s_k = -\nabla f$	λ_k	X_{k+1}
1	[0.00; 3.0]	52.00	[—44.00; 24.00]	50.12	[44.00; 24.00]	0.062	[2.70; 1.51]
2	[2.70; 1.51]	0.34	[0.73; 1.28]	1.47	[—0.73; 1.28]	0.24	[2.52; 1.20]
3	[2.52; 1.20]	0.09	[0.80; —0.48]	0.93	[—0.80; 0.48]	0.11	[2.43; 1.25]
4	[2.43; 1.25]	0.04	[0.18; 0.28]	0.33	[—0.18; —0.28]	0.31	[2.37; 1.16]
5	[2.37; 1.16]	0.02	[0.30; —0.20]	0.36	[—0.30; 0.20]	0.12	[2.33; 1.18]
6	[2.33; 1.18]	0.01	[0.08; 0.12]	0.14	[—0.08; —0.12]	0.36	[2.30; 1.14]
7	[2.30; 1.14]	0.009	[0.15; —0.08]	0.17	[—0.15; 0.08]	0.13	[2.28; 1.15]
8	[2.28; 1.15]	0.007	[0.05; 0.08]	0.09			

то работа алгоритма остановлена. На рис. 3.3 показан процесс минимизации этим методом. Заметим, что точкой минимума для данной задачи является $X^* = [2.00;\ 1.00]^T$.

Метод вторых производных (Метод Ньютона)

Градиентные методы поиска, включая метод наискорейшего спуска, используют линейную аппроксимацию целевой функции (3.5.1). Методы вторых производных, в частности метод Ньютона, возникли из квадратичной аппроксимации $f(X)$.

Рассмотрим схему метода Ньютона.

Направление поиска s в методе Ньютона выбирается следующим образом. Найдем квадратичную аппроксимацию функции $f(X)$ в окрестности точки X_k путем разложения ее в ряд Тэйлора:

$$f(X) = f(X_k) + \nabla^T f(X_k)(X - X_k) + \frac{1}{2}(X - X_k)^T \nabla^2 f(X_k)(X - X_k), \quad (3.5.8)$$

где $\nabla^2 f(X_k)$ — матрица Гессе функции $f(X)$, представляющая собой матрицу вторых частных производных $f(X)$ в точке X_k:

$$\nabla^2 f(X_k) = H(X_k) = \left\| \frac{\partial^2 f(X_k)}{\partial x_i \partial x_j} \right\| i = \overline{1, n},\ j = \overline{1, n}. \quad (3.5.9)$$

Заменим в разложении (3.5.8) X на X_{k+1}, а $X - X_k$ на ΔX_k и получим квадратичную аппроксимацию $f(X_k)$ через ΔX_k:

$$f(X_{k+1}) = f(X_k) + \nabla^T f(X_k)\Delta X_k + \frac{1}{2}\Delta X_k^T \nabla^2 f(X_k)\Delta X_k.$$

Найдем направление $\Delta X_k = X_{k+1} - X_k$, в котором $f(X_{k+1})$ будет минимальна. Для этого продифференцируем $f(X_k)$ по каждой из компонент ΔX_k и приравняем к 0 полученные выражения. В результате приходим к соотношениям:

$$\Delta X_k = -[\nabla^2 f(X_k)]^{-1} \nabla f(X_k). \quad (3.5.10)$$

где $[\nabla^2 f(X_k)]^{-1}$ — матрица, обратная матрице Гессе в точке X_k. Тогда переход из X_k в X_{k+1} по методу Ньютона будет описываться соотношением

$$X_{k+1} = X_k - [\nabla^2 f(X_k)]^{-1} \nabla f(X_k). \quad (3.5.11)$$

Заметим, что здесь как направление, так и величина шага точки определены. Если $f(X)$ — квадратичная функция, то $\nabla^2 f(X) = H$, и для достижения минимума $f(X)$ достаточно только одного шага. Но в общем случае минимума $f(X)$ нельзя достичь за один шаг и поэтому уравнение поиска (3.5.11) обычно приводят к стандартному виду

$$X_{k+1} = X_k - \lambda_k s_k, \quad (3.5.12)$$

Таблица 3.12

k	$\mathbf{X}_k$	$f(\mathbf{X}_k)$	$\nabla f(\mathbf{X}_k)$	$\mathbf{H}(\mathbf{X}_k)$	$\mathbf{H}(\mathbf{X}_k)^{-1}$	$-\mathbf{H}(\mathbf{X}_k)^{-1} \times \nabla f(\mathbf{X}_k)$	$\mathbf{X}_{k+1}$
1	[0.0; 3.0]	52.0	[—44.0, 24.0]	$\begin{bmatrix} 50.0 & -4.0 \\ -4.0 & 8.0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{384}\begin{bmatrix} 8.0 & 4.0 \\ 4.0 & 50.0 \end{bmatrix}$	[0.67; —2.67]	[0.67; 0.33]
2	[0.67; 0.33]	3.13	[—9.4, —0.04]	$\begin{bmatrix} 23.2 & -4.0 \\ -4.0 & 8.0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{170}\begin{bmatrix} 8.0 & 4.0 \\ 4.0 & 23.2 \end{bmatrix}$	[0.44; 0.23]	[1.11; 0.56]
3	[1.11; 0.56]	0.63	[—2.84 —0.04]	$\begin{bmatrix} 11.5 & -4.0 \\ -4.0 & 8.0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{76}\begin{bmatrix} 8.0 & 4.0 \\ 4.0 & 11.5 \end{bmatrix}$	[0.30; 0.14]	[1.41; 0.75]
4	[1.41; 0.70]	0.12	[—0.80; 0.14]	$\begin{bmatrix} 6.2 & -4.0 \\ -4.0 & 8.0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{33.4}\begin{bmatrix} 8.0 & 4.0 \\ 4.0 & 6.2 \end{bmatrix}$	[0.20; 0.10]	[1.61; 0.80]
	[1.61; 0.80]	0.02	$\begin{bmatrix} -0.22; \\ -0.04 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 3.83 & -4.0 \\ -4.0 & 8.0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{14.6}\begin{bmatrix} 8.0 & 4.0 \\ 4.0 & 3.83 \end{bmatrix}$	[0.13; 0.07]	[1.74; 0.87]
6	[1.74; 0.87]	0.005	[—0.07; 0.0]	$\begin{bmatrix} 2.81 & -4.0 \\ -4.0 & 8.0 \end{bmatrix}$	$\frac{1}{6.48}\begin{bmatrix} 8.0 & 4.0 \\ 4.0 & 2.8 \end{bmatrix}$	[0.09; 0.04]	[1.83; 0.91]
7	[1.83; 0.91]	0.0009	[0.0003; —0.04]				

(где s_k — единичный вектор) путем введения длины шага как параметра:

$$X_{k+1} = X_k - \lambda \frac{[\nabla^2 f(X_k)]^{-1} \nabla f(X_k)}{\| [\nabla^2 f(X_k)]^{-1} \nabla f(X_k) \|}. \qquad (3.5.13)$$

Уравнение поиска (3.5.13) применяется итеративно, пока не будет удовлетворен критерий окончания процесса.

Критерий, гарантирующий сходимость метода Ньютона, в предположении, что $f(X)$ — дважды непрерывно дифференцируема, заключается в том, что матрица, обратная матрице Гессе, должна быть положительно определенной.

Пример 3.7. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать } (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^4.$$

Соответствующие результаты вычислений приведены в табл. 3.12. На каждой итерации точка X_{k+1} определяется по формуле

$$X_{k+1} = X_k - H(X_k)^{-1} \nabla f(X_k).$$

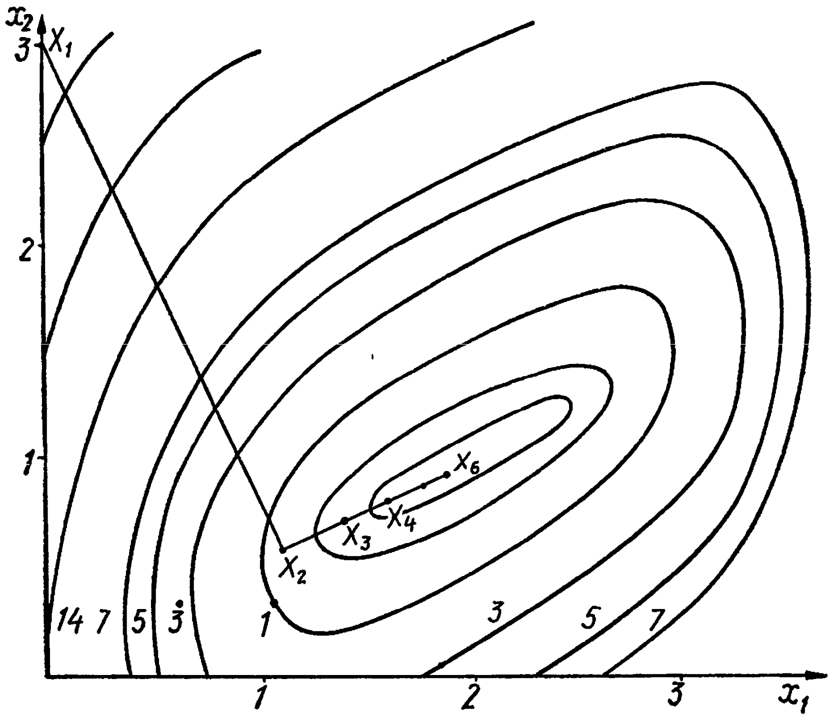

Рис. 3.4

После шести итераций получена точка $X_7 = [1.83;\ 0.91]^T$. В этой точке $\|\nabla f(X_7)\| = 0.04$, и процедура остановлена.

Траектория движения, построенная по методу Ньютона, приведена на рис. 3.4.

Метод сопряженных направлений

Допустим, что необходимо минимизировать $f(X)$ и процесс минимизации начинается в точке X_0 с начальным направлением s_0. Тогда вектор X_1 определяется соотношением

$$X_1 = X_0 - \lambda_0 s_0, \qquad (3.5.14)$$

где длина шага λ_0 находится из условия минимума $f(X)$ по λ:

$$\frac{\partial f(X_0 - \lambda s_0)}{\partial \lambda} = 0.$$

После вычисления λ_0 и X_1 для продолжения процесса минимизации $f(X)$ необходимо выбрать новое направление. Это направление s_1 называется сопряженным к старому направлению s_0, если выполняется условие:

$$s_1^T \nabla f(X_0)\, s_0 = 0. \tag{3.5.15}$$

В общем случае система линейно независимых направлений поиска $s_1, s_2, \ldots$ $\ldots, s_{n-1}$ называется сопряженной по отношению к некоторой положительно определенной матрице Q, если

$$s_i^T Q s_j = 0, \quad i \neq j, \ i, j = 1, \overline{n-1}. \tag{3.5.16}$$

Отметим, что сопряженность — понятие, аналогичное ортогональности, так как если $H = I$ то, в соответствии с (3.5.16) $s_i^T s_j = 0$.

Для некоторой матрицы H всегда существует, по крайней мере, одна система из n взаимосопряженных направлений, так как собственные векторы H представляют такую систему.

Метод сопряженного градиента

В методе сопряженного градиента (Флетчера — Ривса) строится последовательность направлений поиска, являющихся линейными комбинациями $\nabla f(X_k)$, текущего направления s_k и предыдущих направлений $s_0, s_1, \ldots, s_{k-1}$, причем таких, чтобы сделать направления поиска сопряженными. При этом для вычисления нового направления поиска в точке X_k используется только текущий градиент и предпоследний градиент.

Рассмотрим идею метода. Пусть исходным направлением поиска будет $s_0 = -\nabla f(X_0)$. Положим $X_1 - X_0 = \lambda_0^* s_0$ и построим

$$s_1 = -\nabla f(X_1) + \omega_1 S_0, \tag{3.5.17}$$

где ω_1 — весовой коэффициент, который выбирается так, чтобы сделать s_1 и s_0 сопряженными по отношению к H:

$$s_0^T H s_1 = 0. \tag{3.5.18}$$

Чтобы исключить s_0 из (3.5.18), воспользуемся очевидным соотношением

$$\nabla f(X_{k+1}) - \nabla f(X_k) = \nabla^2 f(X_k)(X_{k+1} - X_k) = H\lambda_k s_k, \tag{3.5.19}$$

где $\lambda_k s_k = \Delta X_k$, а также соотношением

$$s_0^T = \frac{(X_1 - X_0)^T}{\lambda_0^*} = \frac{[\nabla f(X_1) - \nabla f(X_0)]^T H^{-1}}{\lambda_0^*}.$$

Следовательно, $[\nabla f(X_1) - \nabla f(X_0)]^T H[-\nabla f(X_1) + \omega_1 s_0] = 0$.

Вследствие рассмотренных выше свойств все перекрестные члены исчезают так, что

$$\omega = \frac{\nabla^T f(X_1)\nabla f(X_1)}{\nabla^T f(X_0)\nabla f(X_0)}. \tag{3.5.20}$$

Направление поиска s_2 представляется в виде линейной комбинации $\nabla f(X_2)$, s_1 и s_0, причем так, чтобы оно было сопряженным s_1. Повторив приведенные выше выкладки для случаев $s = 2, 3$ и т. д., получим

$$\omega_k = \frac{\nabla^T f(X_k)\nabla f(X_k)}{\nabla^T f(X_{k-1})\nabla f(X_{k-1})} = \frac{\|\nabla f(X_k)\|^2}{\|\nabla f(X_{k-1})\|^2}. \tag{3.5.21}$$

В заключение приведем вычислительную схему алгоритма.

Начальный этап. Выбрать $\varepsilon > 0$ для остановки алгоритма и начальную точку X_1. Положить $y_1 = X_1$, $s_1 = -\nabla f(X_1)$, $k = j = 1$ и перейти к основному этапу.

Таблица 3.13

k	X_k	$f(X_k)$	j	Y_j	$f(Y_j)$	$\nabla f(Y_j)$	$\|\nabla f(Y_j)\|$	ω_j	s_j	λ_j	Y_{j+1}
1	[0.0; 3.0]	52.00	1	[0.0; 3.0]	52.0	[—44.0; 24.0]	50.12	—	[44.0; —24.0]	0.062	[2.7; 1.51]
			2	[2.7; 1.51]	0.34	[0.73; 1.28]	1.47	0.0009	[—0.69; 1.3]	0.23	[2.54; 1.21]
2	[2.54; 1.21]	0.10	1	[2.54; 1.21]	0.10	[0.87; —0.48]	0.99	—	[—0.87; 0.48]	0.11	[2.44; 1.26]
			2	[2.44; 1.26]	0.04	[0.18; 0.32]	0.37	0.14	[—0.30; —0.25]	0.63	[2.25; 1.10]
3	[2.25; 1.10]	0.08	1	[2.25; 1.10]	0.008	[0.16; —0.20]	0.32	—	[—0.16; 0.20]	0.10	[2.23; 1.12]
			2	[2.23; 1.12]	0.003	[0.03; 0.04]	0.05	0.04	[—0.036; —0.03]	1.02	[2.19; 1.09]
4	[2.19; 1.09]	0.0017	1	[2.19; 1.09]	0.0017	[0.05; —0.04]	0.06	—	[—0.05; 0.04]	0.11	[2.185; 1.094]
			2	[2.185; 1.094]	0.0012	[0.02; 0.01]	0.022				

Основной этап. Шаг 1. Если $\| \nabla f(Y_j) \| < \varepsilon$, то остановиться. В противном случае взять в качестве λ_j оптимальное решение задачи минимизации $f(y_j + \lambda s_j)$ при $\lambda \geqslant 0$ и положить $Y_{j+1} = Y_j + \lambda_j s_j$. Если $j < n$, то перейти к шагу 2, в противном случае — к шагу 3.

Шаг 2. Положить $s_{j+1} = -\nabla f(Y_{j+1}) + \omega_j s_j$, (3.5.22), где

$$\omega_j = \frac{\| \nabla f(Y_{j+1}) \|^2}{\| \nabla f(Y_j) \|^2}.$$

Заменить j на $j+1$ и перейти к шагу 1.

Шаг 3. Положить $Y_1 = X_{k+1} = Y_{n+1}$, $s_1 = -\nabla f(Y_1)$, $j = 1$, заменить k на $k+1$ и перейти к шагу 1.

Важным достоинством алгоритма сопряженных градиентов является то, что здесь не требуется обращать матрицу Гессе H, кроме того, программа требует довольно ограниченного объема памяти ЭВМ.

Пример 3.8. В качестве примера рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать } (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2.$$

Результаты вычислений по методу сопряженных градиентов приведены в табл. 3.13. На каждой итерации $s_1 = -\nabla f(Y_1)$, а $s_2 = -\nabla f(Y_2) + \omega_1 s_1$, где $\omega_1 = \| \nabla f(Y_2) \|^2 / \| \nabla f(Y_1) \|^2$.

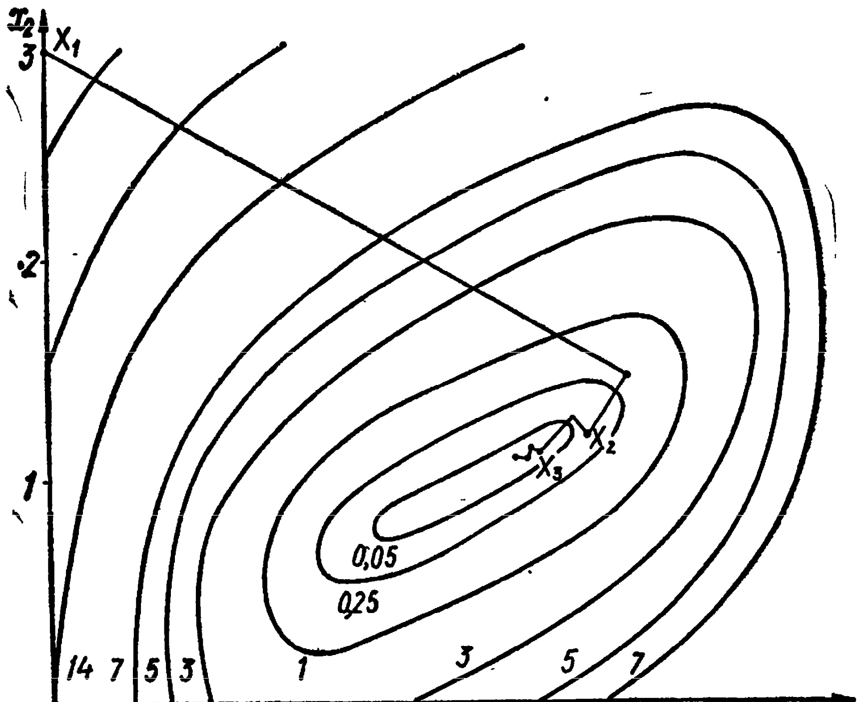

Рис. 3.5

Кроме того, Y_{j+1} получен оптимизацией вдоль s_j с начальной точкой Y_j. После четвертой итерации получена точка $Y_2 = [2.185; 1.094]^T$, которая достаточно близка к оптимальной точке $[2.0; 1.0]^T$. Поскольку норма градиента в этой точке, равная 0.02, весьма мала, то процедура была остановлена. На рис. 3.5 показан процесс решения задачи методом сопряженных градиентов.

Методы переменной метрики

Для применения метода Ньютона необходимо знать матрицу Гессе и выполнить ее обращение. Однако во многих случаях может оказаться, что матрица $\mathbf{H}(\mathbf{X})$ неизвестна, либо ее вычисление связано с большими трудностями. Кроме того, как известно, число умножений при обращении матрицы порядка $(n \times n)$ пропорционально n^3, что требует больших вычислительных затрат при небольших n. В связи с этим разработана группа методов, в которых матрица $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X})$ строится постепенно в процессе спуска. Эти методы получили название методов переменной метрики, или квази-ньютоновских методов.

При использовании методов переменной метрики новый вектор $\mathbf{X}_{k+1}$ вычисляется согласно уравнению

$$\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \lambda_k \mathbf{s}_k = \mathbf{X}_k - \lambda_k \mathbf{D}(\mathbf{X}_k)\nabla f(\mathbf{X}_k), \tag{3.5.23}$$

где матрица $\mathbf{D}(\mathbf{X}_k)$, которую называют матрицей направлений, представляет собой аппроксимацию $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X})$. Для оценки воспользуемся следующим полезным соотношением, связывающим $\mathbf{X}_k$ и $\mathbf{X}_{k+1}$ для случая квадратичной целевой функции:

$$\nabla f(\mathbf{X}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{X}_k) = \mathbf{H}(\mathbf{X}_k)(\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k). \tag{3.5.24}$$

Умножая обе части (3.5.24) на $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X}_k)$, получим

$$\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k = \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X}_k)(\nabla f(\mathbf{X}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{X}_k)). \tag{3.5.25}$$

Если при этом $f(\mathbf{X})$ — квадратичная функция, то $\mathbf{H}(\mathbf{X}_k) = \mathbf{H}$. Уравнения (3.5.25) можно рассматривать как систему n линейных уравнений, содержащих n неизвестных параметров, которые нужно оценить для того, чтобы аппроксимировать $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X})$ при заданных значениях $f(\mathbf{X})$, $\nabla f(\mathbf{X})$ и $\Delta\mathbf{X}$. Для решения этой системы могут быть применены различные методы, каждый из которых приводит к различным методам переменной метрики.

В довольно большой группе методов $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X}_k)$ аппроксимируется с помощью информации, полученной на k-м шаге следующим образом:

$$\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X}_{k+1}) \approx \omega \mathbf{D}_{k+1} = \omega(\mathbf{D}_k + \Delta\mathbf{D}_k), \tag{3.5.26}$$

где $\mathbf{D}_k$ — матрица, аппроксимирующая $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X}_k)$; $\Delta\mathbf{D}_k$ вычисляется на k-м шаге для уточнения аппроксимации; ω — масштабный множитель. Выбор $\Delta\mathbf{D}_k$ по существу определяет метод переменной метрики. Для обеспечения сходимости $\omega\mathbf{D}_{k+1}$ должна быть положительно определенной и удовлетворять уравнению (3.5.26), будучи представленной вместо $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X})$. Поскольку на $(k+1)$-м шаге нам известны $\mathbf{X}_k$, $\nabla f(\mathbf{X}_k)$, $\nabla f(\mathbf{X}_{k+1})$ и $\mathbf{D}_k$, вычислим $\mathbf{D}_{k+1}$ так, чтобы удовлетворялось соотношение

$$\mathbf{D}_{k+1}(\nabla f(\mathbf{X}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{X}_k)) = \mathbf{D}_{k+1}\Delta\mathbf{g}_k = \frac{1}{\omega}\Delta\mathbf{X}_k, \tag{3.5.27}$$

где

$$\Delta\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{X}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{X}_k).$$

Пусть $\Delta\mathbf{D}_k = \mathbf{D}_{k+1} - \mathbf{D}_k$. Тогда уравнение

$$\Delta\mathbf{D}_k\Delta\mathbf{g}_k = \frac{1}{\omega}\Delta\mathbf{X}_k - \mathbf{D}_k\Delta\mathbf{g}_k \tag{3.5.28}$$

нужно разрешить относительно $\Delta\mathbf{D}_k$.

Непосредственной подстановкой в (3.5.28) можно проверить, что уравнение (3.5.28) имеет решение:

$$\Delta\mathbf{D}_k = \frac{1}{\omega}\frac{\Delta\mathbf{X}_k\mathbf{Y}^T}{\Delta\mathbf{g}_k^T\mathbf{Y}} - \frac{\mathbf{D}_k\Delta\mathbf{g}_k\mathbf{Z}^T}{\Delta\mathbf{g}_k^T\mathbf{Z}}, \tag{3.5.29}$$

где $\mathbf{Y}$ и $\mathbf{Z}$ произвольные векторы размерности $n \times 1$. Если выбрать $\mathbf{Y} = \mathbf{Z} = \Delta \mathbf{X}_k - \mathbf{D}_k \Delta \mathbf{g}_k$, $\omega = 1$, то получим так называемый алгоритм Бройдена, если же в (3.5.29) $\mathbf{Y} = \Delta \mathbf{X}_k$, а $\mathbf{Z} = \mathbf{D}_k \Delta \mathbf{g}_k$, то получим алгоритм Дэвидона — Флэтчера — Пауэлла.

Метод Дэвидона—Флэтчера—Пауэлла

В варианте метода переменной метрики, предложенном Дэвидоном, Флэтчером и Пауэллом, для нахождения матрицы $\mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X})$ используется матрица $\Delta \mathbf{D}$, имеющая ранг, равный 2. Матрица направлений $\mathbf{D}$ перевычисляется таким образом, чтобы для квадратичной целевой функции после n шагов $\mathbf{D}_n = \mathbf{H}^{-1}$. Исходная матрица $\mathbf{D}_0$ обычно выбирается в виде единичной матрицы $\mathbf{D}_0 = \mathbf{I}$, так что начальное направление минимизации — это направление наискорейшего спуска.

Оценка элементов $\mathbf{H}^{-1}$ в точке экстремума $\mathbf{X}^*$ тем точнее, чем лучше мы выбираем по сравнению с единичной матрицей $\mathbf{I}$ исходную матрицу $\mathbf{D}_0$. В ходе оптимизации имеет место постепенный переход от градиентного направления движения к ньютоновскому, при этом используются преимущества каждого из этих методов на соответствующем этапе.

Алгоритм Дэвидона — Флэтчера — Пауэлла получим, если в уравнении (3.5.29) положим $\mathbf{Y}_k = \Delta \mathbf{X}_k$, $\mathbf{Z}_k = \mathbf{D}_k \Delta \mathbf{g}_k$. Тогда

$$\mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{D}_k + \frac{\Delta \mathbf{X}_k \Delta \mathbf{X}_k^{\mathrm{T}}}{\Delta \mathbf{X}_k^T \Delta \mathbf{g}_k} - \frac{\mathbf{D}_k \Delta \mathbf{g}_k (\mathbf{D}_k \Delta \mathbf{g}_k)^{\mathrm{T}}}{\Delta \mathbf{g}_k^{\mathrm{T}} \mathbf{D}_k \Delta \mathbf{g}_k} = \mathbf{D}_k + \mathbf{A}_k - \mathbf{B}_k. \qquad (3.5.30)$$

Заметим, что так как матрицы $\mathbf{A}_k$ и $\mathbf{B}_k$ в (3.5.30) — симметричные, то если $\mathbf{D}_k$ — симметричная, то и $\mathbf{D}_{k+1}$ будет симметричной.

Роль матрицы $\mathbf{A}_k$ состоит в обеспечении выполнения условия $\mathbf{D} \to \mathbf{H}^{-1}$, тогда как $\mathbf{B}_k$ должна обеспечить положительную определенность $\mathbf{D}_k$ при всех k и исключение влияния выбора начальной матрицы $\mathbf{D}_0$. Используя (3.5.30) многократно при выборе $\mathbf{D}_0 = \mathbf{I}$, через k итераций получим

$$\mathbf{D}_{k+1} = I + \sum_{i=1}^{k} A_i - \sum_{i=1}^{k} \mathbf{B}_i.$$

В случае квадратичной функции $\sum_{i=1}^{k} \mathbf{A}_i$ при $k = n - 1$ должна равняться $\mathbf{H}^{-1}$, а $\sum_{i=1}^{n} \mathbf{B}_i$ должна быть равна $\mathbf{I}$. Заметим, что в случае квадратичной целевой функции в данном алгоритме используются сопряженные направления.

В большинстве вариантов алгоритма Дэвидона функция $f(\mathbf{X})$ минимизируется в каждом выбранном направлении поиска. Для определения минимума $f(\mathbf{X})$ по λ в данном направлении можно применить любую эффективную процедуру одномерного поиска. При этом важно, чтобы эта процедура была эффективной, поскольку относительная большая часть всего времени вычислений приходится на одномерный поиск.

В качестве критерия останова работы алгоритма предлагаем использовать одно из следующих правил.

1. Каждая из составляющих векторов $\mathbf{D}_k \nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}_k)$, $\lambda^* \mathbf{D}_k \nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}_k)$ меньше некоторой наперед заданной величины.

2. Вычисленная норма каждого из этих векторов в точке минимума меньше наперед заданной величины.

Дадим описание алгоритма.

Начальный этап. Пусть $\varepsilon > 0$ — константа для остановки. Выбрать точку $\mathbf{X}_1$ и начальную симметрическую положительно определенную матрицу $\mathbf{D}_1$. Положить $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_1$, $k = j = 1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап. Шаг 1. Если $\| \nabla \mathbf{f}(\mathbf{Y}_j) \| < \varepsilon$, то остановиться; в противном случае положить $\mathbf{s}_j = -\mathbf{D}_j \nabla \mathbf{f}(\mathbf{Y}_j)$ и взять в качестве λ_j оптимальное решение

Таблица 3.14

k	$\mathbf{X}_k$	$f(\mathbf{X}_k)$	j	$\mathbf{Y}_j$	$f(\mathbf{Y}_j)$	$\nabla f(\mathbf{Y}_j)$	$\lVert\nabla f(\mathbf{Y}_j)\rVert$	$\mathbf{D}_j$	$\mathbf{s}_j$	λ_j	$\mathbf{Y}_{j+1}$
1	[0.00; 3.00]	52.00	1	[0.00; 3.00]	52.0	[—44.0; 24.0]	50.12	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	[44.0; —25.0]	0.062	[2.70; 1.51]
			2	[2.70; 1.51]	0.34	[0.73; 1.28]	1.47	$\begin{bmatrix}0.25 & 0.38\\0.38 & 0.25\end{bmatrix}$	[—0.67; 1.31]	0.22	[2.55; 1.22]
2	[2.55; 1.22]	0.1036	1	[2.55; 1.22]	0.1036	[0.89; —0.44]	0.99	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	[—0.89; 0.44]	0.11	[2.45; 1.27]
			2	[2.45; 1.27]	0.05	[0.18; 0.36]	0.40	$\begin{bmatrix}0.65 & 0.45\\0.45 & 0.65\end{bmatrix}$	[—0.28; —0.25]	0.64	[2.27; 1.11]
3	[2.27; 1.11]	0.008	1	[2.27; 1.11]	0.008	[0.18; —0.20]	0.27	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	[—0.18; 0.20]	0.10	[2.25; 1.13]
4	[2.12; 1.05]	0.0005	1	[2.12; 1.05]	0.005	[0.05; —0.08]	0.09	$\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$	[—0.05; 0.08]	0.10	[2.115; 1.058]
			2	[2.115; 1.058]	0.0002	[0.004; 0.004]	0.006				

задачи минимизации $f(\mathbf{Y}_j + \lambda \mathbf{s}_j)$ при $\lambda > 0$. Положить $\mathbf{Y}_{j+1} = \mathbf{Y}_j + \lambda_j \mathbf{s}_j$. Если $j < n$, то перейти к шагу 2. Если $j = n$, то положить $\mathbf{Y}_1 = \mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{Y}_{n+1}$, заменить k на $k + 1$, положить $j = 1$ и повторить шаг 1.

Шаг 2. Построить $\mathbf{D}_{j+1}$ следующим образом:

$$\mathbf{D}_{j+1} = \mathbf{D}_j - \frac{\mathbf{D}_j \Delta \mathbf{g}_j (\mathbf{D}_j \Delta \mathbf{g}_j)^T}{\Delta \mathbf{g}_j^T} + \frac{\mathbf{p}_j \mathbf{p}_j^T}{\mathbf{p}_j \Delta \mathbf{g}_j}, \qquad (3.5.31)$$

где

$$\mathbf{p}_j = \lambda_j \mathbf{s}_j, \quad \Delta \mathbf{g}_j = \nabla \mathbf{f}(\mathbf{Y}_{j+1}) - \nabla \mathbf{f}(\mathbf{Y}_j). \qquad (3.5.32)$$

Заменить j на $j + 1$ и перейти к шагу 1.

Пример 3.9. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать } (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2.$$

Результаты вычислений методом Дэвидона — Флетчера — Пауэлла приведены в табл. 3.14. На каждой итерации вектор $\mathbf{s}_j$ для

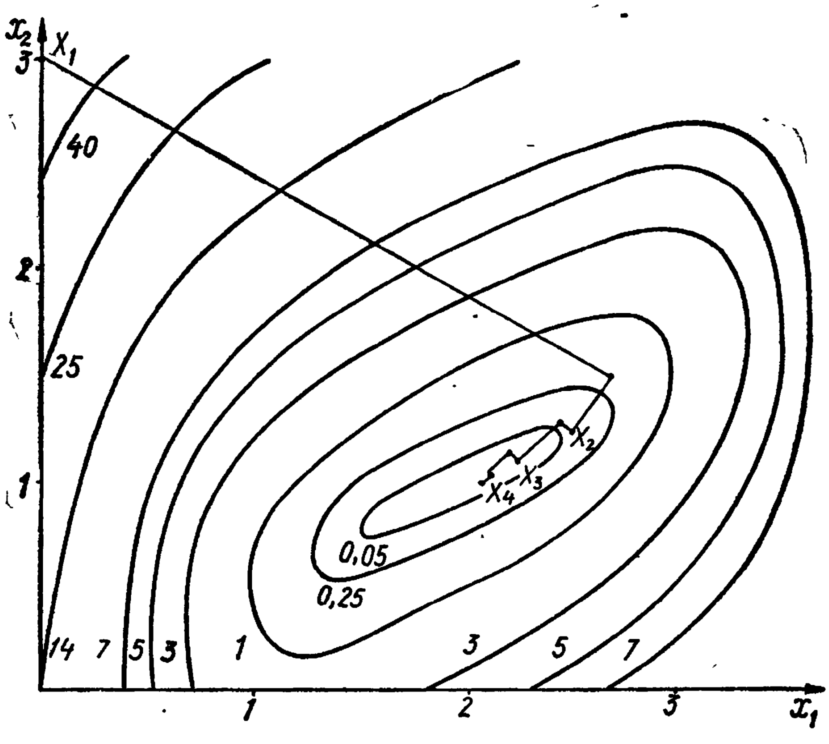

Рис. 3.6

$j = 1,2$ определяется в виде $\mathbf{D}_j \nabla \mathbf{f}(\mathbf{Y}_j)$, где $\mathbf{D}_1 = \mathbf{I}$ — единичная, матрица $\mathbf{D}_2$ определяется по формулам (3.5.31). При $k = 1$ имеем $\mathbf{p}_1 = [2.7; -1.49]^T$; $\Delta \mathbf{g}_1 = [44.73; -22.72]^T$. На второй итерации $\mathbf{p}_1 = [-0.1; 0.05]^T$, $\Delta \mathbf{g}_1 = [-0,7; 0.8]^T$ и, наконец, на третьей итерации $\mathbf{p}_1 = [-0.02; 0.02]^T$, $\Delta \mathbf{g}_1 = [-0.14; 0.24]^T$. Точка $\mathbf{Y}_{j+1}$ вычисляется оптимизацией вдоль направления $\mathbf{s}_j$ при начальной точке $\mathbf{Y}_j$, для $j = 1,2$. Процедура остановлена в точке $\mathbf{Y}_2 = [2.115; 1.058]^T$ на четвертой интерации, так как норма $\| \nabla \mathbf{f}(\mathbf{Y}_2) \| = 0.006$ достаточно мала. Траектория движения, полученная указанным методом, приведена на рис. 3.6.

3.6. ПРЯМЫЕ МЕТОДЫ ПОИСКА

К прямым методам поиска относят методы, в которых для отыскания экстремума не используются производные первого и высших порядков. В этих методах направления поиска полностью определяются на основе последовательных вычислений значений функции $f(X)$.

Как правило, при решении НП-задач и отсутствии ограничения градиентные методы и методы, использующие вторые производные, сходятся быстрее, чем прямые методы поиска. Тем не менее, применяя на практике методы, использующие производные, сталкиваются со следующими трудностями.

Во-первых, в задачах с большим числом переменных трудно или невозможно получить производные в виде аналитических функций, необходимых для градиентных алгоритмов или алгоритмов, использующих высшие производные. Вычисления аналитических производных можно заменить вычислением производных по разностным схемам, однако возникающая при этом ошибка, особенно в окрестности экстремума, ограничивает возможности такой аппроксимации. Прямые методы не требуют выполнения условий регулярности и непрерывности $f(X)$ существования производных.

Во-вторых, градиентные методы оптимизации требуют довольно большого времени по сравнению с прямыми методами на подготовку задачи к решению.

Прямые методы одномерного поиска

Рассмотрим сначала задачу минимизации функции одной переменной $f(X)$ при условии $a \leqslant x \leqslant b$. Поскольку точный локальный минимум f на $[a, b]$ не известен, то естественно назвать этот интервал интервалом неопределенности. Вообще $[a, b]$ называется интервалом неопределенности, если точка минимума $x^* \in [a, b]$, хотя ее точное значение неизвестно.

Рассмотрим некоторые классы функций, сходных с выпуклыми и вогнутыми функциями, но обладающих лишь некоторыми их свойствами.

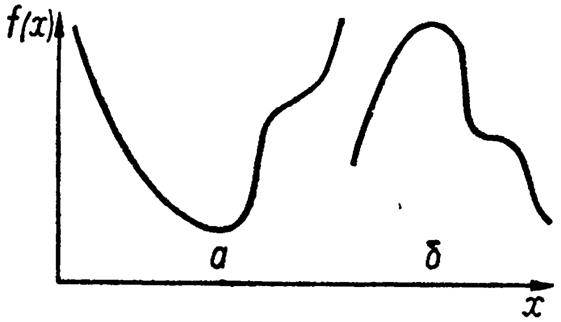

Рис. 3.7

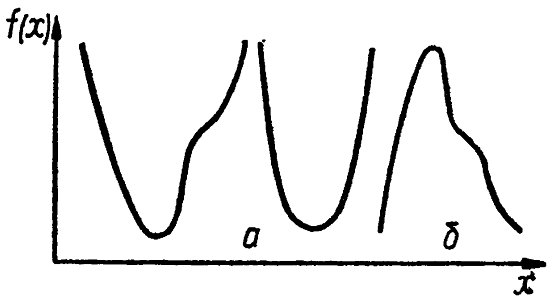

Рис. 3.8

Определение 3.1. Пусть функция $f(X)$ определена на непустом выпуклом множестве R^n. Говорят, что функция f квазивыпукла, если для любых $X_1, X_2 \in R$ и $\lambda \in (0, 1)$ выполняется неравенство

$$f(\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2) \leqslant \max \{f(X_1), f(X_2)\}, \tag{3.6.1}$$

функция $f(X)$ называется квазивогнутой, если $-f(X)$ — квазивыпуклая функция.

Из этого определения следует, что функция f квазивыпукла, если из неравенства $f(X_2) \geqslant f(X_1)$ следует, что $f(X_2)$ не меньше значения функции $f(X)$, в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией точек X_1 и X_2. И наоборот, функция f квазивогнута, если из неравенства $f(X_2) \geqslant f(X_1)$ следует, что $f(X_1)$ не больше значения f в любой точке, являющейся выпуклой комбинацией точек X_1 и X_2.

На рис. 3.7 приводятся примеры квазивыпуклых и квазивогнутых функций.

Определение 3.2. Пусть $f(X)$ определена на непустом выпуклом множестве R. Функция $f(X)$ строго квазивыпукла, если для любых $X_1, X_2 \in R$, таких, что $f(X_1) \neq f(X_2)$, при всех $\lambda \in (0,1)$ справедливо неравенство

$$f[\lambda X_1 + (1 - \lambda) X_2] < \max \{f(X_1); f(X_2)\}. \tag{3.6.2}$$

Функция $f(X)$ называется строго квазивогнутой, если строго квазивыпукла функция $-f(X)$.

На рис. 3.8 изображены строго квазивыпуклые (а) и строго квазивогнутые (б) функции. Из данного определения следует, что любая выпуклая функция является в то же время строго квазивыпуклой. Строго квазивыпуклые и строго квазивогнутые функции называются унимодальными.

Они обладают важным свойством — для них любой локальный минимум (соответственно максимум) является глобальным.

Покажем, что если функция $f(x)$ выпукла или строго квазивыпукла, то интервал неопределенности может быть сокращен с помощью вычисления значений $f(x)$ в двух точках, принадлежащих интервалу.

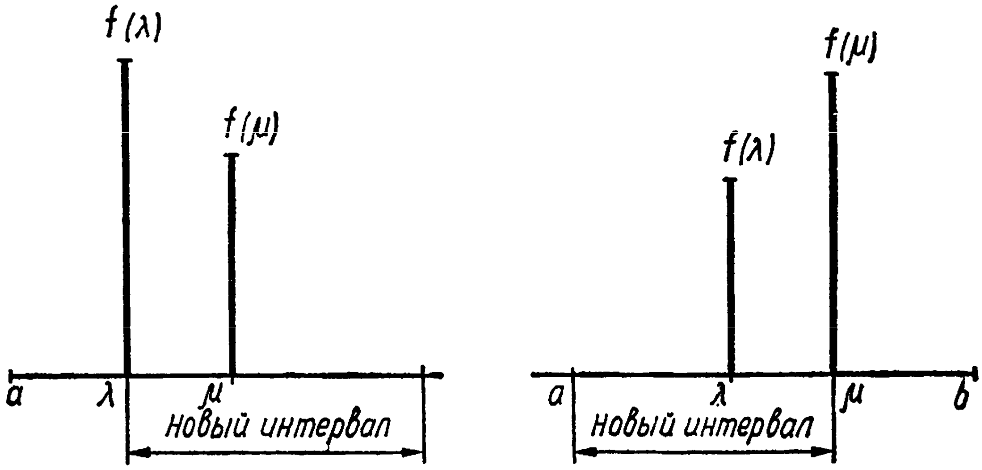

Рис. 3.9

Теорема 3.5. *Пусть $f(x)$ выпукла или строго квазивыпукла в интервале $[a, b]$. Пусть $\lambda, \mu \in [a, b]$ такие, что $\lambda < \mu$. Если $f(\lambda) > f(\mu)$, то $f(z) \geqslant f(\mu)$ для всех $z \in [a, \lambda)$. Если же $f(\lambda) \leqslant f(\mu)$, то $f(z) \geqslant f(\lambda)$ для всех $z \in (\mu, b]$.*

Доказательство. Пусть $f(\lambda) > f(\mu)$ и $z \in [a, \lambda)$. Предположим, что утверждение теоремы неверно, т. е. пусть $f(z) < f(\mu)$. Так как точка λ может быть представлена в виде выпуклой комбинации точек z, μ, а $f(x)$ строго квазивыпукла, то

$$f(\lambda) < \max\{f(z), f(\mu)\} = f(\mu),$$

но это противоречит утверждению, что $f(\lambda) \geqslant f(\mu)$.

Следовательно, $f(z) \geqslant f(\mu)$. Аналогично доказывается и вторая часть теоремы.

Из этой теоремы следует, что при условии строгой квазивыпуклости $f(x)$, если $f(\lambda) > f(\mu)$, новым интервалом неопределенности является $[\lambda, b)$. С другой стороны, если $f(\lambda) < f(\mu)$, то новым интервалом неопределенности будет $[a, \mu)$. Эти оба случая проиллюстрированы на рис. 3.9.

Рассмотрим несколько процедур минимизации строго квазивыпуклой функции на замкнутом ограниченном интервале путем итеративного сокращения интервала неопределенности.

Дихотомический поиск

Итак, пусть задана строгая квазивыпуклая функция $f(x)$, которую требуется минимизировать на интервале $[a_1; b_1]$. Очевидно, наименьшее число вычислений значений функции, которые необходимы для сокращения интервала неопределенности, равно двум (на рис. 3.10 указаны две точки: λ_1 и μ_1). На рис. 3.10, *а* имеем $f(\lambda_1) < f(\mu_1)$ и, следовательно, согласно теореме, новым интервалом неопределенности является $[a_1, \mu_1]$.Для случая $f(\lambda_1) > f(\mu_1)$ (рис. 3.10, *б*) новым интервалом неопределенности является $[\lambda_1, b_1]$. Таким образом, в зависимости от вида функции длина нового интервала неопределенности равна $|\mu_1 - a_1|$ или $|b_1 - \lambda_1|$. Априори неизвестно, будет ли $f(\lambda_1) < f(\mu_1)$ или $f(\lambda_1) > f(\mu_1)$. Поэтому оптимальная стратегия выбора точек λ_1 и μ_1 состоит в минимизации максимума величин $\mu_1 - a_1$ и $b_1 - \lambda_1$. Это может быть достигнуто выбором в качестве λ_1 и μ_1 середины интервала $[a_1, b_1]$. Однако в этом случае будем иметь только одну точку и не сможем далее сократить интервал неопределенности. Поэтому выбираем λ_1 и μ_1 симметрично относительно середины интервала на расстоянии ε от него. Здесь число $\varepsilon > 0$ настолько мало, чтобы, с одной стороны, длина нового интервала неопределенности $\varepsilon + \frac{b_1 - a_1}{2}$ являлась достаточно близкой к теоретически оптимальному значению $\frac{b_1 - a_1}{2}$ и в то же время значения функции $f(\lambda_1)$ и $f(\mu_1)$ были бы различимы.

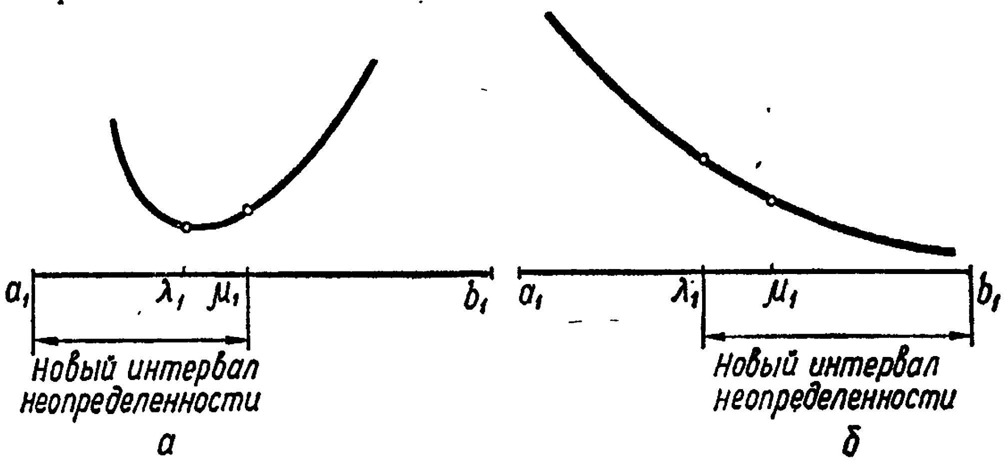

Рис. 3.10

В дихотомическом поиске место каждого из двух первых наблюдений λ_1 и μ_1 выбирается симметрично на расстоянии ε от середины $\frac{b_1 + a_1}{2}$. В зависимости от значений функции $f(x)$ в точках λ_1 и μ_1 определяется новый интервал неопределенности.

Дадим описание алгоритма дихотомического поиска.

Предварительный этап. Выбрать константу различимости ε и допустимую конечную длину интервала неопределенности $l > 0$. Пусть $[a_1, b_1]$ — начальный интервал неопределенности. Положить $k = 1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап. Он состоит из конечного числа однотипных итераций.

k-я итерация.

Шаг 1. Если $b_k - a_k \leqslant l$, то конец, точка минимума принадлежит интервалу $[a_k; b_k]$. В противном случае вычислить

$$\lambda_k = \frac{a_k + b_k}{2} - \varepsilon; \quad \mu_k = \frac{a_k + b_k}{2} + \varepsilon \tag{3.6.3}$$

и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Если $f(\lambda_k) < f(\mu_k)$, положить $a_{k+1} = a_k$ и $b_{k+1} = \mu_k$. В противном случае положить $a_{k+1} = \lambda_k$ и $b_{k+1} = b_k$. Заменить k на $k + 1$ и перейти к шагу 1.

Заметим, что длина интервала неопределенности в начале $(k + 1)$-й итерации равна

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \frac{1}{2^k}(b_1 - a_1) + 2\varepsilon\left(1 - \frac{1}{2^k}\right). \tag{3.6.4}$$

Данное соотношение можно использовать для определения числа итераций, необходимых для достижения желаемой точности.

Метод золотого сечения

Сравнение различных процедур одномерного поиска естественно производить в соответствии со следующим коэффициентом сжатия:

$$k_{сж}^{\nu} = \frac{l_\nu}{l_0},$$

где l_0 — начальная длина интервала неопределенности; l_ν — длина интервала неопределенности спустя ν наблюдений. Очевидно, что чем меньше величина $k^{\nu}_{\text{ож}}$, тем более эффективна соответствующая процедура (алгоритм) поиска.

Рассмотрим теперь более эффективный метод золотого сечения для минимизации строго квазивыпуклых функций. Пусть на k-й итерации метода золотого сечения интервал неопределенности равен $[a_k; b_k]$.

Согласно теореме 3.5 новый интервал неопределенности $[a_{k+1}, b_{k+1}]$ равен $[\lambda_k, b_k]$, если $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$, и $[a_k, \mu_k]$ в противном случае.

Точки λ_k и μ_k выбираются, исходя из следующих условий.

Таблица 3.15

k	a_k	b_k	λ_k	μ_k	$f(\lambda_k)$	$f(\mu_k)$
1	—3.000	5.000	0,056	1.944	0.115	7,667
2	—3.000	1.944	—1.112	0.056	—0.987	0.115
3	—3.000	0.056	—1.832	—1.112	—0.308	—0.987
4	—1.832	0.056	—1.112	—0.664	—0.987	—0.887
5	—1.832	—0.664	—1.384	—1.112	—0.853	—0.987
6	—1.384	—0.664	—1.112	—0.936	—0,987	—0,996
7	—1.384	—0.936	—1.208	—1.112	—0.957	—0.987
8	—1.208	—0.936	—1.112	—1.032	—0.987	—0.999
9	—1.112	—0.936				

1. Длина нового интервала неопределенности $b_{k+1} - a_{k+1}$ не зависит от результата на k-й итерации, т. е. от того, выполняется ли неравенство $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$ или $f(\lambda_k) \leqslant f(\mu_k)$. Кроме того, должно выполняться равенство $b_k - \lambda_k = \mu_k - a_k$.

Таким образом, если

$$\lambda_k = a_k + (1 - \alpha)(b_k - a_k), \tag{3.6.5}$$

где $0 < \alpha < 1$, то для μ_k должно быть

$$\mu_k = a_k + \alpha (b_k - a_k), \tag{3.6.6}$$

так что

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \alpha (b_k - a_k). \tag{3.6.7}$$

2. Для новой итерации λ_{k+1} и μ_{k+1} выбираются так, что либо λ_{k+1} совпадает с μ_k, либо μ_{k+1} совпадает с λ_k. При этих условиях коэффициент α должен быть равен 0.618.

Таким образом, если на k-й итерации μ_k и λ_k выбраны в соответствии с (3.6.5) и (3.6.6), где $\alpha = 0.618$, то длина интервала неопределенности сжимается с коэффициентом 0.618. При этом на первой итерации необходимы два вычисления функции в точках λ_1 и μ_1, но на всех последующих только одно вычисление, так как либо $\lambda_{k+1} = \mu_k$, либо $\mu_{k+1} = \lambda_k$.

Дадим описание алгоритма золотого сечения.

Предварительный этап. Выбрать допустимую конечную длину интервала неопределенности $l > 0$. Пусть $[a_1; b_1]$ — начальный интервал неопределенности. Положить $\lambda_1 = a_1 + (1 - \alpha)(b_1 - a_1)$ и $\mu_1 = a_1 + \alpha (b_1 - a_1)$, где $\alpha = 0.618$. Вычислить $f(\lambda_1)$ и $f(\mu_1)$, положить $k = 1$, и перейти к основному этапу.

Основной этап. Шаг 1. Если $b_k - a_k < l$, то остановиться, оптимальная точка принадлежит интервалу $[a_k; b_k]$. В противном случае, если $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$, то перейти к шагу 2, а если $f(\lambda_k) \leqslant f(\mu_k)$, то к шагу 3.

Шаг 2. Положить $a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$, $\lambda_{k+1} = \mu_k$, $\mu_{k+1} = a_k + \alpha (b_{k+1} - a_{k+1})$. Вычислить $f(\mu_{k+1})$ и перейти к шагу 4.

Шаг 3. Положить $a_{k+1} = a_k$; $b_{k+1} = \mu_k$, $\mu_{k+1} = \lambda_k$, $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + (1 - \alpha)(b_{k+1} - a_{k+1})$. Вычислить $f(\lambda_{k+1})$ и перейти к шагу 4.

Шаг 4. Заменить k на $k + 1$ и перейти к шагу 1.

Пример 3.10.

Пусть требуется найти $\min (x^2 + 2x) = f(x)$ при условии $-3 \leqslant x \leqslant 5$.

Очевидно, минимизируемая функция $f(x)$ строго квазивыпукла и начальная длина интервала неопределенности равна 8. Сократим этот интервал неопределенности до интервала, длина которого не больше 0.2. Определим первые две точки:

$$\lambda_1 = -3 + 0.382 \cdot 8 = 0.056; \quad \mu_1 = -3 + 0.618 \cdot 8 = 1.944.$$

Заметим, что $f(\lambda_1) > f(\mu_1)$. Следовательно, новый интервал неопределенности равен $[-3; 1.944]$. Этот процесс повторяется аналогично, и результаты вычислений приведены в табл. 3.15. После восьми итераций, содержащих 9 вычислений функции, интервал неопределенности оказывается равным $[-1.112, -0.936]$, так что в качестве точки минимума может быть взята, например, середина этого интервала -1.024. Заметим, что точкой точного минимума является -1.0.

Метод Фибоначчи

Метод Фибоначчи является эффективным методом одномерной (линейной) оптимизации квазивыпуклых функций. Подобно методу золотого сечения он требует двух вычислений функции на первой итерации, а на каждой последующей только по одному.

Однако этот метод отличается от метода золотого сечения тем, что сокращение интервала неопределенности меняется от итерации к итерации.

Метод основан на последовательности Фибоначчи $\{F_\nu\}$, которая определяется следующим образом:

$$F_{\nu+1} = F_{\nu-1} + F_\nu, \quad \nu = 1, 2, \ldots, F_0 = F_1 = 1. \tag{3.6.9}$$

Таким образом, последовательность имеет вид 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, 55, 89, ... Предположим, что на k-й итерации интервал неопределенности равен $[a_k; b_k]$. Рассмотрим 2 точки λ_k и μ_k, определяемые следующим образом:

$$\lambda_k = a_k + \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k), \quad k = \overline{1, n-1}; \tag{3.6.10}$$

$$\mu_k = a_k + \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k), \quad k = \overline{1, n-1}, \tag{3.6.11}$$

где n — заданное общее число вычислений функции. Согласно теореме 3.5 новый интервал неопределенности равен $[\lambda_k; b_k]$, если $f(\lambda_k) > f(\mu_k)$, и $[a_k; \mu_k]$, если $f(\lambda_k) \leqslant f(\mu_k)$. В первом случае, учитывая (3.6.10) и полагая $\nu = n - k$ в (3.6.9), получим

$$b_{k+1} - a_{k+1} = b_k - \lambda_k = b_k - a_k - \frac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k) =$$
$$= \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k). \tag{3.6.12}$$

Во втором случае, учитывая (3.6.11), имеем

$$b_{k+1} - a_{k+1} = \mu_k - a_k = \frac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}} (b_k - a_k).$$

Таким образом, в обоих случаях длина интервала неопределенности сжимается с коэффициентом $\dfrac{F_{n-k}}{F_{n-k+1}}$.

Дадим описание алгоритма метода Фибоначчи.

Предварительный этап. Выбрать допустимую конечную длину интервала неопределенности l ($l > 0$) и константу различимости $\varepsilon > 0$. Пусть задан начальный интервал неопределенности $[a_1; b_1]$. Выбрать число вычислений функции так, чтобы $F_n > \dfrac{b_1 - a_1}{l}$. Положить $\lambda_1 = a_1 + \dfrac{F_{n-2}}{F_n}(b_1 - a_1)$, $\mu_1 = a_1 + \dfrac{F_{n-1}(b_1 - a_1)}{F_n}$. Вычислить $f(\lambda_1)$ и $f(\mu_1)$, положить $k = 1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап. Шаг 1. Если $f(\lambda_k) \geqslant f(\mu_k)$, то перейти к шагу 2, иначе к шагу 3.

Шаг 2. Положить $a_{k+1} = \lambda_k$, $b_{k+1} = b_k$. Затем положить $\lambda_{k+1} = \mu_k$, $\mu_{k+1} = a_{k+1} + \dfrac{F_{n-k-1}}{F_{n-k+1}}(b_{k+1} - a_{k+1})$. Если $k = n - 2$, то перейти к шагу 5; в противном случае вычислить $f(\mu_{k+1})$ и перейти к шагу 4.

Шаг 3. Положить $a_{k+1} = a_k$, $b_{k+1} = \mu_k$, $\mu_{k+1} = \lambda_k$, $\lambda_{k+1} = a_{k+1} + \dfrac{F_{n-k-2}}{F_{n-k}}(b_{k+1} - a_{k+1})$. Если $k = n - 2$, то перейти к шагу 5, в противном случае вычислить $f(\lambda_{k+1})$ и перейти к шагу 4.

Шаг 4. Заменить k на $k + 1$ и перейти к шагу 1.

Шаг 5. Положить $\lambda_n = \lambda_{n-1}$ и $\mu_n = \lambda_n + \varepsilon$. Если $f(\lambda_n) > f(\mu_n)$, то положить $a_n = \lambda_n$, и $b_n = b_{n-1}$. В противном случае, т. е. если $f(\lambda_n) \leqslant f(\mu_n)$, то положить $a_n = a_{n-1}$, $b_n = \mu_n$. Конец. Оптимальное решение содержится в интервале $[a_n, b_n]$.

Пример 3.11. Рассмотрим ту же задачу, что и в предыдущем примере:

$$\text{минимизировать } f(x) = x^2 + 2x$$

при условии

$$-3 \leqslant x \leqslant 5.$$

Потребуем, чтобы длина конечного интервала неопределенности не превосходила 0.2. Следовательно, $F_n > \dfrac{8}{0.2} = 40$, так что $n = 9$. Выберем в качестве константы различимости $\varepsilon = 0{,}01$.

Таблица 3.16

k	a_k	b_k	λ_k	μ_k	$f(\lambda_k)$	$f(\mu_k)$
1	—3.000	5.000	0.545	1.9454	0.112	7.676
2	—3.000	1.9454	—1.109	0.0545	—0.988	0.112
3	—3.000	0.0545	—1.836	—1.109	—0.300	—0.988
4	—1.836	0.0545	—1.109	—0.673	—0.988	—0.893
5	—1.836	—0.673	—1.399	—1.109	—0.840	—0.988
6	—1.399	—0.673	—1.109	—0.964	—0.988	—0.999
7	—1.109	—0.673	—0.964	—0.818	—0.999	—0.967
8	—1.109	—0.818	—0.964	—0.954	—0.999	—0.998
9	—1.109	—0.964	—0.964	—0.964	—0.999	—0.999

Два первых вычисления значений функции приводятся в точках

$$\lambda_1 = -3 + \frac{F_7}{F_9} \cdot 8 = 0.0545; \quad \mu_1 = -3 + \frac{F_8}{F_9} \cdot 8 = 1.945.$$

Так как $f(\lambda_1) < f(\mu_1)$, то новый интервал неопределенности будет равен [—3.000; 1.945]. Далее процедура повторяется аналогичным образом, результаты итераций приводятся в табл. 3.16.

Так как $f(\mu_k) > f(\lambda_k)$, конечный интервал неопределенности $[a_9, b_9]$ равен [—1.109; —0.964], длина $l = 0.145$. В качестве приближенного значения точки минимума выберем середину этого отрезка.

Прямые методы многомерного поиска

Метод конфигураций

Метод конфигураций, предложенный Хуком и Дживсом [1], включает два основных этапа:

1) поиск вокруг базисной точки;

2) поиск в направлении, выбранном для оптимизации. На первом этапе метод обследует окрестность выбранной точки X_0 (например, изменяя по одной компоненте вектора X_0 поочередно). После того как найдено приемлемое направление, на втором этапе в этом направлении производятся вычисления функции при постепенно увеличивающемся шаге поиска (тем самым устанавливается тренд поиска). Это продолжается до тех пор, пока поиск в данном направлении продолжает приводить к точкам с меньшим значением $f(X)$. Когда в направлении установленной конфигурации не удается найти точку с меньшим значением функции, размер шага уменьшают. После нескольких последовательных сокращений размера шага от принятого тренда отказываются и предпринимают новый этап обследования окрестности.

Таким образом, согласно этому методу делаются попытки найти направление оврага целевой функции с тем, чтобы двигаться по такому оврагу. Достоинством метода является то, что он позволяет путем поиска на очередном этапе обследований восстанавливать направление движения в тех случаях, когда вследствие искривления оврага ранее найденный тренд (конфигурация) теряется.

Дадим описание алгоритма метода конфигураций.

Начальный этап. Задать в качестве $s_1, s_2, \ldots, s_n$ координатные направления. Выбрать $\varepsilon > 0$ для остановки алгоритма, начальный шаг $\lambda > 0$ и ускоряющий множитель $\alpha > 0$. Выбрать начальную точку X_1, положить $Y_1 = X_1$, $k = j = 1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап. Шаг 1. Если $f(Y_j + \lambda s_j) < f(Y_j)$, то шаг считается успешным, положить $Y_{j+1} = Y_j + \lambda s_j$ и перейти к шагу 2.

Если $f(Y_j + \lambda s_j) \geqslant f(Y_j)$, то шаг считается неудачным. В этом случае, если $f(Y_j - \lambda s_j) < f(Y_j)$, то положить $Y_{j+1} = Y_j - 2_j s_j$ и перейти к шагу 2. Если же $f(Y_j - \lambda s_j) \geqslant f(Y_j)$, то положить $Y_{j+1} = Y_j$ и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Если $j < n$, то заменить j на $j + 1$ и вернуться к шагу 1. В противном случае перейти к шагу 3, если $f(Y_{n+1}) < f(X_k)$, и к шагу 4, если $f(Y_{n+1}) \geqslant f(X_k)$.

Шаг 3. Положить $X_{k+1} = Y_{n+1}$, $Y_1 = X_{k+1} + \alpha(X_{k+1} - X_k)$. Заменить k на $k + 1$, положить $j = 1$ и перейти к шагу 1.

Шаг 4. Если $\lambda \leqslant \varepsilon$, то остановиться, X_k — решение. В противном случае заменить λ на $\frac{\lambda}{2}$. Положить $Y_j = X_k$, $X_{k+1} = X_k$. Заменить k на $k + 1$, положить $j = 1$ и вернуться к шагу 1. Как видим из описания, шаги 1 и 2 осуществляют пробный поиск, а шаг 3 является ускоряющим шагом по направлению $X_{k+1} - X_k$. На шаге 4 длина шага λ сокращается.

Метод конфигураций обладает следующими преимуществами перед градиентными методами:

1. Он не требует задания целевой функции в явном виде, что является существенным достоинством при решении сложных экономических и технических задач.

2. Метод позволяет легко учитывать ограничения, накладываемые на переменные, а также на допустимую область поиска.

Недостаток метода конфигураций состоит в том, что он может застревать, т. е. останавливаться вблизи локального минимума, не в состоянии обеспечить дальнейшее улучшение.

Пример 3.12. Рассмотрим следующую задачу:

минимизировать $(x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$.

Для ее решения воспользуемся методом Хука и Дживса с дискретным шагом, а значения параметров α, λ выберем соответст-

Таблица 3.17

k	λ	$\mathbf{X}_k$ $f(\mathbf{X}_k)$	j	$\mathbf{Y}_j$	$\mathbf{s}_j$	$\mathbf{Y}_j + \lambda\mathbf{s}_j$ $f(\mathbf{Y}_j + \lambda\mathbf{s}_j)$	$\mathbf{Y}_j - \lambda\mathbf{s}_j$ $f(\mathbf{Y}_j - \lambda\mathbf{s}_j)$
1	0.2	[2.00; 3.00] 16.0	1	[2.00; 3.00] 16.0	[1.0, 0.0]	[2.2; 3.0] 14.44 (У)	—
			2	[2.2; 0] 14.44	[0.0; 1.0]	[2.20; 3.20] 17.64 (Н)	[2.20; 2.80] 11.56 (У)
2	0.2	[2.20; 2.80]	1	[2.40; 2.60] 7.87	[1.0; 0]	[2.6; 2.6] 6.89 (У)	
		11,56	2	[2.60; 2.60] 6.89	[0.; 1.0]	[2.6; 2.8] 9.13 (Н)	[2.6; 2.4] 4.47 (У)
3	0.2	[2.60; 2.40]	1	[3.0; 2.0] 2.00	[1.; 0.0]	[3.20; 2.0] 2.71 (Н)	[2.8; 2.0] 1.85 (У)
			2	[2.8; 2.0] 1.85	[0.0; 1.0]	[2.8; 2.2] 2.97 (Н)	[2.80; 1.80] 1.05 (У)
4	0.2	[2.80; 1.80] 1.05	1	[3.0; 1.2] 1.36	[1.0; 0.0]	[3.2; 1.2] 2.71 (Н)	[2.80; 1.20] 0.57 (У)
			2	[2.80; 1.20] 0.57 (У)	[0.; 1.0]	[2.80; 1.40] 0.41 (У)	—
5	0.2	[2.80; 1.40] 0.41	1	[2.80; 1.40] 1.05	[1.0; 0.0]	[3.00; 1.0] 2.00 (Н)	[2.60; 1.00] 0.49 (У)
			2	[2.60; 1.00]	[0.0; 1.0]	[2.60; 1.20] 0.17 (У)	—
6	0.2	[2.60; 1.20] 0.17	1	[2.40; 1.00] 0.19	[1.0; 0.0]	[2.60; 1.00] 0,49 (Н)	[2.20; 1.00] 0.04 (У)
			2	[2.20; 1.00] 0.04	[0.0; 1.0]	[2.20; 1.20] 0.04 (Н)	[2.20; 0.80] 0.36 (Н)
7	0.2	[2.20; 1.00] 0.04	1	[1.80; 0.80] 0.04	[1.0; 0.0]	[2.0; 0.8] 0.16 (Н)	[1.60; 0.80] 0.03 (У)
			2	[1.60; 0.80] 0.03	[0.0; 1.0]	[1.60; 1.00] 0.19 (Н)	[1.60; 0.60] 0.19 (Н)
8	0.2	[1.60; 0.80]	1	[1.0; 0.60] 0.67	[1.0; 0.0]	[1.20; 0.60] 0.41 (У)	—
			2	[1.20; 0.60] 0.41	[0.0; 1.0]	[1.20; 0.80] 0.57 (Н)	[1.20; 0.40] 0.57 (Н)
9	0.1	[1.60; 0.80]	1	[1.60; 0.80] 0.03	[1.0; 0.0]	[1.70; 0.80] 0.02 (У)	—
			2	[1.70; 0.80] 0.02	[0.0; 1.0]	[1.70; 0.90] 0.02 (Н)	[1.70; 0.70] 0.10 (Н)
10	0.1	[1.70; 0.80] 0.02	1	[1.80; 0.80] 0.04	[1.0; 0.0]	[1.90; 0.80] 0.09 (Н)	[1.70; 0.80] 0.02 (У)
			2	[1.70; 0.80] 0.02	[0.0; 1.0]	[1.70; 0.90] 0.02 (Н)	[1.70; 0.70] 0.10 (Н)

венно 1.0 и 0.2. В табл. 3.17 приведены результаты поиска. Здесь символом У обозначен удачный шаг, а символом Н—неудачный. На всех итерациях каждый раз, когда $f(\mathbf{Y}_j) \geqslant f(\mathbf{X}_k)$ в качестве вектора $\mathbf{Y}_1$ берется $\mathbf{X}_k$. В противном случае $\mathbf{Y}_1 = 2\mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k$. В конце десятой итерации получена точка [1.70; 0.80], в которой значение

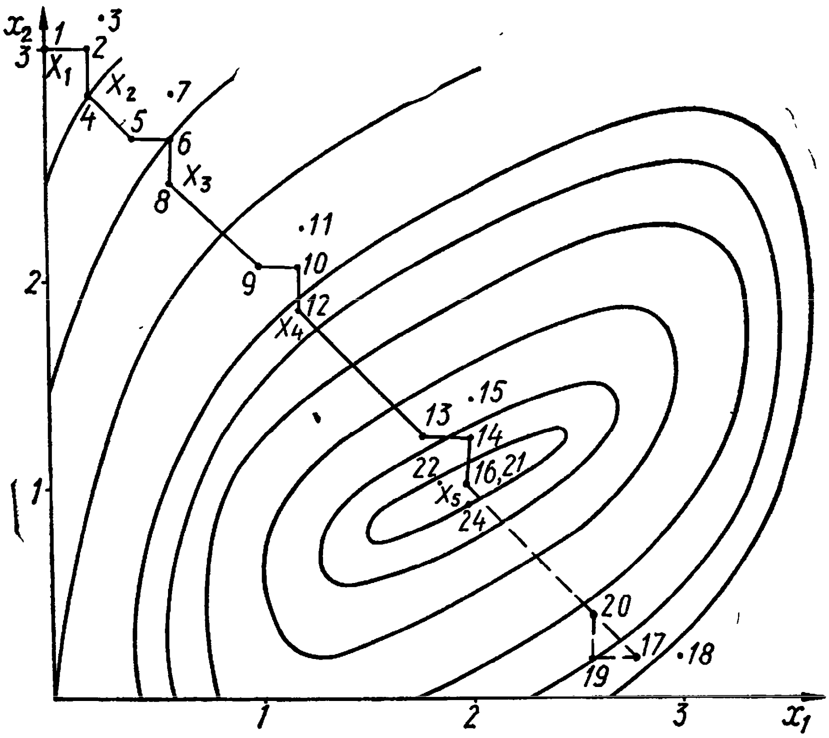

Рис. 3.11

функции равно 0.02. Если требуется большая точность, то следует уменьшить значение λ до 0.05.

На рис. 3.11 показана траектория, полученная данным методом. Вычисленные точки пронумерованы последовательно, а пунктирная линия соответствует неудачным шагам поиска по образцу.

Метод Розенброка

Розенброком был предложен прямой метод, согласно которому в каждом цикле производится поиск вдоль взаимно-ортогональных направлений (аналогично этапу обследования в алгоритме конфигураций Хука — Дживса). Если, например, целевая функция имеет узкий искривленный гребень, то поиск по взаимно-ортогональным направлениям обладает тем свойством, что результирующее направление стремится расположиться вдоль оси оврага.

В первоначальном варианте метод содержал очень простой линейный поиск, в ходе которого отыскивался не минимум в заданном направлении, а просто точка с меньшим значением функции (так называемый метод с дискретным шагом). Если шаг в данном направлении приводит к меньшему значению функции, т. е. имеет место удачная проба, то из этой точки делается новый шаг в α раз больший, где $\alpha > 1$. Если же шаг в этом направлении приводит к большему значению функции (неудача), то шаг умножается на другую константу β ($\beta < 0$), $0 < |\beta| < 1$. Далее поиск проводится в следующем направлении, ортогональном ко всем предыдущим. Эта процедура повторяется до тех пор, пока на каждом направлении, по крайней мере, одна проба не окажется успешной, а одна неудачной. Этим завершается один этап.

Данный метод реализуется следующим образом. Пусть $\mathbf{s}_1(k), \mathbf{s}_2(k), \ldots, \mathbf{s}_n(k)$ — единичные векторы в пространстве $R^{(n)}$, где индекс $k = 0, 1, \ldots,$ обозначает этапы поиска. Ортонормированные векторы $s_1(k)$, ..., $s_n(k)$ строятся на основе информации, полученной на $(k-1)$-м этапе поиска.

Рассмотрим k-й этап поиска и пусть $X_0(k) = X_n(k-1)$ представляет собой точку в $R^{(n)}$, из которой начат поиск, а $\lambda_1, \lambda_2, .., \lambda_n$ — длины шагов, связанные с соответствующими направлениями $s_1, s_2, ..., s_n$.

Шаг 1. Поиск начинается из точки $X_0(k)$ путем введения шага, равного $\lambda_1(k)$. $s_1(k)$, в первом координатном направлении.

Если $f(X_0(k) + \lambda_1(k)\, s_1(k)) \leqslant f(X_0(k))$, шаг считается успешным, при этом полагают $X_1(k) = X_0(k) + \lambda_1(k)\, s_1(k)$, а величина шага λ_1 умножается на множитель α ($\alpha > 1$). Если же $f(X_0(k) + \lambda_1 s_1(k)) > f(X_0)$, то шаг считается неудачным, $X_0(k)$ не заменяется на очередную точку, а $\lambda_1(k)$ умножается на множитель β ($\beta < 0$). Затем задается возмущение (пробный шаг) по направлению $s_2(k)$. После того как пройдены все n направления $s_1(k)$, $s_2(k)$, ..., $s_n(k)$, переходят к шагу 2.

Шаг 2. Если $f(X_n(k)) < f(X_0(k))$, т. е. хотя бы один спуск по направлению оказался успешным, то положить $X_0(k+1) = X_n(k)$ и повторить шаг 1. При этом реализуем пробный шаг с длиной $\alpha\lambda_1(k)$ или $\beta\lambda_1(k)$ в зависимости от результата предыдущего возмущения по этому направлению (Розенброк предложил выбирать $\alpha = 3$ и $\beta = -0{,}5$).

Возмущения по выбранным направлениям поиска задаются до тех пор, пока по каждому из направлений за успехом последует неудача. На этом k-й этап поиска заканчивается. Последняя полученная точка становится начальной точкой следующего этапа: $X_0(k+1) = X_n(k)$. Нормированное направление $s_1(k+1)$ выбирается параллельным $A(k) = X_0(k+1) - X_0(k)$, а остальные направления выбираются ортонормированными друг к другу и к $s_1(k)$ с помощью одного из известных методов.

Метод Розенброка не обеспечивает автоматическое окончание процесса поиска после того, как найден экстремум $f(X)$. Поиск проводится либо на определенное число этапов, либо заканчивается после того, как величина $\|A(k)\|$ становится меньше определенного значения на нескольких последовательных этапах.

Пример 3.13. В качестве иллюстрации рассмотрим ту же задачу, что и прежде:

$$\text{минимизировать } (x_1-2)^4 + (x_1-2x_2)^2.$$

Будем решать ее методом Розенброка с дискретным шагом, положив $\lambda_1 = \lambda_2 = 0.1$; $\alpha = 2.0$; $\beta = -0.5$. В табл. 3.18 приведены

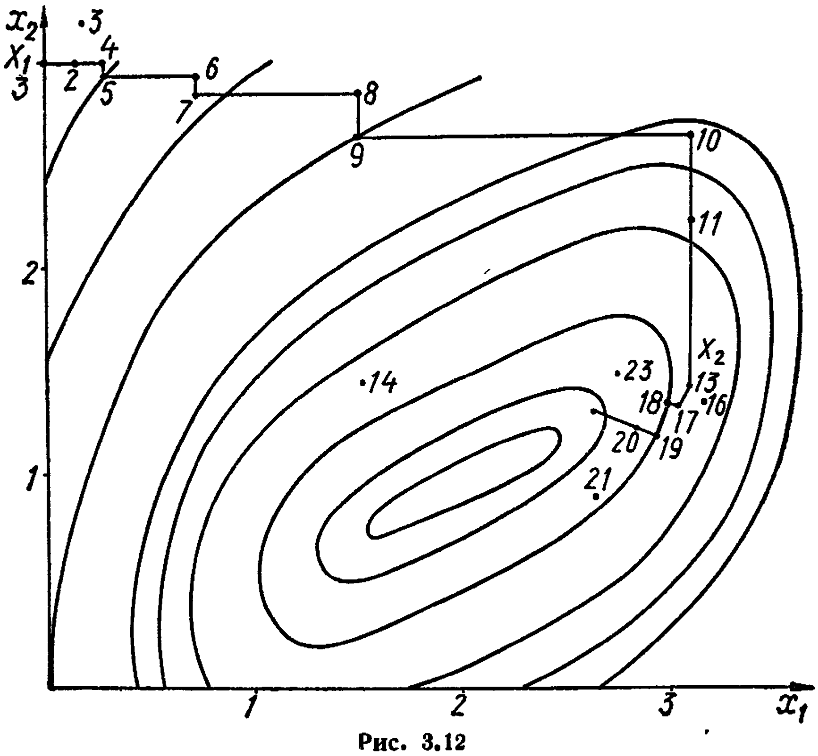

Рис. 3.12

k	$\mathbf{X}_k$ $f(\mathbf{X}_k)$	j	$\mathbf{Y}_j$ $f(\mathbf{Y}_j)$	λ_j	$\mathbf{s}_j$	$\mathbf{Y}_j+\lambda_j\mathbf{s}_j$ $f(\mathbf{Y}_j+\lambda_j\mathbf{s}_j)$
1	[0,00; 3.00] 52.00	1	[0.00; 3.00] 52.00	0.10	[1.00; 0,00]	[0.10; 3.00] 47.84 (У)
		2	[0.10; 3.00] 47.84	0.10	[0.00; 1.00]	[0.10; 3.10] 50.24 (Н)
		1	[0.10; 3.00] 47.84	0.20	[1.00; 0,00]	[0.30; 3.00] 40.84 (У)
		2	[0,30; 3.00] 40.84	—0.05	[0.00; 1.0]	[0.30; 2.95] 39.7 (У)
		1	[0,30; 2.95] 39.71	0.40	[1.00; 0.0]	[0.70; 2.95] 29.90 (У)
		2	[0.70; 2.95] 29.90	—0.10	[0,00; 1.00]	[0.70; 2.85] 27.86 (У)
		1	[0.70; 2.85] 27.86	0.80	[1.00; 0.00]	[1.50; 2.85] 17.70 (У)
		2	[1.50; 2.85] 17.70	—0.20	[0.00; 1.00]	[1.50; 2.65 14.59 (У)
		1	[1.50; 2.65] 14.50	1.60	[1.00; 0.00]	[3.10; 2.65] 6.30 (У)
		2	[3.10; 2.65] 6.30	—0.40	[0.00; 1.00]	[3.10; 2.25] 3.42 (У)
		1	[3.10; 2.25] 3.42	3,20	[1.00; 0.00]	[6.30; 2.25] 342.12 (Н)
		2	[3.10; 2.25] 3.42	—0,80	[0,0; 1.0]	[3.10; 1.45] 1.50 (У)
		1	[3.10; 1.45] 1,50	—1.60	[1,00; 0.00]	[1.50; 1.45] 2.02 (Н)
		2	[3.10; 1,45] 1.50	—1,60	[0,00; 1,00]	[3.10; —0.15] 13.02 (Н)
2	[3.10; 1.45] 1,50	1	[3.10; 1.45] 1.50	0.10	[0.89; —0.45]	[3.19; 1.41] 2.14 (Н)
		2	[3.10; 1.45] 1.50	0.10	[—0.45; —0.89]	[3.06; 1.36] 1.38 (У)
		1	[3.06; 1.36] 1.38	0.05	[0.89; —0.45]	[3.02; 1.38] 1.15 (У)
		2	[3.02; 1.38] 1.15	0.20	[—0.45; —0.89]	[2.93; 1.20] 1.03 (У)
		1	[2.93; 1.20] 1.03	—0.10	[0.89; —0.45]	[2.84; 1.25] 0.61 (У)
		2	[2.84; 1.25] 0.61	0.40	[—0.45; —0.89]	[2.66; 0.89] 0.96 (Н)
		1	[2.84; 1.25]	—0.20	[0.89; —0.45]	[2.66; 1.34] 0.19 (У)
		2	[2.66; 1.34] 0.19	—0.20	[—0.45; —0.89]	[2.75; 1.52] 0.40 (Н)

результаты вычислений для начальной точки $\mathbf{X}_1 = [0.0;\ 3.0]^T$, где символом (**У**) отмечены успешные, а символом Н — неудачные шаги по направлению. Заметим, что в пределах каждой итерации направления $\mathbf{s}_1$ и $\mathbf{s}_2$ фиксированы. После 7 реализаций шага 1 из точки $X_1 = [0.0;\ 3.0]^T$ получена точка $\mathbf{X}_2 = [3.10;\ 1.45]^T$. В этой точке потребовалось изменение направлений. В частности ($\mathbf{X}_2$ —

$- \mathbf{x}_1) = \lambda_1 \mathbf{s}_1 + \lambda_2 \mathbf{s}_2$, где $\lambda_1 = 3.10$; $\lambda_2 = -1.55$. Можно легко проверить, что новыми направлениями поиска являются $[0.89; -0.45]$ и $[-0.45; -0.89]$. Эти направления использованы на второй итерации, на которой процедура была остановлена.

На рис. 3.12 показан процесс минимизации методом Розенброка (полученные точки пронумерованы последовательно).

Задачи и упражнения

3.61. Для методов дихотомического поиска, золотого сечения и метода Фибоначчи определите количество вычислений функции, необходимое для $\alpha = 0.1$; 0.001; 0.001 и 0.0001, где α — отношение конечного интервала неопределенности к длине начального интервала.

3.62. Покажите, что метод золотого сечения приближается к методу Фибоначчи, когда число вычислений функции стремится к бесконечности.

3.63. Функция $f(x)$, $x \in R_1$ называется строго унимодальной на интервале $[a, b]$, если существует $\bar{\lambda}$, который минимизирует на этом интервале $f(x)$ и для $\lambda_1, \lambda_2 \in [a, b]$ таких, что $\lambda_1 < \lambda_2$ имеем

$$f(\lambda_1) > f(\lambda_2) \quad \text{при} \quad \lambda_2 \leqslant \bar{\lambda};$$

$$f(\lambda_1) < f(\lambda_2) \quad \text{при} \quad \lambda_1 \geqslant \bar{\lambda}.$$

Покажите, что если $f(x)$ строго унимодальна на $[a, b]$, то она и строго квазивыпукла на $[a, b]$. Определение квазивыпуклости дано в п. 3.6. Обратно покажите, что если $f(x)$ строго квазивыпукла на $[a, b]$ и имеет на этом интервале минимум, то она унимодальна на $[a, b]$.

3.64. Найти минимум функции $e^{-\lambda} + \lambda^2$ с помощью каждой из следующих процедур:

а) дихотомического поиска;

б) метода золотого сечения;

в) метода Ньютона;

г) метода Фибоначчи.

Положить точность нахождения оптимума принятой равной $\varepsilon = 0.01$.

3.65. Пусть имеется функция $f(\mathbf{x}) = (x_1^3 + x_2)^2 + 2(x_2 - x_1 - 4)^4$. Зададим точку $\mathbf{x}_1$ и ненулевой вектор направления $\mathbf{s}$. Пусть $\Theta(\lambda) = f(\mathbf{x}_1 + \lambda \mathbf{s})$:

а) найти явное выражение для $\Theta(\lambda)$;

б) для $\mathbf{x}_1 = [0; 0]^T$ и $\mathbf{s} = [1; 1]^T$, используя метод Фибоначчи, найти скаляр λ_1, являющийся решением задачи минимизации $\Theta(\lambda)$;

в) для $\mathbf{x}_1 = [4; 5]^T$ и $\mathbf{s} = [1; -2]^T$, используя метод золотого сечения, найти λ, являющийся решением задачи минимизации $\Theta(\lambda)$.

3.66. Пусть имеется задача минимизации функции $3\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3 + 2\pi^4$ при условии $\lambda \geqslant 0$.

1. Выписать необходимое условие минимума. Можно ли им воспользоваться для нахождения глобального минимума?

2. Проверить, является ли функция строго квазивыпуклой на множестве $\{\lambda : \lambda \geqslant 0\}$. Применить метод Фибоначчи для нахождения минимума.

3.67. Пусть задана функция $\Theta(\lambda)$, $\lambda \in R_1$. Рассмотрим три точки: (λ_1, Θ_1), (λ_2, Θ_2) и (λ_3, Θ_3), где $\Theta_i = \Theta(\lambda_i)$; $i = 1, 2, 3$. Показать, что парабола, проходящая через эти точки, описывается соотношением

$$q(\lambda) = \frac{\Theta_1(\lambda-\lambda_2)(\lambda-\lambda_3)}{(\lambda_1-\lambda_2)\cdot(\lambda_1-\lambda_3)} + \frac{\Theta_2(\lambda-\lambda_1)(\lambda-\lambda_3)}{(\lambda_2-\lambda_1)\cdot(\lambda_2-\lambda_3)} + \frac{\Theta_3(\lambda-\lambda_1)\cdot(\lambda-\lambda_2)}{(\lambda_3-\lambda_1)\cdot(\lambda_3-\lambda_2)}.$$

Кроме того, покажите, что производная функция $q(\lambda)$ обращается в нуль в точке

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{2}\,\frac{b_{23}\Theta_1 + b_{31}\Theta_2 + b_{32}\Theta_3}{a_{23}\Theta_1 + a_{31}\Theta_2 + a_{32}\Theta_3},$$

где $a_{ij} = \lambda_i - \lambda_j$; $b_{ij} = \lambda_i^2 - \lambda_j^2$.

Найти параболу, проходящую через точки (1; 3), (2; 1), (4; 6) и вычислить $\bar{\lambda}$.

3.68. Пусть имеется $\Theta(\lambda)$, $\lambda \in R_1$. Рассмотрим три точки: (λ_1, Θ_1), (λ_2, Θ_2), (λ_3, Θ_3). Предположим, что $\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3$, $\Theta_1 \geqslant \Theta_2$ и $\Theta_2 \leqslant \Theta_3$

а) Пользуясь соотношением из упражнения 3.67, вычислить точку минимума $\bar{\lambda}$ квадратичной формы, проходящей через эти три точки.

Если $\Theta(\bar{\lambda}) > \Theta(\lambda_2)$, положить $\bar{\lambda}_1 = \lambda_1$, $\bar{\lambda}_2 = \lambda_2$ и $\bar{\lambda}_3 = \bar{\lambda}$.

Если, напротив, $\Theta(\bar{\lambda}) \leqslant \Theta(\lambda_2)$, то положить $\bar{\lambda}_1 = \lambda_2$, $\bar{\lambda}_2 = \bar{\lambda}$, $\bar{\lambda}_3 = \lambda_3$.

Повторить процесс, полагая $\lambda_1^{(2)} = \bar{\lambda}_1$, $\lambda_2^{(2)} = \bar{\lambda}_2$; $\lambda_3^{(2)} = \bar{\lambda}_3$ и подбирая новую квадратичную форму по точкам $\lambda_1^{(2)}$, $\lambda_2^{(2)}$ и $\lambda_3^{(2)}$.

б) Покажите, что если Θ строго квазивыпукла, то новый интервал неопределенности обязательно содержит точку минимума.

в) Используйте процедуру, описанную в п. а), для минимизации функции

$$3\lambda - 2\lambda^2 + \lambda^3 + 2\lambda^4 \quad \text{при } \lambda \geqslant 0.$$

3.69. Рассмотреть задачу минимизации функции $(x_1^3 - x_2)^2 + 2(x_2 - x_1)^4$. Решить задачу, используя каждый из нижеперечисленных методов. Сходятся ли методы к некоторой точке? Если нет, то объясните, почему:

а) метод наискорейшего спуска;

б) метод Ньютона;

в) метод циклического покоординатного спуска;

г) метод Хука — Дживса;

д) метод Розенброка;

е) метод переменной метрики.

3.70. Рассмотрим задачу минимизации функции $(1 - x_1)^2 + 5(x_2 - x_1^2)^2$. При начальной точке $[2;\ 0]^T$ решить эту задачу следующими методами:

а) циклического покоординатного спуска; б) Хука — Дживса; в) Розенброка; г) переменной метрики.

3.71. Решить следующую задачу минимизации $(x_1 + 2x_2 + 5x_1x_2 - x_1^2 + 3x_2^2)$ методом Хука — Дживса.

3.72. Предположим, что $\mathbf{X}_k$ и $\mathbf{X}_{k+1}$ две последовательные точки, полученные методом найскорейшего спуска. Покажите, что

$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}_{k+1})^T \nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}_k) = 0.$$

3.73. Предположим, что функция f дважды непрерывно дифференцируема и матрица Гессе $\mathbf{H}$ всюду имеет обратную. Зададимся $\mathbf{X}_k$ и положим $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \mathbf{s}_k\lambda_k$, где $\mathbf{s}_k = -\mathbf{H}(X_k)^{-1} \nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}_k)$, а λ_k — оптимальное решение задачи минимизации $f(\mathbf{X}_k + \lambda \mathbf{s}_k)$.

Покажите, что эта модификация метода Ньютона сходится к некоторой точке из множества решений $\Omega = \{\mathbf{X} : \nabla \mathbf{f}(\mathbf{X})^T \mathbf{H}^{-1}(\mathbf{X}) \nabla \nabla \mathbf{f}(\mathbf{X}) = 0\}$. Продемонстрируйте это, минимизируя $(x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$ при начальной точке $[-2;\ 3]^T$.

3.74. Пусть $\mathbf{H}$ — симметричная матрица порядка $n \times n$, $\mathbf{d}_1, \mathbf{d}_2, \ldots, \mathbf{d}_n$ — собственные векторы матрицы $\mathbf{H}$. Покажите, что векторы $\mathbf{d}_1, \ldots, \mathbf{d}_n$ являются $\mathbf{H}$-сопряженными.

3.75. Пусть $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — множество линейно независимых векторов из $R^{(n)}$, а $\mathbf{H}$ — симметричная положительно определенная матрица порядка $n \times n$:

а) покажите, что нижеследующие векторы $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, \mathbf{s}_n$ являются $\mathbf{H}$-сопряженными:

$$\mathbf{s}_k = \begin{cases} \mathbf{a}_k, & \text{если } k = 1; \\ \mathbf{a}_k - \sum\limits_{i=1}^{k-1} \left[\dfrac{\mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{a}_i}{\mathbf{s}_i^T \mathbf{H} \mathbf{s}_i} \right] \mathbf{s}_i, & \text{если } k \geqslant 2; \end{cases}$$

б) проиллюстрируйте результат п. а), полагая $\mathbf{a}_1 = [1\,0\,0]^T$, $\mathbf{a}_2 = [1;\ -1;\ 4]^T$, $\mathbf{a}_3 = [2;\ -1;\ 6]^T$ и

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix};$$

в) предположим, что $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \ldots, \mathbf{a}_n$ — единичные векторы из R^n, и пусть $\mathbf{S}$-матрица, столбцами которой являются векторы $\mathbf{s}_1, \mathbf{s}_2, \ldots, s_n$, определенные согласно п. а). Покажем, что $\mathbf{S}$ является верхней треугольной матрицей, все диагональные элементы которой равны единице.

Проиллюстрируйте этот результат, полагая $\mathbf{a}_1$, $\mathbf{a}_2$ и $\mathbf{a}_3$ единичными векторами, а в качестве $\mathbf{H}$ взяв матрицу из п. б).

3.76. Пусть имеется квадратичная функция $f(\mathbf{X}) = \mathbf{a} + \mathbf{b}^T\mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{H}\mathbf{X}$, где $\mathbf{X}^T = [x_1, x_2, \ldots, x_n]$ — n-мерный вектор, а матрица $\mathbf{H}$ — симметричная размерности $(n \times n)$. Докажите справедливость следующего утверждения: если используется метод сопряженных направлений, то квадратичная функция может быть минимизирована ровно за n шагов, по одному в каждом из сопряженных направлений.

3.77. Рассмотрим задачу минимизации $-x_1^2 - x_2^2 + x_1x_2 + 2x_2 - x_1$: начиная из точки $\mathbf{X}_0 = [0; 0]^T$, решить ее методом Дэвидона — Флетчера — Пауэлла при $\mathbf{D} = \mathbf{I}$ ($\mathbf{I}$ — единичная матрица). Решить ее также методом сопряженных градиентов. Убедитесь, что обе эти процедуры порождают одинаковое множество направлений. Показать, что в общем случае, если $\mathbf{D}_1 = \mathbf{I}$, то оба метода идентичны для квадратичных функций.

3.78. Решить задачу минимизации $x_1 + 2x_2^2 + e^{(x_1^2+x_2^2)}$, начиная из точки $[1; 0]^T$ и используя метод сопряженных градиентов и метод Розенброка.

3.79. Рассмотрим следующую задачу.

Минимизировать $(x_1^2 + 2x_1x_2 + 2x_2^2 + x_3^2 - x_2x_3 + x_1 + 3x_2 - x_3$.

Используя результаты упражнения 3.75 или другой метод, постройте три сопряженных направления. Начиная из начала координат, решить эту задачу, минимизируя $f(\lambda)$ вдоль этих направлений.

3.80. С помощью метода параллельных касательных решить следующую задачу:

$$\text{минимизировать } (x_1^2 + x_2^2 + 2x_1x_2 - 2x_1 - 6x_2).$$

3.81. Рассмотрим метод переменной метрики Бройдена. Пусть на $(k+1)$-й итерации вычисляется матрица $\mathbf{D}_{k+1}$ согласно соотношению

$$\mathbf{D}_{k+1} = \mathbf{D}_k + \Delta\mathbf{D}_k$$

и

$$\Delta\mathbf{D}_k = \frac{[\Delta\mathbf{X}_k - \mathbf{D}_k\Delta\mathbf{g}_k]^T[\Delta\mathbf{X}_k - \mathbf{D}_k\Delta\mathbf{g}_k]}{[\Delta\mathbf{X}_k - \mathbf{D}_k\Delta\mathbf{g}_k]^T\Delta\mathbf{g}_k},$$

где $\Delta\mathbf{X}_k = \mathbf{X}_{k+1} - \mathbf{X}_k$, $\Delta\mathbf{g}_k = \nabla f(\mathbf{X}_{k+1}) - \nabla f(\mathbf{X}_k)$, и начальная матрица $\mathbf{D}_0$ выбирается симметричной, положительно-определенной. Если $f(\mathbf{X})$ — квадратичная функция, то спустя n шагов $\mathbf{D}_n = \mathbf{H}^{-1}$ (где $\mathbf{H}$ — матрица Гессе для $f(\mathbf{X})$). Докажите это утверждение.

3.82. Пусть $\mathbf{H}$ — симметричная матрица порядка $n \times n$ и $f(\mathbf{X}) = \mathbf{C}^T\mathbf{X} + \frac{1}{2}\mathbf{X}^T\mathbf{H}\mathbf{X}$. Рассмотрим следующий алгоритм коррекции ранга 1 для минимизации $f(\mathbf{X})$. Пусть $\mathbf{D}_1$ — положительно определенная матрица порядка $n \times n$ и $\mathbf{X}_1$ — заданный вектор.

Для $k = 1, 2, \ldots, n$ и возьмем в качестве λ_k оптимальное решение задачи минимизации $f(\mathbf{X}_k + \lambda\mathbf{s}_k)$, $\lambda > 0$. Пусть $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k +$

$+ \lambda_k s_k$, где $s_k = -D_k \nabla f(X_k)$, D_{k+1} определяется по формулам

$$D_{k+1} = D_k + \frac{(p_k - D_k g_k)(p_k - D_k g_k)^T}{g_k^T (p_k - D_k g_k)},$$

где $p_k = X_{k+1} - X_k$; $g_k = Hp_k$.

а) проверьте, что ранг матрицы, добавляемой к D_k, равен единице;

б) покажите, что $p_i = D_{k+1} q_i$ для $i \leqslant k$, $k = 1, 2, \ldots, n$;

в) если H имеет обратную, то справедливо ли равенство

$$D_{n+1} = H^{-1},$$

г) будут ли направления $s_1, s_2, \ldots, s_n$ сопряженными;

е) применить алгоритм для минимизации функции

$$f(X) = 12x_1 - 6x_2 + x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2.$$

3.83. Допустим, что используется последовательность сопряженных направлений $s_1, s_2, \ldots, s_n$ по отношению к некоторой матрице H порядка $(n \times n)$. Тогда, если H невырождена, то

$$H^{-1} = \sum_{j=1}^{n} \frac{s_j s_j^T}{s_j^T H s_j}.$$

Доказать справедливость этого утверждения.

3.7. МЕТОДЫ ВОЗМОЖНЫХ НАПРАВЛЕНИЙ

Метод Зойтендейка

Метод Зойтендейка является типичным представителем класса методов возможных направлений для решения задач НП при ограничениях. На каждой итерации метода строится возможное направление спуска, а затем проводится оптимизация вдоль этого направления.

Метод использует следующее понятие возможного направления. Рассмотрим задачу минимизации $f(X)$ при условии $X \in R^{(n)}$.

Определение 3.3. *Ненулевой вектор s оказывается возможным направлением в точке $X \in R^{(n)}$, если существует такое $\delta > 0$, что $X + \lambda s \in R^{(n)}$ для всех $\lambda \in (0, \delta)$. Вектор s называется возможным направлением спуска в точке $X \in R^{(n)}$, если существует такое $\delta > 0$, что $f(X + \lambda s) < f(X)$ и $X + \lambda s \in R^{(n)}$ для всех $\lambda \in (0, \delta)$.*

Случай линейных ограничений

Вначале рассмотрим случай, когда допустимая область R определена системой линейных ограничений, так что рассматриваемая задача имеет вид:

$$\text{минимизировать } f(X) \tag{3.7.1}$$

при условиях

$$AX \leqslant b; \tag{3.7.2}$$

$$HX = h, \tag{3.7.3}$$

где A — матрица порядка $(m \times n)$; H — матрица порядка $l \times n$; b — m-мерный вектор, а h — l-мерный вектор.

Предположим, что ограничения (3.7.2) можно представить в виде: $A_1X = b_1$ и $A_2X \leqslant b_2$, где $A^T = (A_1^T, A_2^T)$, а $b^T = (b_1^T, b_2^T)$. Тогда ненулевой вектор s является возможным направлением в точке X тогда и только тогда, когда $A_1 s \leqslant 0$ и $Hs = 0$. Если, кроме того, $\nabla f^T(X)\, s < 0$, то s является возможным направлением спуска.

Естественный подход к построению такого направления заключается в минимизации $\nabla f(X)^T s$ при условиях $A_1 s \leqslant 0$ и $Hs = 0$.

При этом в задачу необходимо ввести условие, которое бы ограничивало вектор s. Такое ограничение называется нормирующим. Наиболее часто используются следующие 3 задачи построения возможного направления спуска, в каждой из которых используются различные условия нормировки [7]:

Задача P_1:

$$\text{минимизировать } \nabla f(X)^T s \tag{3.7.4}$$

при условиях

$$\begin{aligned} A_1 s &\leqslant 0; \\ Hs &= 0; \end{aligned} \tag{3.7.5}$$

$$-1 \leqslant s_j \leqslant 1, \quad j = \overline{1, n}. \tag{3.7.6}$$

Задача P_2:

$$\text{минимизировать } \nabla f(X)^T s$$

при условиях

$$A_1 s \leqslant 0; \quad Hs = 0;$$

$$s^T s \leqslant 1. \tag{3.7.7}$$

Задача P_3:

$$\text{минимизировать } \nabla f(X)^T s$$

при условиях

$$A_1 s \leqslant 0; \quad Hs = 0;$$

$$\nabla f(X)^T s \geqslant -1. \tag{3.7.8}$$

Задачи P_1 и P_3 являются задачами ЛП и, следовательно, могут быть решены симплекс-методом.

Если минимальное значение целевой функции в задачах P_1, P_2 и P_3 отрицательно, то нами определено возможное направление спуска s. Если же минимальное значение целевой функции равно нулю, то текущая точка X является точкой Куна — Таккера (т. е. точкой оптимального решения [7]). Это позволяет сформулировать следующий алгоритм.

Алгоритм метода Зойтендейка

Пусть требуется

$$\text{найти } \min f(X)$$

при условиях

$$AX \leqslant b; \quad HX = h.$$

Предварительный этап. Найти начальную допустимую точку X_1, для которой $AX_1 \leqslant b$ и $HX_1 = h$. Положить $k = 1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап. ***k-я итерация.*** Шаг 1. Пусть задан X_k. Предположим, что $A^T = (A_1^T, A_2^T)$, так что $A_1 X_k = b_1$ и $A_2 X_k < b_2$. Взять в качестве s_k оптимальное решение следующей задачи:

$$\text{минимизировать } \nabla f(X)^T s \tag{3.7.9}$$

при условиях

$$A_1 s \leqslant 0; \tag{3.7.10}$$

$$Hs = 0; \tag{3.7.11}$$

$$-1 \leqslant s_j \leqslant 1. \tag{3.7.12}$$

Если $\nabla f(X_k^T)\, s_k = 0$, то остановиться; X_k — искомая точка Куна — Таккера. В противном случае перейти к шагу 2.

Шаг 2.

1. Найти оптимальное решение задачи:

$$\text{минимизировать } f(\mathbf{X}_k + \lambda \mathbf{s}_k) \tag{3.7.13}$$

при условии

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\max}, \tag{3.7.14}$$

где

$$\lambda_{\max} = \begin{cases} \min\limits_{i} \left\{ \dfrac{\hat{b}_i}{\hat{s}_i} / \hat{s}_i > 0 \right\}, & \text{если } \hat{\mathbf{s}} \not< 0, \\ \infty, & \text{если } \hat{\mathbf{s}} \leqslant 0; \end{cases} \tag{3.7.15}$$

$$\hat{\mathbf{b}} = \mathbf{b}_2 - \mathbf{A}_2\mathbf{X}; \quad \hat{\mathbf{s}} = \mathbf{A}_2\mathbf{s}_k.$$

2. Обозначив его через λ_k, положить $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \lambda_k \mathbf{s}_k$.

Определить новое множество активных ограничений в $\mathbf{X}_{k+1}$ и переопределить $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{A}_2$. Заменить k на $k+1$ и перейти к шагу 1.

Задачи с нелинейными ограничениями-неравенствами

Теперь рассмотрим задачу, в которой допустимая область задается системой ограничений — системой неравенств нелинейного типа:

$$\text{минимизировать } f(\mathbf{X}) \tag{3.7.16}$$

при условиях

$$g_i(\mathbf{X}) \leqslant 0, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{3.7.17}$$

Пусть $\mathbf{X}$ — допустимая точка, а $\mathbf{I}$ — множество индексов активных в этой точке ограничений, т. е. $\mathbf{I} = \{i : g_i(\mathbf{X}) = 0\}$.

Предположим, что функции f и g_i непрерывно дифференцируемы. Если $\nabla f(\mathbf{X})^T \mathbf{s} < 0$ и $\nabla g_i(\mathbf{X})^T \mathbf{s} < 0$ при $i \in \mathbf{I}$, то вектор s является возможным направлением спуска.

Алгоритм Зойтендейка для задачи (3.7.16) — (3.7.17) имеет следующий вид.

Предварительный этап. Выбрать точку $\mathbf{X}_1$, для которой $g_i(\mathbf{X}_1) \leqslant 0$ при $i = \overline{1, m}$. Положить $k = 1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап.

Шаг 1. Положить $\mathbf{I} = \{i : g_i(\mathbf{X}_k) = 0\}$ и решить следующую задачу:

$$\text{минимизировать } z \tag{3.7.18}$$

при условиях

$$\nabla f(\mathbf{X}_k)^T \mathbf{s} - z \leqslant 0; \tag{3.7.19}$$

$$\nabla g_i(\mathbf{X}_k)^T \mathbf{s} - z \leqslant 0, \quad i \in \mathbf{I}; \tag{3.7.20}$$

$$-1 \leqslant s_j \leqslant 1. \tag{3.7.21}$$

Пусть $(z_k, \mathbf{s}_k)$ — оптимальное решение задачи (3.7.18) — (3.7.21). Если $z_k = 0$, то остановиться, точка $\mathbf{X}_k$ является искомой (точка Куна — Таккера). Если $z_k < 0$, то перейти к шагу 2.

Шаг 2. Взять в качестве λ_k оптимальное решение следующей задачи одномерной минимизации:

$$\text{минимизировать } f(\mathbf{X}_k + \lambda \mathbf{s}_k) \tag{3.7.22}$$

при условии

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\max}, \tag{3.7.23}$$

где

$$\lambda_{\max} = \max\{\lambda : g_i(\mathbf{X}_k + \lambda \mathbf{s}_k)\} \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m}. \tag{3.7.24}$$

Положить $\mathbf{X}_{k+1} = \mathbf{X}_k + \lambda_k \mathbf{s}_k$, заменить k на $k+1$ и перейти к шагу 1 следующей итерации.

Пример 3.14. Рассмотрим задачу:

$$\text{минимизировать } (2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2)$$

$$\text{при условиях } \quad x_1 + 5x_2 \leqslant 5;$$
$$2x_1^2 - x_2 \leqslant 0;$$
$$-x_1 \leqslant 0;$$
$$-x_2 \leqslant 0.$$

Будем решать эту задачу методом Зойтендейка, начиная процесс с точки $X_1 = [0.0;\ 0.75]^T$. Заметим, что $\nabla f(X)^T = (4x_1 - 2x_2 - 4;\ -2x_1 + 4x_2 - 6)$.

Первая итерация. Поиск направления. В точке $X_1 = [0.0;\ 0.75)^T$ имеем $\nabla f(X_1) = (-5.5;\ -3.0)^T$, а множество индексов активных ограничений есть $I = 3$.

При этом $\nabla g_3(X_1) = [-1;\ 0]^T$. Задача нахождения направления имеет вид:

$$\text{минимизировать } z$$

$$\text{при условиях } \quad -5.5s_1 - 3.0s_2 - z \leqslant 0;$$
$$-s_1 \qquad -z \leqslant 0;$$
$$-1 \leqslant s_j \leqslant 1, \quad j = \overline{1,\ 2}.$$

Решая эту ЛП задачу, например, симплекс-методом легко проверить, что оптимальным решением ее является вектор $s_1 = [1.00;\ -1.0]^T$ и $z_1 = -1.0$.

Линейный поиск. Любая точка по направлению $s_1 = [1.0;\ -1.0]^T$ из точки $X_1 = [0.0;\ 0.75]^T$ может быть представлена в виде $X_1 + \lambda s_1 = [\lambda;\ 0.75 - \lambda]$, а соответствующее ей значение целевой функции равно $f(X_1 + \lambda s_1) = 6\lambda^2 + 2.5\lambda - 3.375$. Минимальное значение λ, для которого $X_1 + \lambda s_1$ остается допустимой точкой, равно $\lambda = 0.414$.

Значение λ_1 получается в результате решения следующей задачи одномерной минимизации:

$$\text{минимизировать } 6\lambda^2 + 2{,}5\lambda - 3{,}375$$

$$\text{при условии } \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 0.414.$$

Оптимальное значение $\lambda_1 = 0.2083$. Следовательно,

$$X_2 = X_1 + \lambda_1 s_1 = [0{,}2083;\ 0{,}5417]^T.$$

Остальные итерации проводятся аналогично. Результаты последующих итераций приведены в табл. 3.19.

Модификация алгоритма возможных направлений

Анализ алгоритма Зойтендейка показал, что он может не сходиться к точке Куна — Таккера. Трудность здесь состоит в том, что шаги вдоль генерируемых направлений стремятся к нулю, вызывая остановку процесса в неоптимальной точке.

Таблица 3:19

k	$\mathbf{x}_k$	$f(\mathbf{x}_k)$	Поиск направления			Линейный поиск		
			$\nabla f(\mathbf{x}_k)$	$\mathbf{s}_k$	z_k	λ_{max}	λ_k	$\mathbf{x}_{k+1}$
1	(0.00; 0.75)	—3.375	(—5.50; —3.00)	(1.000; —1.000)	—1.000	0.4140	0.2083	0.2083; 0.5417
2	(0.208; 0.541)	—3.635	(—4.25; —4.25)	(1.00; 1.000)	—8.5	0.3472	0.3472	0.555; 0.889
3	(0.555; 0.889)	—6.346	(—3.556; —3.555)	(1.00; —0.533)	—1.663	0.0924	0.0924	0.648; 0.840
4	(0.648; 0.840)	—6.468	(—3.088; —3.937)	(—0.517; 2.0)	—2.340	0.0343	0.0343	0.630; 0.874

Таблица 3:20

k	$\mathbf{x}_k$	$f(\mathbf{x}_k)$	Поиск направления			Линейный поиск		
			$\nabla f(\mathbf{x}_k)$	$\mathbf{s}_k$	z_k	λ_{max}	λ_k	$\mathbf{x}_{k+1}$
1	(0.00; 0.75)	—3.375	(—5.50; —3.00)	(0.714; —0.0357)	—0.714	0.84	0.84	(0.600; 0.720)
2	(0.600; 0.720)	—5.827	(—3.04; —4.32)	(—0.0712; —0.117)	—0.288	1.562	1.562	(0.480; 0.902)
3	(0.489; 0.902)	—6.145	(—3.849; —3.369)	(0.0957; —0.0555)	—0.1816	1.564	1.564	(0.6385; 0.8154)
4	(0.6385; 0.8154)	—6.343	(—5.63; —4.02)	(—0.016; 0.0433)	—0.840	1.419	1.419	(0.616; 0.877)
5	(0.616; 0.877)	—6.508	(—3.29; —3.725)	(0.0268; —0.0132)	—0.0303	1.455	1.455	(0.655; 0.858)

Модифицированный алгоритм метода возможных направлений свободен от указанного недостатка и гарантирует сходимость алгоритма к оптимальному решению.

Начальный этап. Выбрать начальную точку X_1, для которой $g_i(X_1) \leqslant 0$ при $i = 1, 2, \ldots, m$. Положить $k = 1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап. Шаг 1. Положить (z_k, s_k) равным оптимальному решению следующей задачи ЛП:

$$\text{минимизировать } z \tag{3.7.25}$$

при условиях

$$\nabla g_i(X_k)^T s - z \leqslant -g_i(X_k); \tag{3.7.26}$$

$$-1 \leqslant s_j \leqslant 1, \quad i = \overline{1, m}.$$

Если $z_k = 0$, то остановиться, X_k является точкой Куна — Таккера. В противном случае (если $z_k < 0$) перейти к шагу 2.

Как видим, в данном варианте алгоритма при определении направления движения учитываются все ограничения: как активные, так и неактивные (сравните условие (3.7.20) с (3.7.26)).

Шаг 2 повторяет полностью соответствующий шаг базового алгоритма возможных направлений.

Пример 3.16. Рассмотрим задачу предыдущего примера 3.14. Применим для ее решения модифицированный алгоритм возможных направлений.

Выберем в качестве начальной точки ту же точку $X_1 = (0.00; 0.75)^T$, что и прежде. Заметим, что градиент целевой функции равен $\nabla f(X_1) = [4x_1 - 2x_2 - 4; 4x_2 - 2x_1 - 6]^T$, а градиенты функций-ограничений соответственно равны $[1; 5]^T$; $[4x_1; -1]^T$; $[-1; 0]^T$; $[0; -1]^T$.

Первая итерация. Поиск направления. В точке $X_1 = [0.0; 0.75]^T$ имеем: $\nabla f(X_1) = [-5.5; -3.0]^T$. Задача поиска направлений s имеет вид:

$$\text{минимизировать } z \tag{3.7.27}$$

при условиях

$$\left.\begin{aligned} -5{,}5s_1 - 3s_2 - z &\leqslant 0; \\ s_1 + 5s_2 - z &\leqslant 1{,}25; \end{aligned}\right\} \tag{3.7.28}$$

$$\begin{aligned} -s_2 - z &\leqslant 0{,}75; \\ -s_1 - z &\leqslant 0; \end{aligned} \tag{3.7.29}$$

$$-1 \leqslant s_j \leqslant 1, \quad j = \overline{1, 2}.$$

В правой части всех ограничений этой задачи, кроме первого, стоят значения $-g_i(X_1)$ для $i = 1, 2, 3, 4$. Оптимальным решением этой задачи является вектор $s_1 = [0.7143; -0.0357]^T$, при котором $z = -0.7145$.

Линейный поиск. Необходимо найти

$$\min f(X_1 + \lambda s_1) = f(0{,}7143\lambda; 0.75 - 0{,}35\lambda) = \\ = 0.972\lambda^2 - 4.036\lambda - 3.375. \tag{3.7.30}$$

Максимальное значение λ_{max}, для которого точка $X_1 + \lambda s_1$ допустима, определяется соотношениями

$$g_i(X_1 + \lambda s_1) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, 4} \quad \text{и равно } 0.84.$$

Тогда искомое решение задачи (3.7.30) определяется при условии $0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{max}$ и равно 0.84.

Таким образом, $X_2 = X_1 + \lambda_1 s_1 = [0.60;\ 0.72]^T$.

Далее этот процесс повторяется аналогичным образом. В табл. 3.20 приведены результаты вычислений на первых пяти итерациях. В конце пятой итерации получена точка $[0.655;\ 0.858]^T$ со значением целевой функции —6.559. Заметим, что в оптимальной точке $[0.659;\ 0.868]^T$ значение целевой функции равно — 6.613.

Метод проекции градиента Розена

Пусть имеется следующая НП-задача с линейными ограничениями:

$$\text{минимизировать } f(\mathbf{X}) \qquad (3.7.31)$$

при условиях

$$\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b},\quad \mathbf{HX} = \mathbf{h}, \qquad (3.7.32)$$

где $\mathbf{A}$ — матрица порядка $m \times n$; $\mathbf{H}$ — матрица порядка $l \times n$; $\mathbf{b}$ — m-мерный вектор; $\mathbf{h}$ — l-мерный вектор, а функция f — дифференцируема.

В заданной допустимой точке $\mathbf{X}$ направлением наискорейшего спуска является вектор — $\nabla f(\mathbf{X})$. Однако движение вдоль вектора — $\nabla f(x)$ может нарушить допустимость. Чтобы ее сохранить, спроектируем этот вектор так, чтобы двигаться вдоль допустимого направления спуска $\mathbf{s} = -\mathbf{P}\nabla f(\mathbf{X})$.

Рассмотрим задачу (3.7.31) — (3.7.32). Пусть $\mathbf{X}$ — допустимая точка, для которой $\mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{b}_1$ и $\mathbf{A}_2\mathbf{X} \leqslant \mathbf{b}_2$, где $\mathbf{A} = [\mathbf{A}_1^T \mathbf{A}_2^T]$, а $\mathbf{b}^T = [\mathbf{b}_1^T, \mathbf{b}_2^T]$. Предположим, что функция f дифференцируема в $\mathbf{X}$. Если $\mathbf{P}$ — матрица проектирования такая, что $\mathbf{P}\nabla f(\mathbf{X}) \neq 0$, то вектор $\mathbf{s} = -\mathbf{P}\nabla f(\mathbf{X})$ является направлением спуска для функции $f(\mathbf{X})$ в точке $\mathbf{X}$. Кроме того, если $\mathbf{M}^T = [\mathbf{A}_1^T, \mathbf{H}^T]$ имеет полный ранг и если $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{M}^T(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1}\mathbf{M}$ (3.7.33), то $\mathbf{s}$ — возможное направление спуска.

Заметим, что матрица $\mathbf{P}$, определяемая выражением (3.7.33), действительно является матрицей проектирования, удовлетворяющей равенствам: $\mathbf{P} = \mathbf{P}^T$ и $\mathbf{PP} = \mathbf{P}$. Кроме того, $\mathbf{MP} = 0$, т. е. $\mathbf{A}_1\mathbf{P} = 0$ и $\mathbf{HP} = 0$. Таким образом, матрица $\mathbf{P}$ проектирует каждую вектор-строку матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{H}$ в нулевой вектор. А так как строками матриц $\mathbf{A}_1$ и $\mathbf{H}$ являются градиенты функций активных ограничений, то $\mathbf{P}$ — это матрица, проектирующая градиенты функций активных ограничений в нулевой вектор.

Рассмотрим случай $\mathbf{P}\nabla f(\mathbf{X}) = 0$. (3.7.33)

Тогда

$$\mathbf{P}\nabla f(\mathbf{X}) = [\mathbf{I} - \mathbf{M}^T(\mathbf{M}\mathbf{M}^T)^{-1}\mathbf{M}]\nabla f(\mathbf{X}) = \nabla f(\mathbf{X}) + \mathbf{M}^T\mathbf{W} =$$
$$= \nabla f(\mathbf{X}) + \mathbf{A}_1^T\mathbf{u} + \mathbf{H}^T\mathbf{v};\quad \mathbf{w}^T = [\mathbf{u}^T, \mathbf{v}^T]. \qquad (3.7.34)$$

Если $\mathbf{u} \geqslant 0$, то точка $\mathbf{X}$ удовлетворяет условиям Куна — Таккера. Если же $\mathbf{u} \leqslant 0$, то, как показано в [7], можно определить новую матрицу проектирования $\hat{\mathbf{P}}$ такую, что вектор $\mathbf{s} = -\hat{\mathbf{P}}\nabla f(\mathbf{X})$ будет возможным направлением спуска.

Пусть некоторая компонента u_j вектора $\mathbf{u}$ отрицательна, а $\hat{\mathbf{M}}^T = [\hat{\mathbf{A}}_1^T, \mathbf{H}^T]$, где $\hat{\mathbf{A}}_1$ получена из $\mathbf{A}$ вычеркиванием строки, соответствующей u_j. Обозначим $\hat{\mathbf{P}} = \mathbf{I} - \hat{\mathbf{M}}^T(\hat{\mathbf{M}}\hat{\mathbf{M}}^T)^{-1}\hat{\mathbf{M}}$, и пусть $\mathbf{s} = -\hat{\mathbf{P}}\nabla f(\mathbf{X})$. Тогда вектор $\mathbf{s}$ является возможным направлением спуска.

Доказательство этого утверждения приводится в [1]. На этом утверждении (свойстве) и построен нижеследующий алгоритм.

Алгоритм метода проекции градиента Розена

Итак, пусть имеется задача НП вида $\min f(\mathbf{X})$ при условиях

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b};\quad \mathbf{HX} = \mathbf{h}.$$

Предварительный этап. Выбрать точку X_1, для которой $AX_1 \leqslant b$, $HX_1 = h$. Представим A^T и b^T в виде $[A_1^T, A_2^T]$ и $[b_1^T, b_2^T]$, где соответственно $A_1X_1 = b_1$, $A_2X_1 < b_2$. Положить $k = 1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап. Шаг 1. Положить $M^T = [A_1^T H^T]$. Если $M = \varnothing$, т. е. не содержит ни одного столбца, то положить $P = I$. В противном случае положить $P = I - M^T (MM^T)^{-1} M$. Положить $s_k = -P\nabla f(X_k)$. Если $s_k \neq 0$, то перейти к шагу 2. Если $s_k = 0$ и $M = \varnothing$, то остановиться; в противном случае (если $M \neq \varnothing$) положить $w = -(MM^T)^{-1} M\nabla f(X_k)$. Пусть $w^T = (u^T, v^T)$. Если $u \geqslant 0$, то остановиться, X_k — точка Куна — Таккера. Если же $u \not\geqslant 0$, то выбрать отрицательную компоненту u_j этого вектора и переопределить матрицу A, вычеркивая строку, соответствующую u_j, и повторить шаг 1.

Шаг 2. Взять в качестве λ_k оптимальное решение следующей задачи линейного поиска:

$$\text{минимизировать } f(X_k + \lambda s_k)$$

при условии

$$0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_{\max},$$

где $\lambda_{\max}$ определяется в соответствии с (3.7.15). Положить $X_{k+1} = X_k + \lambda_k \cdot s_k$, заменить k на $k+1$ и перейти к шагу 1.

Пример 3.16. Решить методом проекции градиента следующую задачу:

$$\min 2x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_1x_2 - 4x_1 - 6x_2$$

при условиях

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &\leqslant 2; \\ x_1 + 5x_2 &\leqslant 5; \\ -x_1 \qquad &\leqslant 0; \\ -x_2 &\leqslant 0. \end{aligned}$$

Выберем в качестве начальной точку $[0;\ 0]^T$.

Первая итерация. Поиск направления. В точке $X_1 = [0;\ 0]^T$ имеем: $\nabla f(X_1) = [-4;\ -6]^T$. Кроме того, в X_1 активными являются только ограничения неотрицательности, так что

$$A_1 = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}; \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}.$$

Тогда

$$P = I - A_1^T (A_1A_1)^T A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix},$$

и $s_1 = -P\nabla f(X_1) = [0;\ \ 0]^T$. Учитывая, что ограничения-равенства в задаче отсутствуют, вектор $v = 0$, и поэтому вычислим

$$w = u = -(A_1A_1^T)^{-1} A_1\nabla f(X_1) = [-4;\ -6]^T.$$

Выберем $u_4 = -6$ и удалим градиент, соответствующий четвертому ограничению из A_1. Матрица A_1 преобразуется к виду $\hat{A}_1 = [-1;\ 0]$. Преобразованная матрица проектирования принимает вид

$$\hat{P} = I - \hat{A}_1 \cdot (\hat{A}_1 \cdot \hat{A}_1^T)^{-1} \hat{A}_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix},$$

а направление движения s_1 определяется вектором

$$s_1 = -\hat{P}\nabla f(X_1) = -\begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \times \begin{bmatrix} -4 \\ -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 6 \end{bmatrix}.$$

Линейный поиск. Любая точка X_2, полученная движением из X_1 по направлению s_1, может быть представлена в виде $X_2 = X_1 + \lambda s_1 = [0;\ 6\lambda]^T$, а соответствующее ей значение целевой функции равно $f(X_2) = 72\lambda^2 - 36\lambda$. Максимальное значение λ, для которого точка $X_1 + \lambda s_1$ допустима, получается в соответствии с (3.7.15) и равно

$$\lambda_{max} = \min\left\{\frac{2}{6};\ \frac{5}{30}\right\} = \frac{1}{6}.$$

Следовательно, λ_1 является оптимальным решением следующей задачи:

$$\text{минимизировать } 72\lambda^2 - 36\lambda$$

при условии $\qquad 0 \leqslant \lambda \leqslant \frac{1}{6}.$

Оптимальное решение равно $\lambda_1^0 = \frac{1}{6}$, так что $X_2 = X_1 + \lambda_1^0 s_1 = [0;\ 1]^T$.

Вторая итерация. *Поиск направления.* В точке $X_2 = [0;\ 1]^T$ имеем $\nabla f(X_2) = [-6;\ -2]^T$. Кроме того, в этой точке активными являются второе и третье ограничения, так что получаем

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ -1 & 0 \end{bmatrix};\quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

Далее имеем $\quad P = I - A_1^T(A_1A_1^T)^{-1}\cdot A_1 = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$,

и, следовательно, $-P\nabla f(X_2) = [0;\ 0]^T$. Вычисляем

$$u = -(A_1A_1^T)^{-1}A_1\nabla f(X_2) = [2/5;\ -28/5]^T.$$

Так как $u_3 < 0$, то строка $[-1;\ 0]$ вычеркивается из A_1 и получаем матрицу $\hat{A}_1 = [1;\ 5]$. Матрица проектирования и соответствующее направление определяются следующим образом:

$$\hat{P} = I - \hat{A}_1^T(\hat{A}_1\hat{A}_1^T)^{-1}A_1 = \begin{bmatrix} \frac{25}{26} & -\frac{5}{26} \\ -\frac{5}{26} & \frac{1}{26} \end{bmatrix};$$

$$s_2 = -\hat{P}\nabla f(X_2) = \left[\frac{70}{13};\ -\frac{14}{13}\right]^T.$$

Так как для выбора направления s_2 длина вектора s_2 не имеет значения, то вектор $\left[\frac{70}{13};\ -\frac{14}{13}\right]^T$ эквивалентен вектору $s_2 = [5;\ -1]^T$.

Линейный поиск. Итак, рассмотрим точку $X_2 + \lambda s_2 = [5\lambda; 1 - \lambda]^T$, в которой значение целевой функции равно $f(X_2 + \lambda \cdot s_2) = 62\lambda^2 - 28\lambda - 4$. Максимальное значение λ, для которого точка $x_2 + \lambda s_2$ допустима в соответствии с (3.7.15), равно

$$\lambda_{max} = \min\{1/4;\ 1/1\} = \frac{1}{4}.$$

Таким образом, λ_2 определяется из решения задачи:

минимизировать $\quad 62\lambda^2 - 28\lambda - 4$

при условии $\quad 0 \leqslant \lambda \leqslant 1/4.$

Оптимальным решением является $\lambda_2 = \frac{7}{31}$, так что

$$X_3 = \left[\frac{35}{31};\ \frac{24}{31}\right]^T.$$

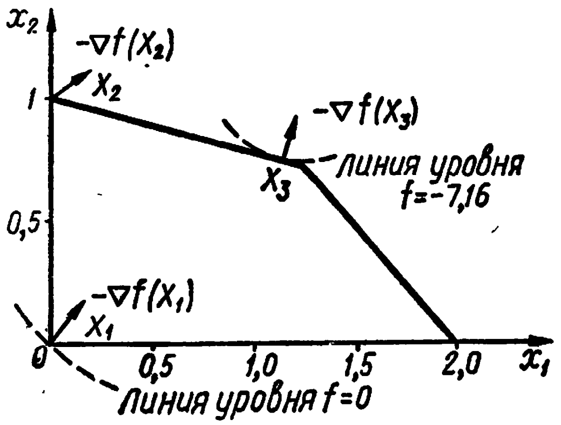

Рис. 3.13

Третья итерация. *Поиск направления.* В точке X_3 вычисляем

$$\nabla f(X_3) = \left[-\frac{32}{31};\ -\frac{160}{31}\right]^T.$$

Кроме того, в этой точке активным является второе ограничение, т. е. $A_1 = [1;\ 5]$.

Определим матрицу проектирования

$$P = I - A_1^T (A_1 A_1^T)^{-1} A_1 = 1/_{26} \times \begin{bmatrix} 25 & -5 \\ -5 & 1 \end{bmatrix}$$

и направление $s_2 = -P\,\nabla f(X_3) = [0;\ 0]^T$.

Далее вычисляем

$$u = -(A_1 A_1^T)^{-1} A_1 \nabla f(X_3) = {}^{32}/_{31} > 0.$$

Следовательно, точка X_3 — оптимальна. Заметим, что градиент функции активного в этой точке ограничения противоположен по знаку $\nabla f(X_3)$ и кроме того $\nabla f(X_3) + u \nabla g_1(X_3) = 0$ для $u = \frac{32}{31}$, поэтому точка X_3 — точка Куна — Таккера. Так как функция $f(X)$ — выпукла, то точка X_3 является точкой глобального минимума. Процесс решения этой задачи приведен на рис. 3.13.

Задачи и упражнения

3.84. В каждом из следующих случаев приведите соответствующую характеристику множества возможных направлений в точках:

1) $S = \{X : AX = b;\ \ X \geqslant 0\}$;
2) $S = \{X : AX \leqslant b;\ HX = h;\ X \geqslant 0\}$;
3) $S = \{X : AX \geqslant b;\ X \geqslant 0\}$.

3.85. Рассмотрим задачу минимизации $f(\mathbf{X})$ при условии $g_i(\mathbf{X}) \leqslant 0$, $i = \overline{1, m}$. Предположим, что $\mathbf{X}$ — допустимая точка, в которой $g_i(\mathbf{X}) = 0$ при $i \in I$. Предположим также, что функции $g_i(\mathbf{X})$ вогнуты или квазивогнуты в $\mathbf{X}$ при $i \in I$. Покажите, что можно получить возможное направление спуска или убедиться в том, что $\mathbf{X}$ — точка Куна — Таккера, решив следующую задачу:

$$\text{минимизировать } \nabla f(\mathbf{x})^T \mathbf{s}$$

$$\text{при условиях} \quad \nabla f(\mathbf{X})^T \mathbf{s} \leqslant 0, \quad i \in I;$$

$$-1 \leqslant s_j \leqslant 1, \quad j = \overline{1, m}.$$

3.86. Рассмотрим следующую задачу НП:

$$\text{минимизировать } (x_1 - 2)^2 + (x_2 - 1)^2$$

$$\text{при условиях} \quad (x_1^2 - x_2) \leqslant 0;$$

$$x_1 - 2x_2 + 1 = 0.$$

Взяв в качестве начального приближения точку $\mathbf{X}_0 = [1;\ 1]^T$, решить эту задачу методом Зойтендейка, используя следующие два условия нормировки:

а) $|s_j| \leqslant 1$, $j = 1, 2$; б) $\mathbf{s}^T\mathbf{s} \leqslant 1$.

3.87. Решить следующие задачи методом Зойтендейка:

$$\text{минимизировать } x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3$$

при условиях

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2;$$

$$-2x_1 + 2x_2 \leqslant 3;$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

3.88. (Нелинейные ограничения):

$$\text{минимизировать } x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3$$

$$\text{при условиях} \quad 2x_1^2 + x_2 \leqslant 15;$$

$$-x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 3;$$

$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

3.89. Рассмотрим следующую НП-задачу с линейными ограничениями и нелинейными ограничениями-неравенствами:

$$\text{минимизировать } f(\mathbf{X})$$

$$\text{при условиях} \quad g_i(\mathbf{X}) \leqslant 0, \quad i = \overline{s, m};$$

$$\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b};$$

$$\mathbf{HX} = \mathbf{h}.$$

Пусть $\mathbf{X}$ — допустимая точка, $I = \{i : g_i(\mathbf{X}) = 0\}$. Предположим, что $\mathbf{A}_1\mathbf{X} = \mathbf{b}_1$, $\mathbf{A}_2\mathbf{x} < \mathbf{b}_2$, где $\mathbf{A}^T = [\mathbf{A}_1^T,\ \mathbf{A}_2^T]$, $\mathbf{b}^T = [\mathbf{b}_1^T,\ \mathbf{b}_2^T]$.

а) Покажите, что можно получить возможное направление спуска или убедиться, что $\mathbf{X}$ — точка Куна — Таккера с помощью решения следующей задачи ЛП:

$$\text{минимизировать } z$$

при условиях
$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X})^T \mathbf{s} - z \leqslant 0;$$
$$\nabla g_i(\mathbf{X})^T \mathbf{s} - z \leqslant 0;$$
$$\mathbf{A}_1\mathbf{s} \leqslant 0, \quad i \in I;$$
$$\mathbf{H}\mathbf{s} = 0.$$

в) Используя этот подход, решите задачу, рассмотренную в примере 3.88, и сравните полученные в обоих случаях траектории.

3.90. Как известно, для задачи НП вида $\min f(\mathbf{X})$ при условиях $g_i(\mathbf{X}) \leqslant 0$ направление спуска определяется решением следующей задачи:

$$\text{минимизировать } z$$

при условиях
$$\nabla \mathbf{f}(\mathbf{X})^T \mathbf{s} - z \leqslant 0;$$
$$\nabla g_i(\mathbf{X})^T \mathbf{s} - z \leqslant 0;$$
$$-1 \leqslant s_j \leqslant 1.$$

а) Покажите, что этот метод нельзя приспособить к решению задачи с нелинейными ограничениями-равенствами вида $h_i(\mathbf{X}) = 0$ заменой каждого такого ограничения двумя неравенствами: $h_i(\mathbf{X}) \leqslant 0$; $h_i(\mathbf{X}) \geqslant 0$. Один из способов учета ограничений вида $h_i(\mathbf{X}) = 0$ состоит в замене каждого ограничения-равенства двумя неравенствами: $h_i(\mathbf{X}) \leqslant \varepsilon$ и $h_i(\mathbf{X}) \geqslant -\varepsilon$, где $\varepsilon > 0$ — некоторое малое число и в последующем решении приведенной выше задачи поиска направления. Используйте этот метод для решения следующей задачи:

$$\text{минимизировать } x_1^3 + 2x_2^2 x_3 + 2x_3$$

при условиях $x_1^2 + x_2 + x_3^2 = 4; \quad x_1^2 - x_2 + 2x_3 \leqslant 2.$

3.91. Пусть имеется следующая задача НП:

$$\text{минимизировать } f(\mathbf{X})$$

при условиях
$$g_i(\mathbf{X}) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m};$$
$$h_i(\mathbf{X}) = 0, \quad i = \overline{1, l}.$$

Пусть $\hat{\mathbf{X}}$ — допустимая точка, для которой $g_i(\hat{\mathbf{X}}) = 0$ при $i \in I$.

а) Докажите, что для того чтобы $\hat{\mathbf{X}}$ была точкой Куна — Таккера, необходимо и достаточно, чтобы равнялось нулю оптимальное значение целевой функции следующей НП-задачи:

$$\text{минимизировать } \nabla \mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}})^T s$$

при условиях
$$\nabla g_i(\mathbf{X})^T \mathbf{s} \leqslant 0, \quad i \in I;$$
$$\nabla \mathbf{h}_i^T(\mathbf{X})\mathbf{s} = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, l;$$
$$-1 \leqslant s_j \leqslant 1, \quad j = 1, \ldots h.$$

3.92. Рассмотрим следующую задачу с двухсторонними ограничениями на переменные:

$$\text{минимизировать } f(\mathbf{X})$$

при условиях $\quad a_j \leqslant x_j \leqslant b_j, \quad j = \overline{1, n}.$

Пусть $\mathbf{X}$ — допустимая точка, $\nabla_j = \dfrac{\partial f(\mathbf{X})}{\partial x_j}$. Рассмотрим процедуру Зойтендейка для построения возможного направления спуска.

а) Показать, что оптимальное решение задачи поиска направления, использующей условие нормировки $s^T s \leqslant 1$, определяется следующим образом:

$$s_j = \begin{cases} -\dfrac{\nabla_j}{\sum\limits_{j \in I} \nabla_j^2}, & \text{если } j \in I; \\ 0, & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $I = \{j : x_j > a_j \text{ и } \nabla_j \geqslant 0 \text{ или } x_j < b_j \text{ и } \nabla_j < 0\}$.

б) Показать, что оптимальное решение задачи поиска направления, использующей условие нормировки $|s_j| \leqslant 1$, определяется следующим образом:

$$s_j = \begin{cases} -1, \text{ если } x_j > a_j \text{ и } \nabla_j \geqslant 0; \\ 1, \text{ если } x_j < b_j \text{ и } \nabla_j < 0; \\ 0 \text{ во всех остальных случаях.} \end{cases}$$

Используя методы, описанные в пп. а) и б), решить следующие задачи при начальной точке (—3; —4) и сравнить полученные траектории:

1) минимизировать $2x_1^2 - x_1 x_2 + 3x_2^2 - 3x_1 - 2x_2$

при условиях

$$-3 \leqslant x_1 \leqslant 3,$$
$$-4 \leqslant x_2 \leqslant 1;$$

2) минимизировать $x_1^2 - x_1 x_2 + 2x_2^2$

при условиях

$$-5 \leqslant x_1 \leqslant 3,$$
$$-1 \leqslant x_2 \leqslant 1.$$

3.93. Решить модифицированным методом возможных направлений:

минимизировать $(1 - x_1)^2 - 10(x_2 - x_1^2)^2 + x_1^2 - 2x_1 x_2 + e^{-x_1 - x_2}$

при условиях

$$x_1^2 + x_2^2 \leqslant 16;$$
$$(x_2 - x_1)^2 + x_1 \leqslant 6;$$
$$x_1 + x_2 \geqslant 2.$$

3.94. Рассмотрим задачи НП вида: минимизировать $f(\mathbf{X})$ при условиях $\mathbf{AX} \leqslant \mathbf{b}$. Пусть $\mathbf{P} = \mathbf{I} - \mathbf{A}_1^T(\mathbf{A}_1\mathbf{A}_1^T)^{-1}$, где $\mathbf{A}_1$ — составлена из градиентов функций активных ограничений в заданной допустимой точке $\hat{\mathbf{X}}$. Каковы смысл и геометрическая интерпретация следующих утверждений: а) $\mathbf{P}\nabla\mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}) = 0$; б) $\mathbf{P}\nabla\mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}) = \nabla\mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}})$; в) $\mathbf{P}\nabla\mathbf{f}(\hat{\mathbf{X}}) \neq 0$?

3.95. Решить следующую задачу методом проекции градиента:

минимизировать $(1 - x_1)^2 - 10(x_2 - x_1) + x_2^2 - 2x_1x_2 + e^{-x_1-x_2}$

при условиях

$$2x_1 + 5x_2 \leqslant 25;$$
$$-x_1 + 2x_2 \leqslant 8;$$
$$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$$

3.96. Используя в качестве начальной точки $X_0 = [0;\ 0]^T$, решите методом Зойтендейка и проекции градиента следующую задачу:

минимизировать $x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 12x_1 - 18x_2$

при условиях

$$-3x_1 + 6x_2 \leqslant 9;$$
$$-2x_1 + x_2 \leqslant 1;$$
$$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$$

3.97. Используйте метод проекции градиента для решения следующей задачи:

минимизировать $x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 2x_2x_3 + 4x_1 + 6x_2 + 12x_3$

при условиях

$$x_1 + x_2 + x_3 \leqslant 6;$$
$$-x_1 - x_2 + 2x_3 \geqslant 2;$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

3.98. Решить следующую задачу методом возможных направлений и проекции градиента, выбив в качестве начальной точки:

минимизировать $x_1^2 + 2x_2^2 + 3x_3 + x_1x_2 - 2x_1x_3 + x_2x_3 - 4x_1 - 6x_2$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 + x_3 \leqslant 4;$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

3.99. Решить следующую задачу методом проекции градиента:

минимизировать $x_1^2 + x_1x_2 + 2x_2^2 - 6x_1 - 2x_2 - 12x_3$

при условиях

$$x_1 + x_2 + x_3 = 2;$$
$$-x_1 + 2x_2 \leqslant 3;$$
$$x_1,\ x_2,\ x_3 \geqslant 0.$$

3.100. Решить методом проекции градиента и методом возможных направлений следующую задачу:

$$\text{минимизировать } e^{-x_1} + x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_1 - 6x_2$$

при условиях

$$2x_1 + x_2 \leqslant 8;$$
$$-x_1 + x_2 \leqslant 2;$$
$$x_1 \geqslant 1, \quad x_2 \leqslant 3.$$

3.101. Рассмотрим следующую задачу квадратичного программирования:

$$\text{минимизировать } \mathbf{C}^T\mathbf{X} + {}^1/_2\mathbf{X}^T\mathbf{H}\mathbf{X}$$

при условиях

$$\mathbf{A}\mathbf{X} = \mathbf{b};$$
$$\mathbf{X} \geqslant 0.$$

Ограничение $\mathbf{h}(X) = \mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{b} = 0$ связано со штрафной функцией вида $\mu\mathbf{h}(\mathbf{X})^T\mathbf{h}(\mathbf{X})$, приводящей к следующей задаче:

$$\text{минимизировать } \mathbf{C}^T\mathbf{X} + {}^1/_2\mathbf{X}^T\mathbf{H}\mathbf{X} + \mu(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{b})^T(\mathbf{A}\mathbf{X} - \mathbf{b})$$

при условии

$$\mathbf{X} \geqslant 0.$$

Опишите подробно шаги метода возможных направлений для этой задачи. Продемонстрируйте метод при следующих значениях параметров задачи:

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{C} = \begin{bmatrix} -2 \\ -3 \\ 0 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{b} = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}.$$

3.102. Решить методом возможных направлений следующую задачу:

$$\text{минимизировать } x_1^3 + 2x_2^3 + x_1 - 2x_2 - x_1^2$$

при условиях

$$x_1 + 2x_2 \leqslant 6;$$
$$-x_1 + 2x_2 \leqslant 3;$$
$$x_1, \quad x_2 \geqslant 0.$$

Является ли полученное решение глобальным оптимумом, локальным оптимумом или ни тем и ни другим?

3.103. Решить методом проекции градиента следующую задачу:

$$\text{минимизировать } e^{-x_1} + x_1^2 - x_1x_2 - 3x_2^2 + 4x_1 - 6x_2$$

при условиях

$$2x_1 + x_2 \leqslant 8;$$
$$-x_1 + x_2 \leqslant 2;$$
$$x_1 \geqslant 1, \quad x_2 \leqslant 3.$$

3.104. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать } \mathbf{C}^T\mathbf{X}$$

при условиях

$$\mathbf{AX} = \mathbf{b}; \quad \mathbf{X} \geqslant 0,$$

где $\mathbf{A}$ — матрица порядка $m \times n$ и ранга m. Рассмотрим решение задачи методом проекции градиента.

а) Пусть $\mathbf{X}$ — ДБР, а $\mathbf{s} = -\mathbf{PC}$, где матрица $\mathbf{P}$ проектирует любой вектор на ядро оператора, составленного из градиентов функций активных ограничений. Показать, что $\mathbf{s} = 0$.

б) Пусть $\mathbf{u} = -(\mathbf{MM}^T)^{-1}\mathbf{MC}$, где строки матрицы $\mathbf{M}$ — транспонированные векторы-градиенты функций активных ограничений. Покажите, что вычеркивание строки, соответствующей наибольшему отрицательному u_j, связанному с ограничением $x_j \geqslant 0$, формирование новой матрицы проектирования $\mathbf{P}_1$ и сдвиг вдоль направления $-\mathbf{P}_1\mathbf{C}$ эквивалентны вводу в базис переменной x_j в симплекс-методе.

в) Используя результаты пп. а) и б), покажите, что метод проекции градиента сводится к симплекс-методу, если целевая функция линейна.

3.8. МЕТОДЫ ШТРАФНЫХ ФУНКЦИЙ

Все методы этой группы, несмотря на различные варианты и схемы, имеют одну общую особенность: в этих методах производится переход от задачи условной оптимизации к эквивалентной задаче (или последовательности задач) безусловной оптимизации. Методы штрафных функций можно разделить на два класса: параметрические и непараметрические.

Параметрические методы характеризуются наличием одного или нескольких надлежащим образом выбранных параметров, входящих в структуру штрафной функции в качестве весовых коэффициентов.

К параметрическим методам относятся: метод барьерных поверхностей, метод последовательной безусловной оптимизации — МПБМ, предложенный Фиакко и Маккормиком, метод Зангвилла и др.

В непараметрических методах целевая функция рассматривается как функция, задающая дополнительное искусственное ограничение, постепенно уплотняемое по мере получения информации о ходе решения задачи.

Параметрические методы делятся на:

1) методы внутренней точки; 2) методы внешней точки; 3) комбинированные методы.

При использовании методов внутренней точки текущая точка постоянно находится внутри допустимой области с помощью штрафной функции, которая в этом случае называется барьерной. Методы внешней точки, наоборот, генерируют последовательность точек, которые выходят за пределы допустимой области, но в пределе дают допустимое решение.

Наконец, в комбинированных методах, которые необходимо использовать при ограничениях — равенствах, в процессе минимизации одни из ограничений удовлетворяются, а другие — нет. Однако при достижении искомого решения все условия в пределах заданного допуска оказываются удовлетворенными.

Итак, пусть НП-задача задана в следующем виде:

$$\text{минимизировать } f(\mathbf{X}), \quad \mathbf{X} \in R^{(n)} \tag{3.8.1}$$

при m нелинейных ограничениях вида

$$h_j(\mathbf{X}) = 0, \quad j = \overline{1, m}; \tag{3.8.2}$$

и $(p - m)$ ограничениях вида

$$g_j(X) \geqslant 0, \quad j = \overline{m+1, p}. \tag{3.8.3}$$

В основу метода штрафных функций положено преобразование задачи (3.8.1) — (3.8.3) в задачу минимизации без ограничений вида

$$P(X_k, \rho_k) = f(X_k) + \sum_{i=1}^{m} \rho_{ik} H(h_i(X_k)) + \sum_{i=1}^{m} \rho_{ik} G(g_i(X_k)). \tag{3.8.4}$$

Здесь $P(X_k, \rho_k)$ штрафная функция; ρ_{ik} — весовые коэффициенты: $H(h_i(X_k))$, $G(g_i(X_k))$ — некоторые функционалы.

При выборе вида функционала $G(g_i(X_k))$ руководствуются следующими вариантами [17]:

$$1)\ G_1(g_i(X)) \to \infty \text{ при } g_i(X) \to 0^+,$$

для чего необходимо, чтобы точка, определяемая вектором X, всегда была внутренней, т. е. чтобы выполнялось условие

$$g_i(X) > 0, \quad i = \overline{m+1, p};$$

$$2)\ G_2(g_i(X)) \to 0 \text{ при } g_i(X) \to 0^-.$$

При этом выборе функционала G_2 оперируют только с внешними точками, для которых выполняется условие $g_i(X) < 0$;

$$3)\ G_3(g_i(X)) > 0 \text{ при } g_i(X) < 0$$

и

$$G_3(g_i(X)) = 0 \text{ при } g_i(X) = 0.$$

При таком выборе функционала G не заботятся о том, чтобы ограничивающие условия удовлетворялись на промежуточных этапах вычислительного процесса, хотя они, безусловно, должны выполняться в искомой точке. При выборе функционала для ограничений равенств вводится требование $H(h_i(X)) \to 0$ при $h_i(X) \to \to 0$. При этом обычно полагают $H(h_i(X)) = h_i^2(X)$. Наконец, при любом выборе функционалов $H(h_i(X)$ и $G(g_i(X))$ требуется, чтобы

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=m+1}^{p} \rho_{ik} G(g_i(X_k)) = 0; \tag{3.8.4}$$

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{m} \rho_{ik} H(h_i(X)) = 0;$$

$$\lim_{k\to\infty} |P(X_k, \rho_k) - f(X_k)| = 0. \tag{3.8.5}$$

Метод барьерных поверхностей

Этот метод (МБП) относится к группе методов внутренней точки и основан на использовании барьерной функции вида

$$P(X, r) = f(X) + r \sum_{i=1}^{m} R_i(g_i(X))\, w_i, \tag{3.8.6}$$

где $r > 0$ — параметр, значения которого убывают с каждым циклом; $R_i(t) \to \to \infty$ при $t \to 0$; w_i — положительные весовые коэффициенты. При этом барьерная функция $P(X, r)$ неограниченно возрастает при $t \to 0^+$.

Примерами функций барьера являются:

а) обратная функция

$$R_i(g_i(X)) = \frac{1}{g_i(X)}; \tag{3.8.7}$$

б) логарифмическая функция

$$R_i(g_i(X)) = -\ln(g_i(X)).$$

При приближении к границе изнутри области, как только $g_i(X) \to 0$, штраф становится очень большим. Таким образом, вдоль границ допустимой области образуются сильные барьеры. Построив барьерную функцию и определив начальную внутренюю точку, приступаем к процедуре минимизации $P(X, r)$ при заданном начальном значении r_0. Тогда конечная точка X_1 первого этапа (итерации) процедуры становится исходной точкой для минимизации P при уменьшенном значении r и т. д., завершающий этап минимизации реализуется при очень малом значении r, так что результирующая точка X с точностью до установленного допуска может оказаться либо на одной, либо сразу на нескольких поверхностях сразу, заданных ограничениями задачи.

Если через X (r) обозначить точку минимума вспомогательной функции $P(X, r)$, то при весьма слабых предположениях относительно исходной задачи последовательность $\{X(r)\}$ сходится к решению исходной задачи при $r \to 0$.

Минимизация барьерной функции может быть выполнена любым методом безусловной минимизации, которые были рассмотрены выше. Один из существенных недостатков методов барьерных функций связан с тем, что эти функции определены в допустимой области, которая должна иметь непустую внутреннюю область, т. е. множество $\{X: g_i(X) > 0, i = \overline{1, m}\}$ должно быть непустым.

Алгоритм метода барьерных поверхностей

Пусть имеется исходная задача вида:

$$\text{минимизировать } f(X)$$

при условиях $g_i(X) \geqslant 0, \; i = \overline{1, m}$.

Начальный этап. Выбрать $\varepsilon > 0$ в качестве константы остановки и начальную допустимую точку $X_0 \in R$, для которой $g_i(X_0) > 0, i = \overline{1, m}$, скаляр r_0, $0 < \beta < 1$. Положить $k = 1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап. Шаг 1. При начальной точке X_k решить следующую задачу безусловной оптимизации:

$$\text{минимизировать } P(X, r) = f(X) + r_k \sum_{i=1}^{m} R_i(g_i(X))\, w_i,$$

где $R(g_i(X_k))$ описывается одним из выражений (3.8.7).

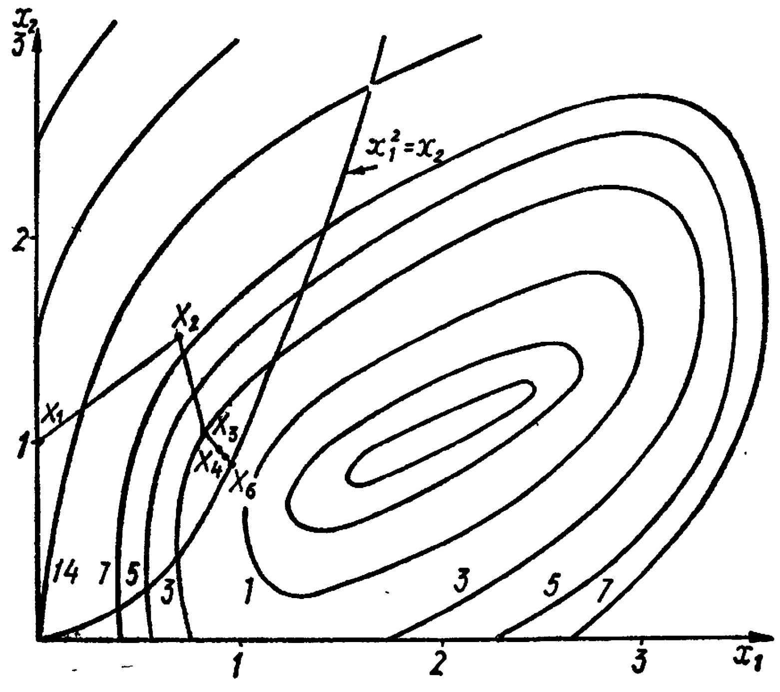

Рис. 3.14

Положить X_{k+1}, равным оптимальному решению, и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Если $r_k \sum_{i=1}^{m} R(g_i(X_k)) \cdot w_i < \varepsilon$, то остановиться. В противном случае положить $r_{k+1} = \beta r_k$, заменить k на $k+1$ и перейти к шагу 1.

Пример 3.17. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать} \quad (x_1-2)^4 + (x_1-2x_2)^2$$

при условии

$$-x_1^2 + x_2 \geqslant 0.$$

Решим ее, используя МБП с барьерной функцией $R(g(X)) = \dfrac{1}{x_2 - x_1^2}$. В табл. 3.21 приведены результаты вычислений, а

Таблица 3.21

k	r_k	X_{k+1}	$f(X_{k+1})$	$R(X_{k+1})$	$P(r_k)$	$r_k R(X_{k+1})$
1	10.0	0.708; 1.532	8.334	0.970	18.039	9.705
2	1	0.828; 1.110	3.821	2.359	6.180	2.359
3	0.1	0.899; 0.964	2.528	6.419	3.170	0.642
4	0.01	0.924; 0.916	2.129	19.078	2.320	0.191
5	0.001	0.940; 0.901	2.004	59.046	2.063	0.059
6	0.0001	0.9439; 0.8964	1.9645	184.445	1.983	0.0184

на рис. 3.14 показан процесс минимизации. Вычисления начаты при $r_1 = 10$, а безусловная оптимизация функции $P(X, r)$ начиналась из точки $X_1 = [0;\ 1]$. В качестве значения параметра выбрано $\beta = 0.1$. После 6 итераций получена точка $X_7 = [0.944,\ 0.896]^T$, где $r_6 R(g(X_7)) = 0.0184$, и алгоритм остановлен. Можно проверить, что эта точка достаточно близка к оптимальной. Учитывая, что r_k убывают, из табл. 3.21 нетрудно заметить, что $f(X_k)$ и $P(r_k)$ — неубывающие функции от r_k, а $R(g(X_k))$ — невозрастающая функция от r_k. Кроме того, $r_k R(X_k)$ сходится к нулю.

Использование барьерных функций для решения задач НП связано с некоторыми вычислительными трудностями. Прежде всего поиск должен начинаться из допустимой точки X, для которой $g_i(X) > 0$, $i = \overline{1, m}$. Для некоторых задач нахождение такой точки может быть непростым делом. Кроме того, вблизи границы области $\{X : g_i(X) \geqslant 0\}$ в силу того, что поиск использует дискретные шаги, возможен шаг, выводящий за пределы допустимой области, который приводит к уменьшению значения $P(X, r_k)$, т. е. приводит к ложному успеху. Таким образом, требуется явная проверка допустимости каждой очередной точки (для чего требуется вычислять значения функций $g_i(X_k)$, $k = 1, 2, \ldots$).

На эффективность МБП существенно влияют выбор начального значения r_0 и метод сокращения значений r в процессе минизации, а также выбор весовых коэффициентов w_i. Если в функции $P(X, r)$ значение r_0 выбирается слишком малым, то на начальной стадии процесса мы придем к минимуму функции $f(X)$, который вряд ли окажется вблизи условного минимума в точке X^*. С другой стороны, если значение r_0 выбирается слишком большим, то на первых итерациях вычислительного процесса текущая точка неизбежно окажется слишком далеко за пределами допустимых границ и поиск из-за необходимости возврата в пределы допустимой области может затянуться.

Метод штрафных функций

Ранее рассмотренные методы барьерных поверхностей относятся к группе методов внутренней точки (т. е. они начинают работать с допустимой точки X_0 и генерируют последовательность оптимальных допустимых решений X_1, X_2, ..., X_k). В отличие от них методы внешней точки начинают работать с недопустимой точки и генерируют последовательность недопустимых решений, которая приближается к оптимальному решению извне допустимой области.

Пусть, как и выше, имеется задача НП:

$$\text{минимизировать } f(X) \tag{3.8.8}$$

при условиях

$$g(X) \geqslant 0, \quad i = \overline{1, m}; \tag{3.8.9}$$

$$h_i(X) = 0, \quad i = \overline{1, l}. \tag{3.8.10}$$

Метод штрафных функций основан на преобразовании исходной задачи с ограничениями в одну или последовательность задач безусловной оптимизации. С помощью функций, задающих ограничения, строится так называемая штрафная функция, которая добавляется к целевой функции исходной задачи так, чтобы нарушение какого-либо из ограничений исходной задачи становилось невыгодным (с точки зрения получаемой задачи безусловной оптимизации). В частности, для ограничений типа (3.8.9) и (3.8.10) целесообразна штрафная функция следующего вида:

$$\alpha(X) = \sum_{i=1}^{m} R_1[g_i(X)] + \sum_{i=1}^{l} R_2[h_i(X)], \tag{3.8.11}$$

где R_1 и R_2 — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям: а) $R_1(y) = 0$, если $y \geqslant 0$, и $R_1(y) > 0$, если $y < 0$; б) $R_2(y) = 0$, если $y = 0$, и $R_2(y) > 0$, если $y \neq 0$. Типичными являются следующие формы функций R_1 и R_2: $R_1(y) = [\max\{0; -y\}]^p$; $R_2(y) = |y|^p$, где p — целое положительное. Таким образом, штрафная функция α (X) обычно имеет вид

$$\alpha(X) = \sum_{i=1}^{m} [\max\{0; -g_i(X)\}]^p + \sum_{i=1}^{l} |h_i(X)|^p. \tag{3.8.12}$$

И далее от задачи НП (3.8.8) — (3.8.10) переходим к задаче безусловной оптимизации вспомогательной функции:

$$\text{минимизировать } f(X) + r\alpha(X), \tag{3.8.13}$$

где $r > 0$ — коэффициент штрафа.

Пусть α — непрерывная функция вида (3.8.12). Обозначим

$$\theta(r) = \inf_{X} \{f(X) + r\alpha(X)\}. \tag{3.8.14}$$

Подход, связанный со штрафной функцией, состоит в решении следующей задачи:

$$\text{максимизировать } \theta(r) \tag{3.8.15}$$

при условии

$$r \geqslant 0.$$

Справедлива следующая теорема 3.6. [1]. *Пусть задана задача НП в виде* (3.8.8) — (3.8.10), *где* $f, g_1, g_2, \ldots, g_m$ — *непрерывные на* $R^{(n)}$ *функции.*

Предположим, что задача имеет допустимые решения и пусть α (X) — *непрерывная штрафная функция вида* (3.8.11). *Предположим также, что для каждого* r *существует решение задачи* X_r *минимизации вспомогательной функции* $f(X) + r\alpha(X)$ и все X_r *принадлежат некоторому компактному подмножеству множества* $\mathfrak{X}$. *Тогда справедливо следующее равенство*:

$$\inf\{f(X) : g(X) \geqslant 0,\ h(X) = 0,\ X \in \mathfrak{X}\} = \sup \theta(r) = \lim \theta(r), \tag{3.8.16}$$

где $\theta(r)$ определяется согласно (3.8.14).

Более того, предел X^* любой сходящей подпоследовательности последовательности $\{X_r\}$ является оптимальным решением исходной задачи и $r\alpha(X) \to 0$ при $r \to \infty$. Доказательство теоремы приводится в [1].

Данная теорема служит обоснованием метода штрафных функций и из нее следует, что оптимальное значение X_r задачи минимизации $f(X) + r\alpha(X)$ при условии $X \in \mathscr{X}$ может быть сделано сколь угодно близким к допустимой области при выборе r достаточно большим. Кроме того, выбирая r достаточно большим, значение $f(X_r) + r\alpha(X)$ может быть сделано сколь угодно близким к оптимальному значению целевой функции исходной задачи $f(X)$.

Алгоритм метода штрафных функций

В связи с трудностями, связанными с использованием большого параметра штрафа r, в большинстве алгоритмов штрафных функций применяют последовательность возрастающих параметров для каждого нового значения параметра штрафа. Используется алгоритм оптимизации, начинающийся из оптимального решения, соответствующего предыдущему значению параметра r.

Пусть имеется задача минимизации $f(X)$ при условиях $g_i(X) \geqslant 0$, $h_i(X) = 0$, где функции f_i, $g_i(X)$ и $h_i(X)$ непрерывны.

Начальный этап. Выбрать $\varepsilon > 0$. Выбрать начальную точку X_1, параметр штрафа r_1 и число $\beta > 1$. Положить $k = 1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап. Шаг 1. При начальной точке X_k решить следующую задачу:

$$\text{минимизировать } f(X) + r_k\alpha(X) =$$

$$= f(X) + r_k\left[\sum_{i=1}^{m} (\max\{0, -g_i(X)\})^p + \sum_{i=1}^{l} |h_i(X)|^p\right], \qquad (3.8.17)$$

где $p > 0$ и p — целое.

Положить X_{k+1}, равным оптимальному решению этой задачи, и перейти к шагу 2.

Шаг 2. Если $r_k\alpha(X_{k+1}) < \varepsilon$, то остановиться; в противном случае положить $r_{k+1} = \beta r_k$. Заменить k на $k+1$ и перейти к шагу 1.

Пример 3.18. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать } (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2$$

при условиях

$$x_1^2 - x_2 = 0.$$

В качестве функции штрафа $\alpha(X)$ выберем $(x_1^2 - x_2)^2$. Тогда на k-й итерации при заданном значении параметра штрафа r_k должна решаться задача:

$$\text{минимизировать } (x_1 - 2)^4 + (x_1 - 2x_2)^2 + r_k(x_1^2 - x_2)^2$$

при условии

$$x_1, x_2 \in (-\infty, \infty).$$

В табл. 3.22 приведены результаты вычислений по методу штрафных функций. В качестве начальной взята точка $X = [2.0; 1.0]^T$, в которой значение целевой функции равно 0. В качестве начального значения штрафа принято $r_1 = 0.1$, а число $\beta = 10.0$. Заметим, что $f(X_{r_k})$ и $\theta(r_k)$ — неубывающие функции, а $\alpha(X_{r_k})$ — невозрастающая. Процесс прекращен после четырех итераций, где $\alpha(X_{r_k}) = 0.000267$. Но чтобы убедиться, что в соответствии с теоремой 3.6 последовательно $r_k\alpha(X_k)$ сходится к нулю, была

Таблица 3.22

k	r_k	$X_{k+1}=X_{r_k}$	$f(X_{k+1})$	$\alpha(X_{r_k})$	$\theta(r_k)$	$r_k\alpha(X_{k+1})$
1	0.1	[1.4539; 0.7608]	0.0935	7.8307	0.2766	0.1831
2	1.0	[1.1687; 0.7407]	0.5753	0.3908	0.9661	0.3908
3	10	[0.9906; 0.8425]	1.5203	0.01926	1.7129	0.1926
4	100	[0.9507; 0.8875]	1.8917	0.000267	1.9184	0.0267
5	1000	[0.9461; 0.8934]	1.9405	0.0000028	1.9433	0.0028

выполнена еще одна итерация и найдено $\mathbf{X}_6$. Можно убедиться, что в точке $\mathbf{X}_6=[0.9461;\ 0.8934]^T$ выполняются условия Куна — Таккера.

Задачи и упражнения

3.105. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать}\ (x_1^2+x_2^2)$$

при условиях

$$-2x_1-x_2+2\geqslant 0;$$
$$x_2-1\geqslant 0.$$

а) Найти оптимальное решение этой задачи $\mathbf{X}_{\mathrm{opt}}$, используя теорему Куна — Таккера.

б) Построить вспомогательную функцию с начальным значением штрафного параметра $r=1$.

в) При начальной точке $\mathbf{X}_0=[1;\ 6]^T$ решить полученную задачу прямым методом (например, Хука — Дживса).

г) Заменить значение r_k на $r_k=10$. Начиная из точки, полученной в п. в), продолжить решение полученной задачи и сравнить его с полученным в п. а).

3.106. При заданном множестве ограничений $g_i(\mathbf{X})\geqslant 0$, $i=\overline{1,m}$ может быть использована любая из следующих штрафных функций:

$$\alpha_1(\mathbf{X})=r\sum_{i=1}^{m}\max\{0;\ -g_i(\mathbf{X})\};$$

$$\alpha_2(\mathbf{X})=r\sum_{i=1}^{m}[\min\{0;\ g_i(\mathbf{X})\}]^2;$$

$$\alpha_3(\mathbf{X})=r\max\{0;\ -g_1(\mathbf{X}),\ \ldots,\ -g_m(\mathbf{X})\};$$

$$\alpha_4(\mathbf{X})=r[\min\{0,\ g_1(\mathbf{X}),\ g_2(\mathbf{X}),\ \ldots,\ g_m(\mathbf{X})\}]^2.$$

Сравните эти формы. Какие преимущества и недостатки у каждой из них?

3.107. Рассмотреть следующую задачу:

$$\text{минимизировать}\ x_1^3+x_2^3$$

при условии

$$x_1 + x_2 - 1 = 0.$$

а) Найти оптимальное решение задачи (методом множителей Лагранжа).

б) Рассмотреть следующую вспомогательную со штрафной функцией:

$$\text{минимизировать} \quad (x_1^3 + x_2^3) + r(x_1 + x_2 - 1)^2.$$

Проверьте, что для каждого $r > 0$ оптимальное решение неограниченно.

в) Убедитесь, что на оптимальных решениях в пп. а) и б) значения целевой функции неограничены, так что утверждения теоремы 3.6 несправедливы. Объясните этот факт.

г) Добавим к исходной задаче ограничения $|x_1| \leqslant 1$, $|x_2| \leqslant 1$ и пусть $\mathbf{X} = \{(x_1, x_2) : |x_1| \leqslant 1, \text{ и } |x_2| \leqslant 1\}$. Вспомогательная задача принимает вид:

$$\text{минимизировать} \quad x_1^3 + x_2^3 + r(x_1 + x_2 - 1)^2$$

при условиях

$$|x_1| \leqslant 1, \quad |x_2| \leqslant 1.$$

Найти оптимальное решение при заданном $r > 0$ и определить предел последовательности точек оптимума при $r \to \infty$.

3.108. Пусть исходная задача НП имеет вид:

$$\text{минимизировать} \quad f(\mathbf{X}) \tag{1}$$

при условиях

$$\mathbf{g}(\mathbf{X}) \geqslant 0; \tag{2}$$

$$\mathbf{h}(\mathbf{X}) = 0; \tag{3}$$

$$\mathbf{X} \in \mathscr{X},$$

где $\mathbf{g}$ — вектор-функция с компонентами $g_1, g_2, \ldots, g_m$; $\mathbf{h}$ — вектор-функция с компонентами $h_1, h_2, \ldots, h_e$; x — вектор-столбец размерности $(n \times 1)$; $*$ — некоторое непустое множество из $R^{(n)}$, определяемое простыми ограничениями, например, $x_j \geqslant 0$. Функции f, $g_1, \ldots, g_m$, $h_1, h_2, \ldots, h_e$ — непрерывны. Пусть $\alpha(\mathbf{X})$ непрерывная функция (называемая штрафной) вида

$$\alpha(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} R_1(g_i(\mathbf{X})) + \sum_{i=1}^{l} R_2(h_i(\mathbf{X})), \tag{4}$$

где R_1 и R_2 — непрерывные функции, удовлетворяющие условиям:

$$R_1(y) = 0, \text{ если } y \geqslant 0; \quad R_1(y) > 0, \text{ если } y < 0;$$

$$R_2(y) = 0, \text{ если } y = 0; \quad R_2(y) > 0, \text{ если } y \neq 0.$$

Типичными являются следующие формы функций R_1 и R_2:

$$R_1(y) = [\max\{0; -y\}]^p; \quad R_2(y) = |y|^p, \quad p > 0.$$

Таким образом, штрафная функция $\alpha(\mathbf{X})$ обычно имеет вид

$$\alpha(\mathbf{X}) = \sum_{i=1}^{m} [\max\{0;\ -g_i(\mathbf{X})\}]^2 + \sum_{i=1}^{l} h_i^2(\mathbf{X}). \tag{5}$$

Обозначим через $\theta(r)$

$$\inf\{f(\mathbf{X}) + r\alpha(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in \mathfrak{X}\}. \tag{6}$$

Рассмотрим задачу:

$$\text{максимизировать } \theta(r) \tag{7}$$

при условии

$$r \geqslant 0. \tag{8}$$

Предположим, что для любого r существует $\mathbf{X}_r \in \mathfrak{X}$ такой, что

$$\theta(r) = f(\mathbf{X}_r) + r\alpha(\mathbf{X}_r).$$

Докажите справедливость следующих утверждений:

1.

$$\inf\{f(\mathbf{X}) : g(\mathbf{X}) \leqslant 0;\ h(\mathbf{X}) = 0,\ \mathbf{X} \in \mathfrak{X}\} \geqslant \sup_{r \geqslant 0} \theta(r), \tag{9}$$

где

$$\theta(r) = \inf\{f(\mathbf{X}) + r\alpha(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in \mathfrak{X}\}. \tag{10}$$

2. $f(\mathbf{X}_r)$ — неубывающая функция от r при $r > 0$; $\theta(r)$ — неубывающая функция, $\alpha(\mathbf{X}_r)$ — невозрастающая функция r.

3.109. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать } f(\mathbf{X}) \tag{1}$$

при условиях

$$g_i(\mathbf{X}) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m}; \tag{2}$$

$$h_i(\mathbf{X}) = 0, \quad i = \overline{1, l}. \tag{3}$$

Рассмотрим связанную с ней задачу со штрафной функцией:

$$\text{минимизировать } \theta(r) = f(\mathbf{X}) + r\alpha(\mathbf{X}) \tag{4}$$

$$\text{при условии } \mathbf{X} \in \mathfrak{X},\ r > 0,$$

где $\alpha(\mathbf{X})$ задается условием (4) из предыдущей задачи 3.107.

Тогда

$$\inf\{f(\mathbf{X}) : g(\mathbf{X}) \leqslant 0,\ h(\mathbf{X}) = 0,\ \mathbf{X} \in \mathfrak{X}\} = \sup_{r \geqslant 0} \theta(r) = \lim_{r \to \infty} \theta(r), \tag{5}$$

где $\theta(r)$ задается условием (4).

Доказать справедливость утверждения (5).

3.110. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать } e^{x_1} + x_1^2 + 2x_1x_2 + 4x_2^2$$

при условии

$$x_1 + 2x_2 - 6 = 0.$$

Построить штрафную функцию при $r = 10$. Выполнить, начиная из точки $X = [1; 1]^T$, две итерации метода сопряженных градиентов.

3.111. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать} \quad (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2$$

при условии

$$(x_1^2 - y_2) \leqslant 0.$$

Используя вспомогательную функцию $(x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2 + r \max\{x_1^2 - x_2, 0\}$ и метод циклического покоординатного спуска, решить задачу при начальной точке $\mathbf{X}_1 = [0; -4]^T$ и следующих способах изменения r:

а) начиная из точки $\mathbf{X}_1$, решить задачу со штрафом при $r_1 = 0.1$ и получить $\mathbf{X}_2$. Затем, начиная с $\mathbf{X}_2$, решить задачу при $r_2 = 10$;

б) решить вспомогательную задачу при $r_2 = 100$, начиная с точки безусловного оптимума $[6; 8]^T$.

3.112. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать} \quad 4x_1^2 - 5x_1x_2 + x_2^2$$

при условиях

$$x_1^2 - x_2 + 2 \leqslant 0;$$
$$x_1 + x_2 - 6 \leqslant 0.$$

Решить эту задачу методом штрафных функций при начальной точке $[0; 0]^T$ для каждого из следующих видов множества $\mathfrak{X}$: а) $\mathfrak{X} = E_n$; б) $\mathfrak{X} = \{\mathbf{X} : x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}$; в) $\mathfrak{X} = \{(x_1, x_2) : x_1 + x_2 - 6 \leqslant 0,\ x_1 \geqslant 0,\ x_2 \geqslant 0\}$.

3.113. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать} \quad (x_1 - 5)^2 + (x_2 - 3)^2$$

при условиях

$$x_1 + x_2 \leqslant 3;$$
$$-x_1 + 2x_2 \leqslant 4.$$

1. Построить соответствующую барьерную функцию $P(\mathbf{X}, r_0)$, с начальным значением параметра $r_0 = 1$. Используйте алгоритм безусловной оптимизации при начальной точке $X_0 = [0; 0]^T$ для решения барьерной задачи.

2. Найти оптимальное решение задачи, используя метод барьерных поверхностей.

3.114. Рассмотрим следующую задачу:

$$\text{минимизировать} \quad (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2$$

при условии

$$-x_1^2 + x_2 \geqslant 0.$$

Используя вспомогательную барьерную функцию $(x_1 - 6)^2 + (x^2 - 8)^2 + \dfrac{r}{x^2 - x_1^2}$ и метод циклического покоординатного спуска, решить эту задачу при начальной точке $X_1 = [0; 12]^T$ и следующих стратегиях изменения r:

а) решить барьерную задачу, начиная из точки X_1, при $r_1 = 10$, и получить X_2. Затем, начиная из X_2, решить задачу при $r_2 = 0{,}01$;

б) решить барьерную задачу, начиная из точки $[0; 12]^T$ при $r_1 = 0.01$;

в) применить алгоритм МБП, описанный выше, используя последовательно убывающие значения: $r = 10$, 1, 0.1 и 0.01.

3.115. Барьерные функции можно использовать и в случае ограничений-равенств. Для этого следует заменить ограничения-равенства $h_i(\mathbf{X}) = 0$ одним из следующих ограничений, где $\varepsilon > 0$ — малое число:

а) $h_i^2(\mathbf{X}) \leqslant \varepsilon$; б) $|h_i(\mathbf{X})| \leqslant \varepsilon$; в) $h_i(\mathbf{X}) \leqslant \varepsilon$ и $-h_i(\mathbf{X}) \leqslant \varepsilon$.

Исследовать каждый из этих подходов, для чего решить следующую задачу при $\varepsilon = 0.05$:

$$\text{минимизировать } (x_1^2 + x_2^2)$$

при условии

$$(x_1 + x_2) = 2.$$

3.116. Рассмотрим задачу минимизации $f(X)$ при условии $g_i(\mathbf{X}) \geqslant 0$, $i = \overline{1, m}$, $h_i(\mathbf{X}) = 0$, $i = \overline{1, l}$, $\mathbf{X} \in \mathfrak{X}$. Тогда смешанная вспомогательная функция задается в виде

$$f(\mathbf{X}) + rP(\mathbf{X}) + \frac{1}{r}\alpha(\mathbf{X}),$$

где $P(\mathbf{X}) = P(g(\mathbf{X}))$ — барьерная функция для ограничений-неравенств (например, вида 3.87), $\alpha(\mathbf{X})$ — штрафная функция для ограничений-равенств. Справедливы следующие утверждения:

1) $\inf\{f(\mathbf{X}) : g(\mathbf{X}) \geqslant 0,\ h(\mathbf{X}) = 0,\ \mathbf{X} \in \mathfrak{X}\} = \lim\limits_{r \to 0} \theta(r)$.

2) $rP(\mathbf{X}_r) \to 0$ и $\frac{1}{r}\alpha(\mathbf{X}_r) \to 0$ при $r \to 0^+$,

где $\theta(r) = \inf\left\{f(\mathbf{X}) + rP(\mathbf{X}) + \frac{1}{r}\alpha(\mathbf{X}) : \mathbf{X} \in \mathfrak{X},\ g(\mathbf{X}) > 0\right\} = f(\mathbf{X}_r) + rP(\mathbf{X}_r) + \frac{1}{r}\alpha(\mathbf{X}_r)$.

а) Доказать эти утверждения при соответствующих предположениях.

б) Описать алгоритм для решения задачи НП, использующей смешанную вспомогательную функцию, и применить его для решения следующей задачи:

$$\text{минимизировать } e^{x_1} - x_1x_2 + x_2^2$$

при условиях

$$x_1^2 + x_2^2 = 4;$$

$$2x_1 + x_2 \leqslant 2.$$

3.117. Исследуйте возможность использования двух параметров r_1 и r_2 так, чтобы вспомогательная функция получилась бы в виде $f(\mathbf{X}) + r_1 P(\mathbf{X}) + \frac{1}{r_2}\alpha(\mathbf{X})$.

С помощью такого подхода решите следующую задачу при $\mathbf{X}_0 = [0; 0]^T$ и начальных значениях параметров: $r_1 = 1.0$; $r_2 = 2.0$:

$$\text{максимизировать } (-x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 - e^{-(x_1+x_2)})$$

при условии

$$x_1 + x_2 - 4 = 0.$$

3.118. Сравните методы штрафных и барьерных функций. Каковы их достоинства и недостатки?

3.119. Рассмотрим задачу:

$$\text{минимизировать } (e^{x_1} - x_1x_2 + x_2^2)$$

при условиях

$$2x_1 + x_2 \leqslant 4;$$
$$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$$

1) Решить ее методом барьерных поверхностей, используя в качестве начальной точки $\mathbf{X}_0 = [1; 1]^T$ и приняв $r_0 = 1$; $\beta = 0.1$.

2) Решить эту же задачу методом штрафных функций, начиная с точки $\mathbf{X}_0 = [2, 4]^T$, приняв $r_0 = 1$; $\beta = 10$. Построить траектории движения для обоих методов и сравнить их.

3.120. Рассмотрим так называемый метод барьеров без параметра для решения задачи минимизации $f(\mathbf{X})$ при условиях $g_i(\mathbf{X}) \leqslant 0$, $i = \overline{1, m}$.

а) **Начальный этап.** Выбрать $\mathbf{X}_1$ так, чтобы $g_i(\mathbf{X}_1) > 0$, $i = \overline{1, m}$. Положить $k = 1$ и перейти к основному этапу.

Основной этап. Положить $\mathbf{X}_k = \{\mathbf{X} : f(\mathbf{X}) - f(\mathbf{X}_k) < 0,\ g_i(\mathbf{X}) > 0\}$. Положить $\mathbf{X}_{k+1}$, равным оптимальному решению следующей задачи:

$$\text{минимизировать } \frac{1}{f(\mathbf{X}_k) - f(\mathbf{X})} + \sum_{i=1}^{m} \frac{1}{g_i(\mathbf{X})}$$

при условии

$$\mathbf{X} \in \mathbf{X}_k.$$

Заменить k на $k + 1$ и повторить основной этап.

1) Решить с помощью этого алгоритма следующую задачу при начальной точке $\mathbf{X}_1 = [0; 2]^T$:

$$\text{минимизировать } (x_1 - 6)^2 + (x_2 - 8)^2$$

при условии

$$x_1^2 - x_2 \leqslant 0.$$

2) Сравнить полученную здесь траекторию с траекторией, построенной в задаче 3.112.

3) Сформулировать предположения, при которых метод сходится к оптимальному решению, и доказать сходимость.

3.121. Рассмотреть НП-задачу:

$$\text{минимизировать } x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + 2x_1 + 6x_2$$

при условиях

$$x_1 + x_2 \geqslant 3;$$
$$x_1,\ x_2 \geqslant 0.$$

1) Решить ее методом штрафных функций, используя в качестве начальной точку $\mathbf{X}_0 = [0;\ 0]^T$ и $r = 1$, приняв $\beta = 10$.

2) Решить методом барьеров, выбрав в качестве начальной точку $\mathbf{X}_1 = [2;\ 2]^T$; $\beta = 0.1$, и сравнить полученные результаты. Построить траекторию движения по обоим методам.

3.122. Решить следующую НП-задачу:

$$\text{минимизировать } x_1 + x_2 - 2x_3$$

при условиях

$$x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 9;$$
$$x_1 - 2x_2^2 + x_3 = 2.$$

1) Применить метод ПБМ, предложенный Фиакко — Маккормиком.

2) Заменив каждое из ограничений-равенств $h_i(\mathbf{X}) = 0$ на систему неравенств: $h_i(\mathbf{X}) \leqslant \varepsilon$; $h_i(\mathbf{X}) \geqslant -\varepsilon$; $\varepsilon > 0$, решить данную задачу методом штрафных функций, используя в качестве начальной точку $\mathbf{X}_0 = [1;\ 1]^T$.

Глава 4

ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

4.1. ОБЩАЯ СХЕМА МЕТОДА

Динамическое программирование — это вычислительный метод для решения задач определенной структуры, а именно задач, в которых целевая функция является аддитивной или мультипликативной [7, 17].

Напомним, что функция n переменных $f(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ называется *аддитивной*, если $f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} f_i(x_i)$, и *мультипликативной*, если $f(x_1, x_2, \ldots x_n) = \prod_{i=1}^{n} f_i(x_i)$.

Основные идеи метода динамического программирования рассмотрим на следующем примере.

Пусть требуется найти

$$\max_{\{x_j\}} \Sigma f_j(x_j) \qquad (4.1.1)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqslant b; \qquad (4.1.2)$$

$$x_j \geqslant 0, \quad x_j \text{ — целое}, \quad j = \overline{1, n}.$$

Поскольку переменные $\{x_j\}$ $j=\overline{1, n}$ независимы, то

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) = \max_{x_n} \left\{ f_n(x_n) + \max_{x_1,\ldots,x_{n-1}} \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j) \right\}. \qquad (4.1.3)$$

Зафиксируем переменную x_n и

$$\text{найдем} \max_{x_1,\ldots,x_{n-1}} \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) \qquad (4.1.4)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{n-1} a_j x_j \leqslant b - a_n x_n. \qquad (4.1.5)$$

Обозначим

$$\max_{x_1,\ldots,x_n} \sum_{j=1}^{n-1} f_j(x_j)$$

при условии (4.1.5) через $\Lambda_{n-1}(b - a_n x_n)$ и получим

$$\max \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j) = \max_{x_n} \{f_n(x_n) + \Lambda_{n-1}(b - a_n x_n)\}. \qquad (4.1.6)$$

Обозначим

$$\max_{x_1,\ldots,x_k} \sum_{j=1}^{k} f_j(x_j)$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j \leqslant \xi \qquad (4.1.7)$$

через $\Lambda_k(\xi)$.

Тогда после несложных преобразований приходим к следующему основному рекуррентному соотношению динамического программирования (ОРС)

$$\Lambda_k(\xi) = \max_{x_k} \{f_k(x_k) + \Lambda_{k-1}(\xi - a_k x_k)\}, \quad k = \overline{1, n} \qquad (4.1.8)$$

при условии

$$0 \leqslant x_k \leqslant \frac{\xi}{a_k}.$$

ОРС (4.1.8) используется для организации вычислительного процесса в схеме ДП следующим образом.

Шаг 1. Вычисляем

$$\Lambda_1(\xi) = \max_{x_1 \leqslant \xi_1} f_1(x_1), \qquad (4.1.9)$$

где $\xi = 1, 2, \ldots, b$ — параметр процесса. Заполняем таблицу 4.1 шага 1 значениями $\Lambda_1(\xi)$, $x_1^0(\xi)$ для всех $\xi = 0, 1, \ldots, b$.

Шаг 2. Вычисляем

$$\Lambda_2(\xi) = \max_{0 \leqslant x_2 \leqslant \frac{\xi}{a_2}} \{f_2(x_2) + \Lambda_1(\xi - a_2 x_2)\}. \qquad (4.1.10)$$

При этом значения $\Lambda_1(\xi - a_2 x_2)$ для различных значений аргумента $\xi - a_2 x_2$ выбираем из таблицы шага 1. В результате вычислений запоминаем таблицу шага 2: $\Lambda_2(\xi)$, $x_2^0(\xi)$, $x_1^0(\xi)$, где x_2^0 — оптимальное решение ОРС (4.1.10), (табл. 4.2).

Шаг k ($r \leqslant k \leqslant n - 1$). Вычисляем ОРС вида (4.1.8) для всех ξ. При этом значения $\Lambda_{k-1}(\xi - a_k x_k)$ выбираем из таблицы предыдущего $(k - 1)$-го шага.

Ш а г n. Приняв $\xi = b$ (верхнее значение правой части ограничения (4.1.2)) и положив в (4.1.8) $k = n$, приходим к соотношению

$$\Lambda_n(\xi = b) = \max_{x_n} \{f_n(x_n) + \Lambda_{n-1}(b - a_n x_n)\}, \qquad (4.1.11)$$

при условии

$$0 \leqslant x_n \leqslant \frac{b}{a_n}.$$

Вычислив в (4.1.11) оптимальное значение $x_n^0 = x_n^0(b)$ и положив $\xi_1^0 = b - a_n x_n^0(b)$, по значению ξ_1^0 из таблицы (n — 1)-го шага определяем оптимальные значения всех остальных переменных: $x_{n-1}^0(\xi_1^0)$, $x_{n-2}(\xi_1^0)$, ..., $x_1^0(\xi_1^0)$.

Таблица 4.1

ξ	$\Lambda_1(\xi)$	$x_1^0(\xi)$
0	$\Lambda_1(0)$	$x_1^0(0)$
1	$\Lambda_1(1)$	$x_1^0(1)$
⋮	⋮	⋮
$b-1$	$\Lambda_1(b-1)$	$x_1^0(b-1)$
b	$\Lambda_1(b)$	$x_1^0(b)$

Таблица 4.2

ξ	$\Lambda_2(\xi)$	$x_2^0(\xi)$
0	$\Lambda_2(0)$	$x_2^0(0)$
1	$\Lambda_2(1)$	$x_2^0(1)$
⋮	⋮	⋮
$b-1$	$\Lambda_2(b-1)$	$x_2^0(b-1)$
b	$\Lambda_2(b)$	$x_2^0(b)$

Таким образом, динамическое программирование (ДП) представляет собой метод направленного перебора вариантов, где процесс оптимизации может быть интерпретирован как многошаговый процесс принятия решений.

На каждом шаге k этого процесса определяется оптимальное значение только одной переменной x_k при всех возможных значениях параметра состояния ξ, и при этом используются результаты вычислений предыдущих шагов.

Для применения схемы ДП необходимо, чтобы выполнялись следующие основные условия:

1) процесс поиска оптимальных решений должен допускать интерпретацию как многошаговый процесс принятия решений;

2) для каждого шага должно существовать некоторое определенное множество параметров состояний ξ, и оно не должно изменяться от шага к шагу (т. е. должно не зависеть от числа шагов);

3) наконец, оптимальное решение на k-м шаге x_k^0 не должно влиять на найденные оптимальные решения предшествующих шагов, кроме необходимого пересчета значений параметра ξ;

4) оптимальное решение на k-м шаге должно зависеть только от текущего состояния ξ_k и не должно зависеть от предыстории процесса (т. е. траектории, по которой системы приходят в это состояние). Системы (процессы), обладающие указанным свойством, называются *марковскими*.

Задача об использовании рабочей силы

Производителю работ нужно определить оптимальное число работников в каждый из n месяцев. Производственные задания для каждого месяца известны. Допустим, что в j-й месяц идеальное число рабочих — m_j. Если бы производитель работ мог увольнять и принимать новых рабочих без дополнительных затрат, то он мог бы в j-й месяц принять ровно m_j рабочих ($j = 1, 2, ..., n$).

Предположим, что работа j-го месяца может быть выполнена и меньшим числом рабочих при сверхурочной работе. Пусть x_j — фактическое число рабочих в j-й месяц. Затраты по изменению численности рабочих при переходе от $(j-1)$-го месяца к j-му определяются функцией $f_j(x_j - x_{j-1})$.

В зависимости от знака величины $x_j - x_{j-1}$ функция $f_j(x_j - x_{j-1})$ определяет затраты по найму или увольнению. Очевидно, $f_j(0) \equiv 0$. Отклонение численности рабочих от m_j приводит к расходам $g_j(x_j - m_j)$, причем $g_j(0) \equiv 0$; $j = 1, 2, \ldots, n$. Считаем, что в начальный момент число рабочих составило m_0. Целевая функция задачи z определяется соотношением

$$z = \sum_{j=1}^{n} f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j), \tag{4.1.12}$$

где $x_0 = m_0$. Очевидно, что имеется задача с фиксированным началом.

Выведем основное рекуррентное соотношение:

$$z = \min_{x_1, \ldots, x_n} \{f_1(x_1 - m_0) + g_1(x_1 - m_1)\} + \\ + \sum_{j=2}^{n} \{f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j)\};$$

$$\min_{x_2, \ldots, x_n} \sum_{j=2}^{n} \{f_j(x_j - x_{j-1}) + g(x_j - m_j)\} = \min_{x_2} \{[f_2(x_2 - x_1) + g_2(x_2 - m_2)] + \\ + \min_{x_3, \ldots, x_n} \sum_{j=3}^{n} f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j)\}. \tag{4.1.13}$$

Данную задачу удобно решать в обратном направлении. Обозначим

$$\Lambda_n(\xi) = \min_{x_n} [f_n(x_n - \xi) + g_n(x_n - m_n)], \tag{4.1.14}$$

где $\xi = x_{n-1}$.

Основное рекуррентное соотношение имеет вид

$$\Lambda_k(\xi) = \min_{x_k} [f_k(x_k - \xi) + g_k(x_k - m_k) + \Lambda_{k+1}(x_k)], \tag{4.1.15}$$

где $\Lambda_k(\xi)$ — минимальные затраты за месяцы от k-го по n-й включительно, если количество работников в $(k-1)$-й месяц равно ξ.

На последнем шаге определяется оптимальное число рабочих в первый месяц при условии, что на начало месяца их численность составляла m_0. Определив x_1^*, последовательно находим $x_2^* = \tilde{x}_2(x_1^*)$, $x_3 = \tilde{x}_3(x_2^*)$ и т. д. Здесь решение в обратном направлении удобно, так как ничего не известно о числе рабочих на $(n+1)$-й месяц, тогда как в начале процесса задано m_0.

Рассмотрим теперь случай, когда, кроме m_0, задано и m_{n+1}. На этот раз будем искать целые числа, обращающие в минимум выражение

$$z = \sum_{j=1}^{n} [f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(x_j - m_j) + f_{n+1}(m_{n+1} - x_n)]. \tag{4.1.16}$$

Здесь

$$z = \min_{x_n} \left\{ f_{n+1}(m_{n+1} - x_n) + \min_{x_1, \ldots, x_n} \sum_{j=1}^{n} [f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(m_j - x_j)] \right\}.$$

Поскольку теперь задано конечное состояние системы m_{n+1}, то будем решать задачу в прямом направлении.

Определим последовательность функций состояния

$$\Lambda_k(\xi) = \min_{x_1, \ldots, x_k} \left\{ f_{k+1}(\xi - x_k) + g_{k+1}(\xi - m_{k+1}) + \\ + \sum_{j=1}^{k} f_j(x_j - x_{j-1}) + g_j(m_j - x_j) \right\}, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где минимум находим по целым и неотрицательным $x_1 \ldots, x_k$. Тогда

$$\Lambda_1(\xi) = \min_{x_1} \{f_2(\xi - x_1) + g_2(\xi - m_2) + f_1(x_1 - m_0) + g_1(m_1 - x_1)\}.$$

Основное рекуррентное соотношение ДП (динамического программирования)

$$\Lambda_k(\xi) = \min_{x_k} \{f_{k+1}(\xi - x_k) + g_{k+1}(\xi - m_{k+1}) + \Lambda_{k-1}(x_k)\}. \quad (4.1.17)$$

Функция $\Lambda_k(\xi)$ есть минимальные затраты в течение $k+1$ первых месяцев при условии, что численность рабочих в $(k+1)$-й месяц равна ξ.

На последнем шаге при $k = n$, положив $\xi = m_{n+1}$, приходим к соотношению

$$\Lambda_n(m_{n+1}) = \min_{x_n} \{f_{n+1}(m_{n+1} + \Lambda_{n-1}(x_n)\}. \quad (4.1.18)$$

Определив из (4.1.18) оптимальное значение x_n^* по таблице предыдущего $(n - 1)$-го шага, найдем искомые значения всех остальных переменных x_{n-1}^*, x_{n-2}^*, x_1^* (для этого необходимо подставить значение $\xi = x_n^*$).

Подведем некоторые итоги. Если задано начальное состояние системы, то задача решается методом динамического программирования в обратном направлении. Если задано конечное состояние системы, то в прямом направлении.

Наконец, если заданы как начальное, так и конечное состояния, то можно решать как в прямом, так и обратном направлениях. Результаты решения по обеим схемам совпадут.

Пример 4.1. Применим метод динамического программирования для решения задачи о наборе работников со следующими исходными данными: число месяцев $n = 4$, требуемое число работников по месяцам $m_1 = 2$, $m_2 = 5$, $m_3 = 3$, $m_4 = 1$, число работников в начале работ $m_0 = 2$.

Пусть функции затрат имеют следующий вид:

$$f_j(x_j - x_{j-1}) = \begin{cases} 10(x_j - x_{j-1}), & \text{если} \quad x_j \geqslant x_{j-1}; \\ 7(x_{j-1} - x_j), & \text{если} \quad x_j \leqslant x_{j-1}; \end{cases}$$

$$f_j(0) \equiv 0;$$

$$g_j(m_j - x_j) = \begin{cases} 8(x_j - m_j), & \text{если} \quad x_j \geqslant m_j; \\ 11(m_j - x_j), & \text{если} \quad x_j < m_j, \end{cases}$$

$$g_j(0) \equiv 0.$$

Так как начальное условие зафиксировано, то задачу будем решать в обратном направлении.

Запишем основное рекуррентное соотношение

$$\Lambda_k(\xi) = \min_{x_k} \{f_k(x_k - \xi) + g_k(x_k - m_k) + \Lambda_{k+1}(x_k)\},$$

где $\xi = x_{k-1}$.

Шаг 1. $(k = 4)$

$$\Lambda_4(\xi) = \min_{x_4} \{f_4(x_4 - \xi) + g_4(x_4 - m_4)\} = \min_{x_4} \Omega_4(x_4, \xi).$$

Для отыскания $\Lambda_4(\xi)$ составляем вспомогательную таблицу значений $\Omega_4(x_4, \xi)$ (табл. 4.3). Поскольку все функции $f_j(x_j - x_{j-1})$ и $g_j(m_j - x_j)$ выпуклы по переменным x_j, то и функция $f_j(x_j - x_{j-1})$ выпукла по x_4 для всех ξ.

Таблица 4.3

ξ	x_4	Ω_4	ξ	x_4	Ω_4
0	0 1 2	11 10 28	3	0 1 2	32 14 15
1	0 1	18 0	4	0 1 2	39 21 22
2	0 1 2	25 7 8	5	0 1 2	46 28 29

Поэтому для нахождения $\Lambda_4(\xi)$ достаточно определить первый относительный минимум $\Omega_4(x_4, \xi)$, который и будет глобальным. В соответствии с этим значения функции $\Omega_4(x_4, \xi)$ вычисляем лишь для области значений x_4, содержащей этот минимум (табл. 4.3). Вычисления выполняем следующим образом.

1. $\xi = 0,\ x_4 = 0,\ \Omega_4 = 0 + 11(1-0) = 11;$

$$\xi = 0,\quad x_4 = 1,\quad \Omega_4 = 10 \cdot 1 + 0 = 10;$$

$$\xi = 0,\quad x_4 = 2,\quad \Omega_4 = 10(2-0) + 8(2-1) = 28,\quad \Lambda_4(\xi = 0) = 10.$$

2. $\xi = 1,\ x_4 = 0,\ \Omega_4 = 7(1-0) + 11(1-0) = 18;$

$$\xi = 1,\quad x_4 = 1,\quad \Omega_4 = 7(1-1) + 11(1-1) = 0,\quad \Lambda_4(\xi = 1) = 0.$$

3. $\xi = 2,\ x_4 = 0,\ \Omega_4 = 7(2-0) + 11(1-0) = 25;$

$$\xi = 2,\quad x_4 = 2,\quad \Omega_4 = 7 \cdot 0 + 8(2-1) = 8;$$

$$\xi = 2,\quad x_4 = 1,\quad \Omega_4 = 7(2-1) + 11(1-1) = 7;$$

$$\Lambda_4(\xi = 2) = \min_{x_4} \Omega_4(\xi = 2, x_4) = 7.$$

4. $\xi = 3,\ x_4 = 0,\ \Omega_4 = 7(3-0) + 11(1-0) = 32;$

$$\xi = 3,\quad x_4 = 1,\quad \Omega_4 = 7(3-1) + 11(1-1) = 14;$$

$$\xi = 3,\quad x_4 = 2,\quad \Omega_4 = 7(3-2) + 8(2-1) = 15;\quad \Lambda_4(\xi = 3) = 14.$$

5. $\xi = 4,\ x_4 = 0,\ \Omega_4 = 7(4-0) + 11(1-0) = 39;$

$$\xi = 4,\quad x_4 = 1,\quad \Omega_4 = 7(4-1) + 11(1-1) = 21;$$

$$\xi = 4,\quad x_4 = 2,\quad \Omega_4 = 7(4-2) + 8(2-1) = 22;\quad \Lambda_4(\xi = 4) = 21.$$

6. $\xi = 5,\ x_4 = 0,\ \Omega_4 = 7(5-0) + 11(1-0) = 46;$

$$\xi = 5,\quad x_4 = 1,\quad \Omega_4 = 7(5-1) + 0 = 28;$$

$$\xi = 5,\quad x_4 = 2,\quad \Omega_4 = 7(5-2) + 8 = 29;\quad \Lambda_4(\xi = 5) = \min \Omega_4 = 28.$$

Результаты заносим в табл. 4.3.

Значения $\Lambda_4(\xi) = \min\limits_{x_4} \Omega_4(\xi, x_4)$ для всех ξ выбираем из табл. 4.3 и вводим в основную табл. 4.4.

Таблица 4.4

ξ	$\Lambda_4(\xi)$	x_4^0	ξ	$\Lambda_4(\xi)$	x_4^0
0	10	1	3	14	1
1	0	1	4	21	1
2	7	1	5	28	1

Таблица 4.5

ξ	x_3	Ω_3	ξ	x_3	Ω_3
0	0	40	3	0	64
	1	32		1	36
	2	38		2	25
				3	14
				4	24
1	0	50	4	2	32
	1	22		3	21
	2	28		4	29
2	0	57	5	2	39
	1	29		3	28
	2	18		4	36
	3	24			

Таблица 4.6

ξ	Λ_3	x_3	x_4	ξ	Λ_3	x_3	x_4
0	32	1	1	3	14	3	1
1	22	1	1	4	21	3	1
2	18	2	1	5	28	3	1

Ш а г 2. Здесь используется рекуррентное соотношение

$$\Lambda_3(\xi) = \min_{x_3} \{f_3(x_3 - \xi) + g_3(x_3 - m_3) + \Lambda_4(x_3)\},$$

а вычисления выполняются аналогичным образом.

Вспомогательные результаты представлены в табл. 4.5, а итоговые — в табл. 4.6.

Ш а г 3. Вычисляем для всех возможных значений:

$$\Lambda_2(\xi) = \min_{x_2} \{f_2(x_2 - \xi) + g_2(x_2 - m_2) + \Lambda_3(x_2)\} = \min_{x_2} \Omega_2(x_2 \, \xi).$$

Результаты заносим в табл. 4.7 и 4.8.

Ш а г 4. Используя начальное условие $\xi = x_0 = 2$ и подставляя его в соотношение

$$\Lambda_1(x_0) = \min_{x_1} \{f(x_1 - x_0) + g_1(x_1 - m_1) + \Lambda_2(x_1)\},$$

Таблица 4.7

ξ	x_2	Ω_2	ξ	x_3	Ω_3
0	0	87	3	1	80
	1	76		2	58
	2	71		3	36
	3	66		4	42
	4	72			
1	2	61	4	2	65
	3	56		3	43
				4	32
	4	62		5	38
2	2	51	5	4	39
	3	46		5	28
	4	52		6	46

Таблица 4.8

ξ	Λ_2	x_2	x_3	x_4
0	66	3	3	1
1	56	3	3	1
2	46	3	3	1
3	36	3	3	1
4	32	4	3	1
5	28	5	3	1

Таблица 4.9

$\xi = x_0$	x_1	Ω_1
2	1	74
	2	46
	3	54

находим Λ_1 $(x_0 = 2)$ и оптимальное значение переменной $x_1^* = x_1^*(x_0) = 2$. (данные вычислений приведены в табл. 4.9). Далее из табл. 4.8 по значению $\xi = x_1^* = 2$ находим оптимальные значения всех остальных переменных $x_2^* = 3$, $x_3^* = 3$, $x_4^* = 1$. При этом решении минимальные суммарные затраты составят $\Lambda_1 = 46$.

4.2. ДИНАМИЧЕСКИЕ ЗАДАЧИ УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ

При планировании работы системы снабжения n периодов с непостоянным спросом приходим к так называемым динамическим задачам управления запасами. Эти задачи не поддаются аналитическому решению, однако могут быть решены методом динамического программирования.

Пусть имеется система снабжения, которая планирует свою работу на n периодов. Обозначим через y_k остаток запаса от $(k-1)$-го периода, d_k — суммарный спрос за k-й период; x_k — заказ (поставка), выполняемый в k-м периоде. Пусть затраты на выполнение заказа x_k равны $C_k(x_k, y_k)$, предположим, что заказ на пополнение запаса выполняется мгновенно. Обозначим затраты по хранению избыточного запаса в k-м периоде через $s_k(x_k + y_k - d_k)$.

Тогда суммарные расходы по снабжению за n периодов равны

$$L_{nT} = \sum_{k=1}^{n} C_k(x_k, y_k) + S_k(x_k + y_k - d_k), \qquad (4.2.1)$$

причем

$$x_k + y_k - d_k = y_{k+1}, \quad k = \overline{1, n}. \qquad (4.2.2)$$

Требуется найти такие объемы заказов $\{x_k, y_k\}$, при которых (4.2.1) обращается в минимум при условии (4.2.2).

Для минимизации L_{nT} воспользуемся методом динамического программирования. Будем последовательно минимизировать затраты на 1, 2, ..., n периодов.

Определим последовательность функций состояния:

$$\Lambda_k(\xi) = \min_{\{x_j\}} \sum_{j=1}^{k} C_j(x_j, y_j) + S_j(x_j + y_j - d_j)$$

при условии, что $x_k + y_k - d_k = y_{k+1} = \xi$. Тогда основное рекуррентное соотношение будет иметь вид

$$\Lambda_k(\xi) = \min_{x_k} [f_k(x_k, y_k) + \Lambda_{k-1}(\xi - x_k + d_k)], \qquad (4.2.3)$$

где $\xi = y_{k+1}$.

Вычисляем последовательно $\Lambda_1(\xi)$, $\Lambda_2(\xi)$ и т. д., и, наконец, Λ_{n-1} для всех значений ξ. На последнем шаге, положив $\xi = y_{n+1}$, найдем $\Lambda_n(y_{n+1})$ и $x_n^*(y_{n+1})$. Далее определяем $y_n = y_{n+1} + d_n - x_n^*$ и, положив $\xi_1 = y_n$, находим искомые значения всех остальных переменных: x_{n-1}^*, x_{n-2}^*, ..., x_1^*.

Рассмотрим частный случай, упрощающий вычислительную схему.

Допустим, что все функции $C(x_j)$ производственных затрат (стоимости заказа) вогнуты по x_j, а стоимость хранения линейна, т. е. $S(y_{j+1}) = s_j y_{j+1} = s_j(x_j + y_j - d_j)$.

Обозначим общие затраты за период $C_j(x_j) + s_j y_{j+1} = f(x_j, y_{j+1})$. Очевидно, функция $f(x_j, y_{j+1})$ вогнута по x_j и y_{j+1}.

Благодаря свойству вогнутости $f_j(x_j, y_{j+1})$, процесс вычислений значительно упрощается и уже не требуется вычислять $\Lambda_k(\xi)$ путем просмотра всех возможных значений x_j, а достаточно перебрать лишь крайние значения каждой из переменных x_j. Величина $\Lambda_j(\xi)$ вычисляется согласно выражению

$$g_k(i) = \Lambda_{i-1}(0) + f_i\left(\xi + \sum_{n=i}^{k} d_n;\ \xi + \sum_{n=i+1}^{k} d_n\right) + \sum_{j=i+1}^{k} f_j\left(0;\ \sum_{n=j+1}^{k} d_n\right),$$

$$\Lambda_k(\xi) = \min_{1 \leqslant i \leqslant k} g_k(i), \qquad (4.2.4)$$

где $g_k(i)$ — расходы за k периодов при условии, что последний заказ выполнялся в i-м периоде.

Рассмотрим частный случай вида функции производственных затрат $C_j(x_j)$. Пусть

$$C_j(x_j) = \begin{cases} 0, & x_j = 0; \\ A_j + cx_j, & x_j > 0, \end{cases} \qquad (4.2.5)$$

где A_j — фиксированные затраты на заказ (затраты на переналадку оборудования); c — удельные производственные затраты.

В этом случае математическая модель задачи принимает вид:

найти такие $\{x_j, y_j\}$, при которых

$$\sum_{j=1}^{n} A_j \delta_j(x_j) + s_j y_{j+1} \to \min \qquad (4.2.6)$$

при условиях

$$x_j + y_j - y_{j+1} = d_j; \quad x_j y_j = 0, \qquad (4.2.7)$$

где

$$\delta_j(x_j) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_j = 0; \\ 1, & \text{если } x_j > 0. \end{cases} \qquad (4.2.8)$$

Эта задача решается путем последовательного вычисления

$$\Lambda_k(0) = \min_{v \leqslant i \leqslant k} g_k(i), \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{4.2.9}$$

где

$$g_k(i) = \Lambda_{i-1}(0) + A_i + \sum_{j=i}^{k-1} s_j \sum_{n=j+1}^{k} d_n, \tag{4.2.10}$$

где v — номер периода, в котором выполнялся последний заказ при вычислении Λ_{k-1}.

Пример 4.2. Предприятие планирует свою работу на 7 месяцев вперед. Для выполнения плана ему необходимо производить некоторые детали, входящие в состав готовых изделий. Пусть месячная потребность (спрос) в деталях равна $d_1 = 20$; $d_2 = 10$; $d_3 = 25$; $d_4 = 20$; $d_5 = 10$; $d_6 = 12$; $d_7 = 16$. Затраты на производство x деталей в j-м месяце равны

$$C_j(x_j) = \begin{cases} A\delta(x_j), & \text{если } x_j > 0; \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases}$$

где $A = 100$ руб.— затраты на перекладку оборудования, которая производится только в те месяцы, когда выпускаются детали, при этом временем выпуска пренебрегаем.

При изготовлении деталей на несколько месяцев вперед появляются дополнительные расходы на хранение избыточного запаса деталей. Удельные затраты по хранению избыточного запаса составляют $s = 3$ руб./месяц $\times$ деталь.

Требуется определить периоды производства деталей, а также объемы производства $\overset{0}{x}_j$, при которых минимизируются суммарные затраты по производству продукции и хранению избыточного запаса за 7 месяцев. Другими словами, требуется найти такие $\overset{0}{x}_j$, для которых

$$L_n = 100 \sum_{j=1}^{7} \delta_j(x_j) + 3 \sum_{j=1}^{7} y_{j+1} \to \min$$

при условиях $x_j + y_j - d_j = y_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, 7$.

Задачу решить при условии, что конечный запас $y_8 = 0$. Для решения воспользуемся соотношением (4.2.10).

1. Находим $\Lambda_1(0) = A_1 = 100$.
2. Определяем

$$A_2(0) = \min \begin{Bmatrix} A + sd_2 = 100 + 3 \cdot 10 = 130 \\ \Lambda_1(0) + A_2 = 100 + 100 = 200 \end{Bmatrix} = 130.$$

3. Вычисляем

$$\Lambda_3(0) =$$

$$= \min \begin{cases} A_1 + s(d_2 + d_3) + sd_3 = 100 + 3(10 + 25) + 3 \cdot 25 = 280; \\ \Lambda_1(0) + A_2 + sd_3 \quad = 100 + 100 + 3 \cdot 25 = 275; \\ \Lambda_2(0) + A_3 \quad = 130 + 100 = 230; \end{cases}$$

$$\Lambda_3(0) = 230, \quad i = 3.$$

Таблица 4.10

Период k		1	2	3	4	5	6	7
Спрос d_k		20	10	25	20	10	12	16
$g_k(i)$	$i = 1$	100	130 *	280				
	$i = 2$		200	275				
	$i = 3$			230 *	290 *	350 *	446	
	$i = 4$				380	405	432	
	$i = 5$					390	425 *	522
	$i = 6$						450	498 *
	$i = 7$							526
$\lambda_k(0)$		100	130	230	290	350	425	498
Периоды выпуска продукции		1	1	1 3	1 3	1 3	1 3 5	1 3 6

Остальные шаги выполняем аналогично, а результаты заносим в табл. 4.10.

В каждом столбце этой таблицы звездочкой отмечен минимум $g_k(i)$, который равен $\Lambda_k(0)$. В последнем столбце таблицы указаны номера периодов, в которые выпускаются детали, $i = 1, 3, 6$. Отсюда легко определить оптимальные объемы выпуска:

$$\overset{\circ}{x}_1 = d_1 + d_2 = 30; \quad \overset{\circ}{x}_2 = 0; \quad \overset{\circ}{x}_3 = d_3 + d_4 + d_5 = 55;$$

$$\overset{\circ}{x}_4 = \overset{\circ}{x}_5 = 0; \quad \overset{\circ}{x}_6 = d_6 + d_7 = 28; \quad \overset{\circ}{x}_7 = 0.$$

Этому плану соответствует минимум затрат: $\Lambda_7(0) = 498$ ед. ст.

4.3. БЕСКОНЕЧНО -ШАГОВЫЕ ЗАДАЧИ ДИНАМИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Способы оценки бесконечных последовательностей эффектов

Рассмотренные выше модели задач планирования охватывали некоторый конечный интервал времени, состоящий из конечного числа (n) отрезков. Однако функционирование системы на этом не прекращается, а ранее принятые решения безусловно влияют на ее поведение в будущем. В этом смысле эти модели можно рассматривать как элементы бесконечного планового периода. При этом бесконечный плановый период можно трактовать, как предел конечного периода при $n \to \infty$.

Для того чтобы в моделях с бесконечным плановым периодом получить определенные решения, вводится ограничительное допущение о стационарности, которое означает, что все функции экономического эффекта и внешние условия для каждого из отрезков одинаковы либо изменяются циклически. Если рассматривается вероятностная система, то ее вероятностные характеристики предполагаются стационарными.

Прежде чем рассмотреть методы принятия оптимальных решений при бесконечном плановом периоде, необходимо выработать способы оценки и сравнения бесконечных последовательностей эффектов (затрат).

Существуют три способа оценки таких последовательностей (критерии качества):

1) средний эффект за отрезок (СЭ); 2) интегральный дисконтированный эффект (ИДЭ); 3) эквивалентный средний эффект (ЭСЭ).

Рассмотрим эти оценки. Допустим, что некоторой стратегии управления системой отвечает последовательность эффектов

$$R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_t,\quad \text{тогда}\quad \text{СЭ} = \lim_{t\to\infty} \frac{1}{t}\sum_{k=1}^{t} R_k.$$

Основной недостаток критерия СЭ состоит в том, что он одинаково оценивает как доход, полученный в данный момент, так будущие доходы. Вместе с тем, разумеется, ценность одной и той же величины эффекта в настоящий момент и спустя k отрезков (лет) вовсе не одинакова, и чтобы учесть эту неравноценность, вводится коэффициент дисконтирования α $(0 < \alpha \leqslant 1)$, с помощью которого вся последовательность значений эффекта приводится к настоящему моменту времени. В результате приходим к так называемому интегральному дисконтированному эффекту:

$$\text{ИДЭ} = R_1 + \alpha R_2 + \cdots + \alpha^{n-1} R_n = \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t-1} R_t.$$

Величина α может быть, например, определена, как $\alpha = \left[1 + \frac{i}{100}\right]^{-1}$, где i — годовая процентная ставка (годовые проценты, получаемые за денежные средства, помещенные в банк).

Связь между критериями СЭ и ИДЭ осуществляется через так называемый эквивалентный средний эффект (ЭСЭ).

Под ЭСЭ понимается такая величина эффекта, постоянная на всех отрезках $t = \overline{1, \infty}$, что ИДЭ для последовательности из значений ЭСЭ и для исходной последовательности совпадает.

Допустим, что для последовательности $R_1,\ R_2,\ \ldots,\ R_t$

$$\text{ИДЭ} \triangleq \sum_{t=1}^{\infty} \alpha^{t-1} R_t = P(\alpha).$$

Обозначим $\text{ЭСЭ} = X(\alpha)$. Имеем последовательность

$$X(\alpha) + \alpha X(\alpha) + \alpha^2 X(\alpha) + \cdots + \alpha^k X(\alpha) =$$
$$= (1 + \alpha + \alpha^2 + \cdots) X(\alpha) = \frac{X(\alpha)}{1-\alpha}.$$

Но поскольку по определению для обеих последовательностей ИДЭ совпадает, то $P(\alpha) = \frac{X(\alpha)}{1-\alpha}$, откуда

$$\text{ЭСЭ} = X(\alpha) = (1-\alpha) P(\alpha) = (1-\alpha)\,\text{ИДЭ}.$$

Заметим, что во всех случаях, когда средний эффект за отрезок определен, его можно получить путем предельного перехода:

$$\text{СЭ} = \lim_{\alpha\to 1} \text{ЭСЭ}(\alpha) = \lim_{\alpha\to 1} (1-\alpha)\,\text{ИДЭ}.$$

Сетевые задачи динамического программирования

Многие задачи оптимального планирования и управления (например, управления запасами, распределения ресурсов) могут быть представлены в виде некоторой сетевой модели, в которой каждому состоянию системы соответствует некоторая вершина сети, и задача оптимального планирования интерпретируется как задача нахождения кратчайшего маршрута в сети. Рассмотрим для примера некоторую сеть, включающую p вершин и множество ориентированных дуг, которые соединяют некоторые вершины между собой (рис. 4.1).

Перемещению по каждой дуге (i, j) соответствует некоторый эффект (затраты) c_{ij}, причем время перемещения из i в j примем равным одному отрезку планового периода. Как и ранее, коэффициент дисконтирования обозначим через α.

Пусть маршрут начинается в некоторой произвольно выбранной вершине i. Предположим далее, что из вершины i мы направляемся в вершину j, причем возникают дисконтированные затраты αc_{ij}. Если процесс продолжается неограниченное время, маршрут является бесконечным. Обозначим через y_i интегральные дисконтированные затраты для оптимального бесконечного маршрута, который начинается в вершине i. Если принятая стратегия является стационарной, то каждый раз, возвратившись к вершине i, мы снова выбираем ту же дугу, которая была выбрана и при предыдущем заходе в эту вершину.

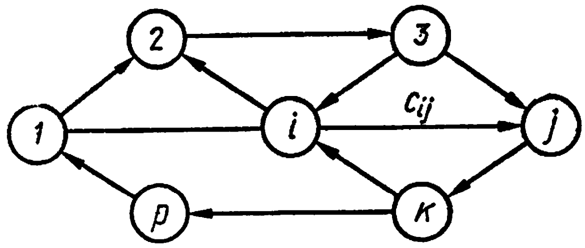

Рис. 4.1

Пусть существует стационарная стратегия, которая является оптимальной, тогда соответствующие величины ИДЗ $\{y_i\}$ удовлетворяют следующей системе функциональных уравнений:

$$y_i = \min_{(i,j)} (\alpha y_j + c_{ij}) \text{ для всех вершин } i, \quad 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{4.3.1}$$

При анализе уравнений (4.3.1) возникают следующие вопросы: 1) всегда ли можно для всех значений y_i отыскать однозначное и конечное решение? 2) если да, то является ли соответствующая стационарная стратегия действительно оптимальной?

Ответы на оба вопроса являются утвердительными и следуют из теоремы о стационарной стратегии [2].

Всегда существуют однозначно определенные конечные y_i, $i = \overline{1, p}$ и соответствующая стационарная стратегия является оптимальной.

Метод итераций по критерию

Итак, пусть имеется система функциональных уравнений вида

$$y_i = \min_{\text{для всех } (i,\, j)} (\alpha y_j + c_{ij}).$$

Ее решение методом итераций по критерию состоит в следующем.

Шаг 1. Задаемся начальными значениями $y_i^{(0)}$ (например, $y_i^{(0)} = 0$) и $n = 0$.

Шаг 2. Вычисляем

$$y_i^{(n+1)} = \min_{(i,j)} (\alpha y_j^{(n)} + c_{ij}) \text{ для всех } i. \tag{4.3.2}$$

Шаг 3. Если $y_i^{(n+1)} = y_i^{(n)}$ для всех i, это конец, иначе переходим к шагу 2, положив $n = n + 1$. Если все $y_i^{(0)} = 0$ и все $c_{ij} \geqslant 0$, то значения $y_i^{(n)}$ возрастают монотонно и каждое из $y_i^{(n)}$ сходится к своему пределу y_i, однако сходимость не гарантируется за конечное число итераций.

Метод итераций по стратегиям

Функциональные уравнения для сетевой модели (4.3.1) можно решать и с помощью метода (алгоритма) итераций по стратегиям, который имеет следующий вид.

Шаг 1. Выберем произвольную исходную стратегию и примем $y_i^{(0)} = 0$ (заметим, что выбор стратегии означает выбор определенной дуги c_{ij} для каждой вершины i).

Шаг 2. Для заданной пробной стратегии вычислим значения y_i^n в соответствии с системой уравнений расчета стоимости вершин:

$$y_i^n = \alpha y_j^n + c_{ij} \quad \text{или} \quad y_i^{(n)} — \alpha y_j^{(n)} + c_{ij}, \tag{4.3.3}$$

где дуга (i, j) отображает решение для вершины i, соответствующее конкретной пробной стратегии.

Шаг 3. Проверим возможность дальнейших улучшений, вычислив

$$\min_{\forall(i,j)} (\alpha y_j^{(n)} + c_{ij}) = Y_i^{(n)} \quad \text{для всех} \quad i. \tag{4.3.4}$$

Шаг 4. Если $Y_i^{(n)} = y_i^{(n)}$ для всех i, то прекратим расчеты. В противном случае изменим стратегию для каждой вершины k, для которой $Y_k^{(n)} < y_k^{(n)}$, выбрав дугу, позволяющую достичь в (4.3.4) значения $Y_k^{(n)}$. Перейдем к итерации $(n + 1)$ на выполнение шага 2 на основе новой пробной стратегии.

Метод итераций по стратегиям обладает следующими свойствами:

1) для любой вершины i $y_i^{(n+1)} \leqslant y_i^{(n)}$, и если $Y_k^{(n)} < y_k^{(n)}$, то $y_k^{(n+1)} < < y_k^{(n)}$;

2) алгоритм является конечным;

3) стратегия, позволяющая по завершению расчетов достичь y_i, $i = \overline{1, p}$, является оптимальной.

Минимизация среднего эффекта за отрезок

Рассмотрим теперь в качестве критерия оптимизации сетевой модели средний эффект (затраты) за отрезок. Допустим, что величина среднего эффекта за отрезок существует, и обозначим ее минимальное значение через $\bar{c}$. Кроме того, предположим, что в рассматриваемой сети существует направленный маршрут от любой величины i, по крайней мере, к одной из вершин, входящих в цикл, который позволяет достичь $\bar{c}$. Построим функциональные уравнения, включающие $\bar{c}$.

Пусть y_i — ИДЭ для системы, если текущее ее состояние i. Тогда ЭСЭ для вершины i будет равен $(1 — \alpha) y_i$. Величину ЭСЭ для каждой вершины i удобно связать с величиной $\bar{c}$ следующим соотношением:

$$(1 — \alpha) y_i = (1 — \alpha) w_i + \bar{c}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{4.3.5}$$

где w_i называют весом i-й вершины.

Тогда

$$y_i = w_i + \frac{\bar{c}}{1 — \alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1. \tag{4.3.6}$$

Подставляя y_i из (4.3.6) в (4.3.1) после простых преобразований, получим функциональное уравнение в виде

$$w_i = \min_{\forall(i,j)} (\alpha w_j + c_{ij} - \bar{c}), \qquad (4.3.7)$$

или в следующем эквивалентном виде:

$$w_i + \bar{c} = \min_{(i,j)} (\alpha w_j + c_{ij}) \text{ для всех вершин } i.$$

Положив $\alpha = 1$, приходим к искомому функциональному уравнению

$$w_i + \bar{c} = \min_{(i,j)} (w_j + c_{ij}) \text{ для всех вершин } i. \qquad (4.3.8)$$

Для решения функциональных уравнений (4.3.8) используется метод итераций по стратегиям. Заметим, что если найдены значения w_i, удовлетворяющие экстремальным уравнениям (4.3.8), то и значения $w_i' = w_i + a$ для всех i (где a — некоторая константа) также будут решениями этих уравнений. Таким образом, значения w_i не являются единственными и удобно принять одно из них равным нулю (например, $w_1 = 0$).

Предположим, что на каждой итерации проверяемая стратегия включает ровно один цикл.

Алгоритм итераций по стратегиям включает следующие операции.

Шаг 1. Выберем произвольную пробную стратегию и примем $w_1 = 0$.

Шаг 2. Для заданной пробной стратегии вычислим значения $w_i^{(n)}$ и $\bar{c}^{(n)}$ в соответствии со следующими уравнениями стоимости вершин:

$$w_i^{(n)} - w_j^{(n)} + \bar{c}^{(n)} = c_{ij} \text{ для всех вершин } i, \qquad (4.3.9)$$

где дуга (i, j) отображает решение для вершины i, соответствующее пробной стратегии.

Шаг 3. Проверим возможность дальнейшего улучшения, вычислив

$$\min_{\forall(i,j)} (w_j^{(n)} + c_{ij} - \bar{c}^{(n)}) = W_i^{(n)}. \qquad (4.3.10)$$

Шаг 4. Прекратим расчеты, если $W_i^{(n)} = w_i^{(n)}$ для всех $i = \overline{1, p}$. В противном случае изменим стратегию для каждой вершины k, для которой $W_k^{(n)} < w_k^{(n)}$, выбрав дугу, позволяющую достичь в (4.3.10) значения $W_k^{(n)}$. Перейдем от итерации n к итерации $(n + 1)$ на выполнение шага 2 при новой пробной стратегии.

Итак, на каждой итерации требуется решать систему (4.3.9). Если проверяемая стратегия включает один цикл, то уравнения (4.3.9) всегда имеют единственное решение. Заметим, что если просуммировать уравнения (4.3.9) для всех вершин, входящих в цикл, то все величины $w_i^{(n)}$ взаимно уничтожаются, так что в результате получим

$$\bar{c}^{(n)} = \sum_{(i,j)\in L} \frac{c_{ij}}{m}, \qquad (4.3.11)$$

где L — совокупность дуг, входящих в цикл, а m — число дуг в цикле.

Отметим, что данный алгоритм обладает следующими свойствами:

1) на каждой итерации $\bar{c}^{(n)} \leqslant \bar{c}^{(n-1)}$;

2) вычисления прекращаются после конечного числа итераций;

3) оптимальной является та стратегия, которая позволяет достичь $W_i^{(n)}$, при этом $\bar{c}^{(n)} = \bar{c}$.

Пример 4.3. Рассмотрим сеть, изображенную на рис. 4.2. На дугах проставлены соответствующие значения c_{ij}. Для того чтобы применить метод итераций по стратегиям, необходимо выбрать исходную стратегию, в которой для каждой вершины имеется исходящая дуга. Пусть такой стратегией является:

для вершины 1 — дуга (1, 4);
для вершины 2 — дуга (2, 1);
для вершины 3 — дуга (3, 2);
для вершины 4 — дуга (4,1).

Таким образом, данная стратегия включает единственный цикл — дуги (1,4) и (4,1).

Составим систему функциональных уравнений вида (4.3.7) для выбранной пробной стратегии:

$$y_1^{(0)} = \alpha y_4^{(0)} + c_{14};\quad y_2^{(0)} = \alpha y_1^{(0)} + c_{21};\quad y_3^{(0)} = \alpha y_2^{(0)} + c_{32};$$
$$y_4^{(0)} = \alpha y_1^{(0)} + c_{41}.$$

Их можно представить в следующем эквивалентном виде:

$$y_1^{(0)} - \alpha y_4^{(0)} = 3;$$
$$-\alpha y_1^{(0)} + y_2^{(0)} = 4;$$
$$-\alpha y_2^{(0)} + y_3^{(0)} = 1;$$
$$-\alpha y_1^{(0)} + y_4^{(0)} = 1.$$

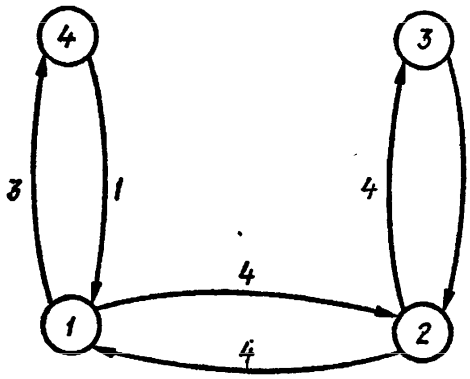

Рис. 4.2

Решением этой системы будет следующее:

$$y_1^{(0)} = \frac{3 + 1\cdot\alpha}{1-\alpha^2};\quad y_2^{(0)} = \frac{4 + 3\alpha - 3\alpha^2}{1-\alpha^2};$$
$$y_3^{(0)} = \frac{1 + 4\alpha + 2\alpha^2 - 3\alpha^3}{1-\alpha^3};\quad y_4^{(0)} = \frac{1+3\alpha}{1-\alpha^2}.$$

Как видно из рис. 4.2, изменение решений возможно лишь для вершин 1 и 2, где имеется более одной исходящей дуги.

При $0 \leqslant \alpha < 1$, согласно формулам расчета (4.3.4), для вершины 1 получим

$$\min(\alpha y_2^{(0)} + c_{12};\ \alpha y_4^{(0)} + c_{14}) =$$
$$= \min\left(\frac{4 + 4\alpha - \alpha^2 - 3\alpha^3}{1-\alpha^2};\ \frac{3+1\alpha}{1-\alpha^2}\right) = \frac{3+1\alpha}{1-\alpha^2} = Y_1^{(0)},$$

для дуги (2, 4) при $0 \leqslant \alpha < 1$.

Аналогично этому для вершины 2:

$$\min(\alpha y_1^{(0)} + c_{21};\ \alpha y_3^{(0)} + c_{23}) =$$
$$= \min\left(\frac{4 + 3\alpha - 3\alpha^2}{1-\alpha^2};\ \frac{4 - \alpha + 2\alpha^3 - 3\alpha^4}{1-\alpha^2}\right) = \frac{4+3\alpha-3\alpha^2}{1-\alpha^2} = Y_2^{(0)}, \tag{4.3.12}$$

для дуги (2,1) при $^2/_3 \leqslant \alpha < 1$.

Таким образом, если $^2/_3 \leqslant \alpha < 1$, то для каждой вершины будет выполняться условие $Y_i^{(0)} = y_i^{(0)}$ и исходная стратегия будет оптимальной. Если же $\alpha < {}^2/_3$, то минимум (4.3.12) будет достигаться на дуге (2,3), и это решение должно на следующей итерации заменить дугу (2,1).

Пример 4.4. Рассмотрим снова сеть, изображенную на рис. 4.2 при $\alpha = 1$, и примем значение $c_{23} = 3$. Требуется найти оптимальную стратегию, минимизирующую средние затраты за отрезок.

В качестве исходной выберем ту же стратегию, что и в примере 4.3, и, применив формулы расчета стоимости вершин (4.3.9), получим следующую систему функциональных уравнений:

$$w_1^{(0)} - w_4^{(0)} = c_{14} - \bar{c}^{(0)};$$

$$w_2^{(0)} - w_1^{(0)} = c_{21} - \bar{c}^{(0)};$$

$$w_3^{(0)} - w_2^{(0)} = c_{32} - \bar{c}^{(0)};$$

$$w_4^{(0)} - w_1^{(0)} = c_{41} - \bar{c}^{(0)}; \quad \omega_1^{(0)} = 0.$$

Эта система имеет следующее решение:

$$\bar{c}^{(0)} = 2, \quad w_1^{(0)} = 0, \quad w_2^{(0)} = 2, \quad w_3^{(0)} = 1, \quad w_4^{(0)} = -1.$$

Расчет показателей возможного улучшения по формулам (4.3.10) дает новые значения весов:

для вершины 1:

$$\min(w_2^{(0)} + c_{12} - \bar{c}^{(0)}; \quad w_4^{(0)} + c_{14} - \bar{c}^{(0)}) =$$

$$= \min(2 + 4 - 2; \; -1 + 2 - 2) = 0 = W_1^{(0)} \text{ (для дуги 1, 4)};$$

для вершины 2:

$$\min(w_1^{(0)} + c_{21} - \bar{c}^{(0)}; \quad w_3^{(0)} + c_{23} - \bar{c}^{(0)}) = 2 \equiv W_2^{(0)} \text{ (для всех дуг)}.$$

Расчеты прекращаются, так как для всех i $W_i^{(0)} = w_i^{(0)}$.

4.4. ДИНАМИЧЕСКАЯ ЗАДАЧА УПРАВЛЕНИЯ ЗАПАСАМИ ПРИ БЕСКОНЕЧНОМ ПЛАНОВОМ ПЕРИОДЕ

Рассмотрим важную в практическом отношении динамическую задачу управления запасами при бесконечном плановом периоде. Пусть имеется система снабжения, которая производит и накапливает запасы со следующими исходными данными: объем выпуска $x \leqslant 5$ ед., спрос на отрезке постоянен — $d = 3$ ед.; при этом уровень запасов на конец отрезка времени должен удовлетворять условию $j \leqslant 4$; затраты на производство $C(x)$ задаются соотношением

$$C(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0; \\ 13 + 2x, & \text{если } x > 0. \end{cases} \quad 1 \leqslant x \leqslant 5$$

Затраты на хранение продукции равны h_j, где $h = 1$.

Предположим, что система снабжения функционирует неограниченно долго. Требуется определить такую оптимальную стратегию управления запасами (т. е. объемы выпуска x на каждом отрезке), при которой минимизируются средние затраты за отрезок.

В качестве переменной состояния выберем уровень запасов на начало отрезка (где $i = 0, 1, 2, 3, 4$). Таким образом, стационарная стратегия представляет собой правило установления оптимального объема выпуска для каждого возможного значения i.

Для решения указанной задачи необходимо прежде всего представить ее в виде сетевой модели. Каждому возможному состоянию поставим в соответствие одну вершину сетевой модели; при заданном i каждому допустимому объему выпуска x соответствует некоторая дуга (i, j).

Так, если уровень запасов на начало отрезка равен i, объем выпуска составляет x единиц, а спрос $d = 3$ единицы, то запас j на начало следующего отрезка составляет $j = i + x - 3$. Следовательно, дуга (i, j) соответствует объему производства $x = j - i + 3$ единицы.

Таким образом, затраты для дуги (i, j) определяются выражением

$$c_{ij} = C(j - i + 3) + hj. \quad (4.4.1)$$

В связи с наличием ограничений на объем выпуска x и уровень запасов некоторые сочетания i и j не будут допустимыми. Например, при $i = 0$ должно быть $j \leqslant 2$, поскольку $x \leqslant 5$.

Сеть, соответствующая условиям данной задачи, приводится на рис. 4.3. При этом величины c_{ij} рассчитаны согласно (4.4.1).

Допустим, что в качестве критерия оптимальности принят минимум средних затрат за отрезок времени. Тогда решаемое функциональное уравнение имеет вид

$$w_i = \min_{(i,j)} (w_j + c_{ij} - \bar{c}) \text{ для всех } i.$$

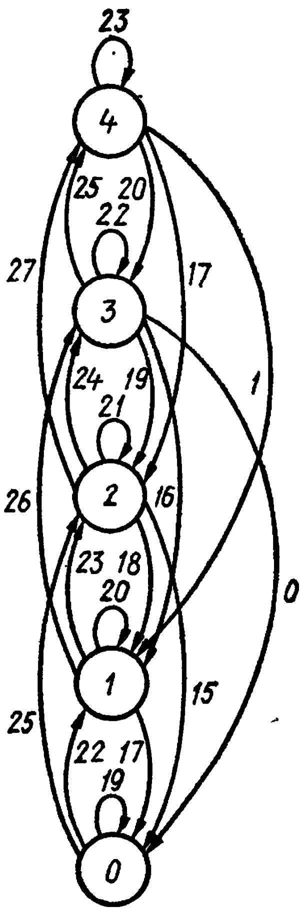

Рис. 4.3

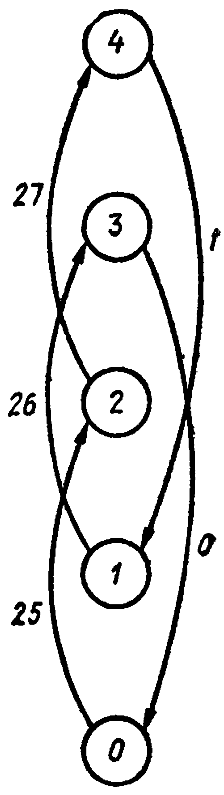

Рис. 4.4

В качестве пробной стратегии выберем следующую: производить недостающее для удовлетворения спроса количество продукции при $i \leqslant 3$ так, чтобы уровень запасов на конец отрезка был равен $j = 0$, и вообще не выпускать продукцию, если на данном отрезке $i = 4$. На сети эта стратегия представляется так:

вершина 0 — дуга (0, 0), $x = 3$;
вершина 1 — дуга (1, 0), $x = 2$;
вершина 2 — дуга (2, 0), $x = 1$;
вершина 3 — дуга (3, 0), $x = 0$;
вершина 4 — дуга (4, 1), $x = 0$.

Решение. Используем алгоритм итераций по стратегиям и составим систему функциональных уравнений, отвечающих пробной стратегии:

$$w_0^{(0)} - w_0^{(0)} + \bar{c}^{(0)} = c_{00} = 19;$$

$$w_1^{(0)} - w_0^{(0)} + \bar{c}^{(0)} = c_{10} = 17;$$

$$w_2^{(0)} - w_0^{(0)} + \bar{c}^{(0)} = c_{20} = 15;$$

$$w_3^{(0)} - w_0^{(0)} + \bar{c}^{(0)} = c_{30} = 0;$$

$$w_4^{(0)} - w_1^{(0)} + \bar{c}^{(0)} = c_{41} = 1;$$

$$w_0^{(0)} = 0.$$

Ее решением является $\bar{c}^{(0)} = 19$, $w_0^{(0)} = 0$, $w_1^{(0)} = -2$, $w_2^{(0)} = -4$, $w_3^{(0)} = -19$, $w_4^{(0)} = -20$. Для всех $i = \overline{1, 4}$ вычисляем

$$W_i^{(n)} = \min_{\forall (i, j)} (w_i^{(n)} + c_{ij} - \bar{c}^{(n)})$$

и в результате получим:

$$W_0^{(0)} = 0 \text{ для дуги } (0, 0); \quad W_1^{(0)} = -12 \text{ для дуги } (1, 3);$$

$$W_2^{(0)} = -14 \text{ для дуги } (2, 3); \quad W_3^{(0)} = -19 \text{ для дуги } (3, 0);$$

$$W_4^{(0)} = -20 \text{ для дуги } (4, 1).$$

Таблица 4.11

Вершина	$n=0$			$n=1$			$n=2$			$n=3$		
	(i, j)	$w_i^{(0)}$	$W_i^{(0)}$	(i, j)	$w_i^{(1)}$	$W_i^{(1)}$	(i, j)	$w_i^{(2)}$	$W_i^{(2)}$	(i, j)	$w_i^{(3)}$	$W_i^{(3)}$
0	(0, 0)	0	00	(0, 0)	0	−9	(0, 1)	0	$-3^2/_3$	(0, 2)	0	0
1	(1, 0)	−2	−12	(1, 3)	−12	−12	(1, 3)	$-4^2/_3$	$-5^2/_3$	(1, 2)	−2	−8
2	(2, 0)	−4	−14	(2, 3)	−14	−22	(2, 4)	$-11^1/_3$	$-11^1/_3$	(2, 4)	−8	−10
3	(3, 0)	−19	−19	(3, 0)	−19	−24	(3, 4)	$-13^1/_3$	$-17^1/_3$	(3, 0)	−17	−17
4	(4, 1)	−20	−20	(4, 1)	−30	−30	(4, 1)	−21	−21	(4, 1)	−18	−18
$\bar{c}^{(n)}$		19			19			$17^1/_3$			17	

Вершина	$n=4$			$n=5$			$n=6$		
	(i, j)	$w_i^{(4)}$	$W_i^{(4)}$	(i, j)	$w_i^{(5)}$	$W_i^{(5)}$	(i, j)	$w_i^{(6)}$	$W_i^{(6)}$
0	(0, 2)	0	−1	(0, 1)	0	−1	(0, 2)	0	0
1	(1, 3)	$-6^2/_3$	$-6^2/_3$	(1, 3)	−6	−6	(1, 3)	$-5^3/_5$	$-5^3/_5$
2	(2, 3)	$-8^2/_3$	$-11^1/_3$	(2, 4)	−10	−10	(2, 4)	$-9^1/_5$	$-9^1/_5$
3	(3, 0)	$-16^1/_3$	$-16^1/_3$	(3, 0)	−16	−16	(3, 0)	$-15^4/_5$	$-15^4/_5$
4	(4, 1)	−22	−22	(4, 1)	−21	−21	(4, 1)	$-20^2/_5$	$-20^2/_5$
$\bar{c}^{(n)}$		$16^1/_3$				16		$15^4/_5$	

На этом первая итерация заканчивается. Поскольку для $i = 1$ и $i = 2$ $W_i^{(0)} < w_i^{(0)}$, то переходим ко второй итерации, выбрав в качестве новой пробной стратегии следующую: (0, 0), (1, 3), (2, 3), (3, 0), (4, 1). Результаты, полученные в ходе выполнения ряда последовательных итераций, приводятся в табл. 4.11.

Анализируя эту таблицу, можно сделать следующие выводы:

1) от $n = 0$ до $n = 1$ значение $c^{(n)}$ не улучшается;

2) на всех последующих итерациях $n = 2, 3, 4, 5, 6$ имеем $c^{(n+1)} < c^{(n)}$;

3) оптимальная стратегия управления запасами (при $n = 6$) имеет следующий вид (рис. 4.4):
$x = 5$ при $i = 0, 1, 2$; $x = 0$ при $i = 3, 4$, что соответствует производственному циклу (5, 5, 0, 5, 0). При этом средние затраты за отрезок будут минимальны: $\bar{c} = 15^4/5$.

Задачи и упражнения

Решить следующие задачи методом динамического программирования.

4.1. (Распределение ограниченных ресурсов.) Управление НИР министерства ежегодно распределяет ассигнования на выполнение научно-исследовательских и опытно-конструкторских работ (НИР — ОКР) между научно-исследовательскими и проектными институтами отрасли. Каждый из институтов представляет руководству министерства данные трех видов. Информация первой группы относится к проведению поисковых исследований весьма неопределенного характера. Если на исследование этого рода в институте s выделяется v_j тыс. руб., то оценка ожидаемого экономического эффекта (дохода) равна $P_j(v_j)$ млн. руб. Информация второй группы относится к продукции, по которой поисковые исследования уже завершены и для выпуска которой требуется проведение ОКР. Для таких проектов ассигнования в объеме w_j тыс. руб., согласно имеющейся оценке, дадут в конечном счете доход $Q_j(w_j)$ млн. руб. Наконец, к третьей группе относится информация, связанная с улучшением качества уже выпущенной продукции. Затраты x_j тыс. руб., согласно сделанным оценкам, должны принести доход $R_j(x_j)$ млн. руб.

Коллегия министерства утверждает общую сумму ассигнований на все проекты НИР — ОКР в размере N тыс. руб. и устанавливает верхний предел ассигнований L_j, которые может получить институт.

Требуется распределить ассигнования между институтами таким образом, чтобы обеспечить максимум общего эффекта отрасли при введенных ограничениях.

Составить математическую модель задачи и записать ОРС динамического программирования для ее решения.

4.2. Рассмотрим предыдущую задачу при дополнительном условии, что ассигнования выделяются также и на фундаментальные исследования, причем оценка эффекта, который получит отрасль при выделении ассигнований в объеме y_j, равна $T_j(y_j)$.

Покажите, как необходимо изменить постановку задачи и какие изменения требуется внести в ОРС Беллмана.

4.3. В подшефный совхоз из городского предприятия была направлена группа работников из 10 чел. для уборки помидоров на одном из трех полей. По оценке председателя, выделив y_i человек на поле, можно собрать $R(y_i)$ кг помидоров, где

$$R_1(1) = 50,\quad R_1(2) = 100,\quad R_1(3) = 150,\quad R_1(4) = 250,$$
$$R_1(5) = 350,\quad R_1(6) = 500;$$
$$R_2(1) = 30,\quad R_2(2) = 60,\quad R_2(3) = 120,\quad R_2(4) = 180,$$
$$R_2(5) = 300,\quad R_2(6) = 550;$$
$$R_3(1) = 200,\quad R_3(2) = 350,\quad R_3(3) = 450,\quad R_3(4) = 550,$$
$$R_3(5) = 600,\quad R_3(6) = 650.$$

Никаких дополнительных сборов не удается получить, если направить на каждое из полей более 6 чел. Сколько работников следует направить на каждое из полей, чтобы собрать наибольший урожай? Построить соответствующую модель динамического программирования и найти ее оптимальное решение.

Показать, как изменится решение, если всего для сбора помидоров будет из города направлено 12 или 14 человек.

4.4. Рассмотреть предыдущую задачу (4.3). Предположим, что у директора совхоза не хватает людей и он формирует задачу следующим образом: минимизировать число городских работников, направляемых на уборку овощей, при условии, что с трех полей нужно собрать не менее R кг помидоров. Сформировать задачу в терминах динамического программирования и найти оптимальное решение при условиях:

а) $R_1 = 800$ кг; б) $R_2 = 1000$ кг; в) $R_3 = 120$ кг.

4.5. Рассмотреть еще раз задачу 4.3. Предположим, что директор стремится затратить не более M человеко-дней на уборку овощей на трех полях. Ему известно, что если направить на любое поле от одного до трех человек, то всего для сбора помидоров потребуется 3 человеко-дня. Если же направить на одно поле более трех человек, то они затратят 2 человеко-дня. Какое количество людей при их общей численности в 10 чел. следует направить на каждое поле при условиях:

а) $M = 3$; б) $M = 4$?

4.6. (Календарное планирование трудовых ресурсов). Предприятие планирует свою работу на N периодов (месяцев). Объем работ в различные периоды времени не остается постоянным. Обозначим через m_k оптимальное (идеальное) число работников в k-й период, позволяющее выполнить заданный объем работ с наименьшими издержками. При числе работников x_k ($x_k \neq m_k$) предприятие несет дополнительные производственные затраты $g_k(x_k - m_k)$, причем $g_k(0) \equiv 0$.

Предприятие может варьировать число работников, набирая дополнительных работников на будущий период или сокращая их число. Обозначим через $f(x_k - x_{k-1})$ затраты по найму-сокращению работников при переходе от $(k-1)$-го периода к k-му. Примем $f(0) \equiv 0$.

Требуется определить такое число работников в каждом из k периодов $\{x_k\}$, $k = \overline{1, N}$, при котором минимизируется сумма производственных затрат и затрат по найму-сокращению за все время функционирования предприятия. При этом примем, что перед началом работ $x_0 = 0$.

Составить математическую модель задачи и решить ее методом динамического программирования.

Вариант 1.

$$N = 5,\ m_1 = 5,\ m_2 = 10,\ m_3 = 14,\ m_4 = 20,\ m_5 = 10.$$

$$g(x_k - m_k) = \begin{cases} 6(x_k - m_k), & \text{если } x_k \geqslant m_k; \\ 10(m_k - x_k), & \text{если } x_k < m_k. \end{cases}$$

$$f(x_k - x_{k-1}) = \begin{cases} 7(x_k - x_{k-1}), & \text{если } x_k \geqslant x_{k-1}; \\ 4(x_{k-1} - x_k), & \text{если } x_k < x_{k-1}. \end{cases}$$

Вариант 2.

$$N = 5,\ m_1 = 5,\ m_2 = 10,\ m_3 = 14,\ m_4 = 20,\ m_5 = 10.$$

$$g(x_k - m_k) = \begin{cases} 10(x_k - m_k), & \text{если } x_k \geqslant m_k; \\ 6(m_k - x_k), & \text{если } x_k < m_k. \end{cases}$$

$$f(x_k - x_{k-1}) = \begin{cases} 5(x_k - x_{k-1}), & \text{если } x_k \geqslant x_{k-1}, \\ 8(x_{k-1} - x_k) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Решить задачу при дополнительном условии, что после окончания работ число работников должно быть равным 0.

Вариант 3.

$$N = 5,\ m_1 = 5,\ m_2 = 15;\ m_3 = 12,\ m_4 = 10,\ m_5 = 5.$$

$$g(x_k - m_k) = 2(x_k - m_k)^2.$$

$$f(x_k - x_{k-1}) = \begin{cases} 5(x_k - x_{k-1}), & \text{если } x_k \geqslant x_{k-1}; \\ 10(x_{k-1} - x_k) & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

4.7. Динамическая задача управления запасами. Предприятие должно разработать календарную программу выпуска некоторого вида изделия на плановый период, состоящий из N отрезков. Предполагается, что для каждого из отрезков известен спрос на выпускаемую продукцию: d_n, $n = \overline{1, N}$. Временем изготовления партий пренебрегаем. Стоимость выпуска партии $C(x_n)$ зависит от ее объема x_n.

Предприятию часто бывает выгодно изготавливать в течение некоторого отрезка продукцию в объеме, превышающем спрос этого отрезка, и хранить излишки, используя их для удовлетворения спроса в последующие периоды. Хранение запасов связано с определенными затратами, которые обозначим через $S(y_{n+1})$, где y_{n+1} — избыточный запас, хранимый на отрезке $n + 1$.

Требуется определить такую программу выпуска x_n в каждом из отрезков, при которой минимизируется общая сумма затрат на производство и содержание запасов при условии полного удовлетворения спроса на продукцию на каждом из отрезков.

Вариант 1. $N = 6$, $f(x_n, y_{n+1}) = C(x_n) + sy_{n+1}$, где

$$C(x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_n = 0; \\ 30 + 10x_n, & \text{если } x_n > 0. \end{cases}$$

Спрос по периодам равен соответственно:

$$d_1 = 10,\quad d_2 = 15,\quad d_3 = 8,\quad d_4 = 25,\quad d_5 = 12,\quad d_6 = 30.$$

Вариант 2. $N = 8$.

$$C(x_n) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_n = 0; \\ 16 + 4x_n, & \text{если } x_n > 0, \end{cases}$$

$sy_n = 2y_n$.

Спрос по периодам равен соответственно:

$$d_1 = 20,\quad d_2 = 10,\quad d_3 = 15,\quad d_4 = 12,\quad d_5 = 8,\quad d_6 = 10,$$
$$d_7 = 20,\quad d_8 = 25.$$

Выяснить, при каком соотношении между фиксированной стоимостью заказа партии A и удельными затратами на хранение s оптимальная программа выпуска будет совпадать со спросом, т. е. $x_1^0 = d_1$, $x_2^0 = d_2$, ..., $x_n^0 = d_n$.

Вариант 3. $N = 7$.

$$C(x_n) = \begin{cases} 100 + 8x_n, & \text{если } x_n > 0; \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

$$d_1 = 20,\quad d_2 = 10,\quad d_3 = 15,\quad d_4 = 20,\quad d_5 = 10,$$
$$d_6 = 12,\quad d_7 = 16.$$

Найти оптимальные программы выпуска партий и сравнить их для $s = 1, 2, 3, 4$.

4.8. 1) Исследовать задачу управления запасами. Решить ее методом итераций по стратегиям при следующих значениях коэффициента дисконтирования: а) $\alpha = 0{,}9$, б) $\alpha = 1/2$, в) $\alpha = 0$.

2) Выяснить влияние значения α на выбор оптимальной стратегии.

3) Каково наименьшее значение α, при котором стратегия $x = 5$ при $i = 0, 1, 2$ и $x = 0$ при $i = 3, 4$ остается оптимальной?

4.9. Применить алгоритм итераций по критерию для решения задачи управления запасами при бесконечном плановом периоде. Принять вначале $y_i^{(0)} = 0$. Пусть n' обозначает номер первой итерации, на которой общая стратегия согласуется с оптимальной текущей стратегией, вычисленной в задаче 4.8; прекратить расчеты на итерации $n' + 3$.

Принять: а) $\alpha = 0{,}9$, б) $\alpha = 1/2$, в) $\alpha = 0$.

4.10. Рассмотреть задачу управления запасами при бесконечном периоде. В каждом из приведенных ниже вариантов постановки задачи внести необходимые изменения в исходные данные и определить оптимальную стратегию с помощью алгоритма итераций по стратегиям при $\alpha = 1$:

а) спрос для каждого отрезка равен 2 единицам;

б) спрос для каждого отрезка равен 4 единицам (вместо 3);

г) объем выпуска на отрезке не может превышать 4 единиц (вместо 5);

д) разрешены только объемы выпуска, равные $x = 0, 2, 4$ единицам;

е) объем выпуска на каждом отрезке должен быть не менее единицы;

ж) условно-постоянные затраты на переналадку оборудования составляют 10 единиц (вместо 13);

з) удельная стоимость хранения равна $h = 5$ (вместо 1).

4.11. Пусть в задаче управления запасами при бесконечном плановом периоде разрешается задерживать удовлетворение спроса на срок не более одного отрезка и при этом штраф за задержку удовлетворения единичного спроса на срок в один отрезок равен 10 единицам. Построить сеть, соответствующую данной модели задачи, и определить величины c_{ij}.

4.12. Рассмотрите модель управления запасами, аналогичную приведенной в п. 4.4. Пусть, по-прежнему, спрос $d = 3$, объем выпуска $x \leqslant 5$; уровень запасов на конец периода $j \leqslant 4$. Затраты на производство и содержание запасов описываются функцией $C(x) + hj$, где $h = 1$,

$$C(x) = \begin{cases} 5x & \text{при } x = 0, 1, 2, 3; \\ 12 + x & \text{при } x \geqslant 4. \end{cases}$$

а) Применить алгоритм итераций по стратегиям для нахождения оптимальной стратегии при $\alpha = 1$;

б) Применить алгоритм итераций по стратегиям для нахождения оптимальной стратегии при $\alpha = 0{,}9$, $\alpha = 0{,}5$ и $\alpha = 0$.

В качестве исходной стратегии используйте оптимальное решение варианта а). Охарактеризуйте влияние выбора α на оптимальную стратегию.

в) Принять $\alpha = 0{,}9$. Примените алгоритм итераций по критерию, начав с $y_i^{(0)} = 0$. Если n' обозначает номер первой итерации, на которой общая стратегия согласуется с оптимальной текущей стратегией, то прекратите расчеты на итерации $n' + 3$.

г) Повторить расчеты по вариантам а), б) и в) при $h = 2$.

4.13. Ответить на вопросы, поставленные в задаче 4.12, приняв, что функция затрат на производство имеет вид

$$C(x) = \begin{cases} 0, & \text{при } x = 0; \\ 3 + 2x, & \text{при } x > 0. \end{cases}$$

4.14. Рассмотрите сеть, изображенную на рис. 4.5. Наличие стрелок на обоих концах дуги означает, что перемещение по дуге разрешено в обоих направлениях и что затраты при этом соответствуют проставленному на дуге числу.

а) Пусть $\alpha = 1$. Составить и решить соответствующие функциональные уравнения методом итераций по стратегиям.

б) Применить метод итераций по стратегиям для нахождения y_i и соответствующей стратегии при $\alpha = 0{,}9$, $\alpha = {}^1/_2$, $\alpha = 0$. Использовать оптимальное решение варианта а) в качестве исходной стратегии.

в) Пусть $\alpha = 0{,}9$. Применить алгоритм итераций по критерию, начав с $y_i^{(0)} = 0$. Если n' — номер первой итерации, на которой общая стратегия согласуется с текущей оптимальной стратегией, то прекратить расчеты на итерации $n' + 3$.

4.15. Рассмотреть сеть, приведенную на рис. 4.6. Ответить на вопросы и выполнить задания, сформулированные в задаче 4.14.

4.16. Производственное объединение выпускает портативные телевизоры. Им разрабатывается дорогостоящая модель телевизора, причем ПО стремится достичь максимума надежности.

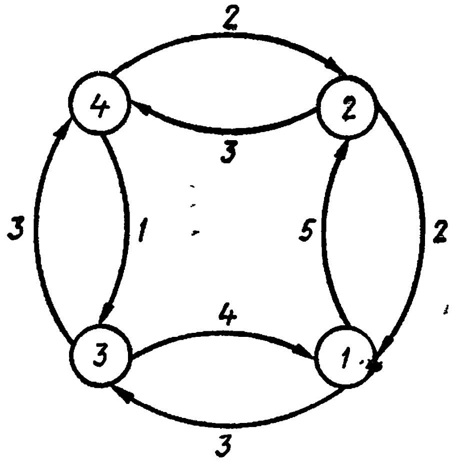

Рис. 4.5

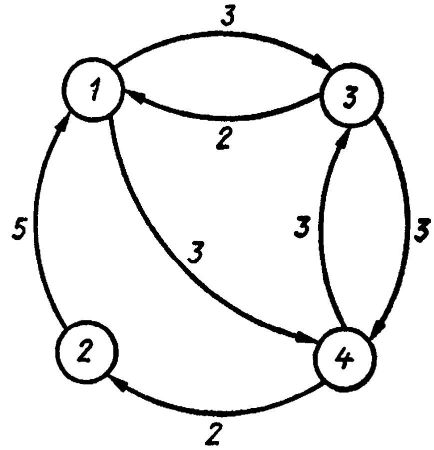

Рис. 4.6

Телевизор содержит N последовательно соединенных блоков, так что отказ любого блока приводит к неисправной работе всего телевизора. Поэтому в конструкцию модели введены избыточные элементы параллельного типа. Обозначим, в частности, через x_n число избыточных параллельных элементов в n-м блоке через $P_n(x)$ — вероятность того, что n-й блок будет исправно функционировать в течение первого года использования телевизора при заданном уровне избыточности x, а через $C_n(x)$ — стоимость изготовления указанного блока.

а) Построить оптимизационную модель, максимизирующую надежность функционирования телевизора в течение одного года при условии, что суммарные затраты на его изготовление не могут превышать C.

б) Показать, как находится решение для построенной вами модели с помощью метода динамического программирования.

в) Применить ваш метод для нахождения оптимального решения при $N = 3$, $C_n(x) = c_n x^2$, $C = 15$, $P_n(x) = 1 - p_n^x$, где $p_1 = 0{,}08$; $p_2 = 0{,}05$, $p_3 = 0{,}1$, $c_1 = 2$, $c_2 = 3$, $c_3 = 1$.

в) Построить оптимизационную модель, минимизирующую затраты на изготовление телевизора при условии, что надежность функционирования телевизора в течение первого года его использования была бы не менее R. Показать, как найти решение для этой модели методом динамического программирования.

4.17. Командир космического корабля и его экипаж планируют полет на одну из удаленных планет для выполнения программы исследования. Они должны взять с собой N различных типов электронных приборов, которые могут выходить из строя. Каждая единица оборудования i весит w_i кг, суммарный вес ограничен и не должен превышать W кг. Это значение W является достаточно большим, что позволяет взять на борт космического корабля некоторое количество запасного оборудования. Обозначим через $p_i(t)$ распределение вероятностей для числа интервалов времени t, в течение которых единица оборудования i нормально функционирует. Пусть x_i — число запасных единиц оборудования i, находящихся на борту космического корабля. Как только запас какого-либо типа оборудования истощится полностью (т. е. когда для любого типа i величина x_i станет равной нулю), космический корабль должен будет вернуться на Землю.

а) Разработать модель динамического программирования (ДП), позволяющую определить такие значения x_i, при которых максимизируется математическое ожидание времени пребывания космического корабля на планете. (Примечание. В процессе выполнения программы исследований непрерывно функционируют все N типов оборудования.)

б) Предложить модель ДП, позволяющую определить такие значения x_i, при которых максимизируется вероятность того, что космические исследования на планете будут проводиться, по крайней мере, в течение T интервалов.

в) Показать, как видоизменяются модели, построенные в соответствии с пп. а) и б), если единица оборудования стоит c_i, а суммарные затраты на оборудование ограничены и не могут превышать C ед.

4.18. Фирма «Скороход» располагает парком малогабаритных грузовых автомобилей, которые совершают рейсы в ряд населенных пунктов и доставляют продукты непосредственно покупателям. Предположим, что имеется I видов продуктов и единица веса продукта i $(i = \overline{1, I})$ занимает в грузовике объем c_i (м³). Полезный объем в грузовике равен C (м³). Допустим, что спрос q_i на продукт i описывается непрерывным равномерным распределением с плотностью

$$p_i(q_i) = \begin{cases} \dfrac{1}{b_i}, & 0 \leqslant q_i \leqslant b_i, \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases}$$

Обозначим через x_i число единиц продукта i, погруженного в рассматриваемый грузовик. Пусть все продукты продаются по одной цене. Требуется определить такие значения x_i, при которых минимизируется математическое ожидание неудовлетворенного спроса за 1 рейс.

а) Построить математическую модель данной задачи и показать, как она может быть решена методом динамического программирования.

б) Решить указанную задачу предложенным вами методом при следующих исходных данных:
$I = 4$, $c_1 = 1$, $c_2 = 5/3$; $c_3 = 3$, $c_4 = 10.3$; $C = 5$, 15, 75; $b_1 = 20$, $b_2 = 24$, $b_3 = 25$, $b_4 = 27$.

4.5. ДИНАМИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ НА МАРКОВСКИХ ЦЕПЯХ

Ранее были рассмотрены многошаговые задачи оптимального принятия решений в детерминированных моделях, когда имеется взаимооднозначное соответствие между принимаемым решением и последующим состоянием системы.

Вместе с тем, на практике зачастую приходится сталкиваться с процессами (системами), в которых нет такой однозначной зависимости между принятым решением d и его результатом, а можно говорить лишь о вероятностях перехода в то или иное состояние. Такие системы являются вероятностными. Важный класс вероятностных систем составляют так называемые марковские системы (цепи), свойства которых в любой момент времени t зависят только от текущего состояния i и не зависят от предыстории процесса.

Динамическое программирование является весьма эффективным аппаратом оптимизации функционирования систем, описываемых марковскими процессами

Свойства марковской системы. Функциональные уравнения Беллмана

Пусть имеется некоторая система, которая может находиться в одном из i состояний: $i = 1, 2, \ldots, N$. Имеется некоторое множество решений $D = \{d\}$, которые могут приниматься в каждом из состояний i, задана матрица условных вероятностей $P = \| p(j/i, d) \|$, где $p(j/i, d)$, $j = \overline{1, N}$, $i = \overline{1, N}$, $d \in D$ есть условная вероятность того, что система перейдет в состояние j, если текущим состоянием было i и принималось решение d.

При этом, в силу свойства марковости, постулируется, что величины $p(j/i, d)$ зависят только от значения текущего состояния i, а не от предыстории процесса, т. е. траектории, которая привела в состояние i.

Допустим, что вероятности пребывания системы в каждом состоянии i в начальный момент времени равны $q_i(0)$, $i = \overline{1, N}$. Тогда закон движения марковской системы полностью определяется величинами $q_i(0)$ и матрицей условных вероятностей $\| p(j/i, d) \|$. Если $q_i(n)$ — вероятность пребывания системы в состоянии i на n-м отрезке, то

$$q_j(n+1) = \sum_{i=1}^{N} q_i(n)\, p(j/i, d), \quad n = 0, 1, 2, 3 \ldots \tag{4.5.1}$$

Допустим, что при $n \to \infty$ величины $q_i(n)$ стремятся к некоторым предельным значениям q_i, называемым предельными (или стационарными) вероятностями состояний. Каждая величина q_i представляет собой установившуюся относительную частоту пребывания системы в состоянии i.

Величины q_i могут быть получены из (4.5.1), если устремить $n \to \infty$.

$$q_j = \sum_{i=1}^{N} q_i p(j/i, d), \tag{4.5.2}$$

при условии

$$\sum_{j=1}^{N} q_j = 1.$$

Система называется *эргодической*, если величины q_j не зависят от распределения начальных вероятностей $q_i(0)$.

Обозначим через $c(j/i, d)$ условный эффект (или затраты), определяемый переходом системы из состояния i в состояние j при условии выбора решения d.

Описанную систему удобно представить в виде сетевой модели, где каждой дуге (i, j) соответствует пара величин: $\{p(j/i, d); c(j/i, d)\}$.

Пусть каждый переход совершается за 1 отрезок времени, система функционирует неограниченно долго, а в качестве критерия используются, как обычно, интегральные дисконтированные затраты (ИДЗ). Обозначим через y_i ИДЗ, если текущим состоянием системы является состояние i. Если в этот момент принимается решение d, то справедливо соотношение

$$y_{id} = \sum_{j=1}^{N} p(j/i, d)[\alpha y_j + c(j/i, d)] = \sum_{j=1}^{N} p(j/i, d)\alpha y_j + c_{id}, \qquad (4.5.3)$$

где α — коэффициент дисконтирования ($0 \leqslant \alpha < 1$); c_{id} — ожидаемый эффект на рассматриваемом отрезке для начального состояния i при решении d. Допустим, что система функционирует оптимальным образом, т. е. на каждом шаге принимается оптимальное решение, а период функционирования — бесконечен. Тогда справедлива следующая система функциональных уравнений Беллмана для марковской цепи, которая является естественным обобщением функциональных уравнений (4.3.1) для детерминированного случая

$$y_i = \min_{d \in D(i)} \sum_{j=1}^{N} p(j/i, d)\alpha y_j + c_{id} \text{ для всех } i = \overline{1, N}, \qquad (4.5.4)$$

где $D(i)$ — множество возможных решений в состоянии i.

Под оптимальной стратегией будем, как и ранее, понимать стратегию, обеспечивающую минимально достигаемые ИДЗ при всех возможных начальных состояниях. Такая стратегия не обязательно должна быть стационарной (т. е. такой, что одно и то же решение d следует принимать всякий раз, когда система оказывается в состоянии i). Вместе с тем справедлива следующая теорема о стационарной стратегии.

Теорема 4.2. *Всегда существуют единственные конечные значения* y_i, *удовлетворяющие экстремальным уравнениям* (4.5.4), *и детерминированная стационарная стратегия, соответствующая этим значениям* y_i, *которая является оптимальной.*

Методы последовательных приближений

Метод итераций по критерию

Для решения функциональных уравнений (4.5.4) можно применить метод последовательных приближений в функциональном пространстве (метод итераций по критерию).

Шаг 1. Выберем $y_i^{(0)}$ произвольным образом и положим $n = 0$.

Шаг 2. Определим $y_i^{(n+1)}$ из условия

$$y_i^{(n+1)} = \min_{d \in D(i)} \left[\sum_{\forall j} p(j/i, d)\alpha y_j^{(n)} + c_{id}\right] \text{ для каждого } i. \qquad (4.5.5)$$

Шаг 3. Если $y_i^{(n+1)} < y_i^{(n)}$, то переходим к шагу 2, приняв $n = n + 1$; если для всех i $y_i^{(n+1)} = y_i^{(n)}$, то конец. Получим $y_i^{(n+1)} = y_i$.

Заметим, что каждая величина $y_i^{(n)}$ будет сходиться к пределу, удовлетворяющему экстремальным уравнениям (4.5.4), но в общем случае эта сходимость не является конечной. Если все величины $c_{id} \geqslant 0$, а все $y_i^{(0)} = 0$, то значения $y_i^{(n)}$ возрастают монотонно.

При любом c_{id} можно добиться сходимости следующим образом. Выберем пробную стационарную стратегию, в которой для упрощения записи любое из решений обозначим через d'. Решаем далее систему линейных уравнений относительно неизвестных y_i:

$$y_i - \sum_{\forall j} p(j/i, d')\alpha y_j = c_{id'} \text{ для каждого } i. \qquad (4.5.6)$$

Найденные при этом решения $y_i^{(0)}$ затем подставляются в соотношение (4.5.5). Если на произвольно выбранной итерации n прекратить вычисления и использовать непосредственно следующую из (4.5.5) оптимальную стратегию в качестве стационарной для модели с бесконечным плановым периодом, то соответствующие ожидаемые значения ИДЗ не будут превосходить значения $y_i^{(n)}$ из (4.5.5).

Метод итераций по стратегиям

Для решения уравнений (4.5.4) можно применить также и метод последовательных приближений в пространстве стратегий, который состоит из следующих шагов.

Шаг 1. Выбрать произвольную начальную стратегию и принять $n = 0$.

Шаг 2. При заданной пробной стратегии d' вычислить значения $y_i^{(n)}$ по уравнениям

$$y_i^{(n)} - \sum_j p(j/i,\ d')\,\alpha y_j^{(n)} = c_{id'} \text{ для каждого } i, \tag{4.5.7}$$

где d' обозначает решение, принимаемое в узле i.

Шаг 3. Проверка возможности улучшения стратегии. Вычисляем

$$\min_{d \in D(i)} \left[\sum_j p(j/i,\ d)\,\alpha y_j^{(n)} + c_{id}\right] \equiv Y_i^{(n)} \text{ для каждого } i. \tag{4.5.8}$$

Шаг 4. Прекратить вычисления, если $Y_i^{(n)} = y_i^{(n)}$ для всех i. В противном случае изменить стратегию в каждом узле k, где $Y_k^{(n)} < y_k^{(n)}$, используя то решение, которое дает $Y_k^{(n)}$ в (4.5.8).

Принять $n = n + 1$ и вернуться к шагу 2, используя новую пробную стратегию.

Алгоритм итераций по стратегиям обладает следующими важными свойствами:

1) $y_i^{(n+1)} \leqslant y_i^{(n)}$ в любом узле i и $y_k^{(n+1)} < y_k^{(n)}$, если $Y_k^{(n)} < y_k^{(n)}$.

2) Алгоритм сходится за конечное число итераций.

3) При остановке алгоритма стратегия, определяющая величины $Y_i^{(n)}$, является оптимальной.

Пример 4.5. Для иллюстрации применения функциональных уравнений (4.5.5) рассмотрим стохастическую задачу управления запасами с бесконечным плановым периодом, детерминированный вариант которой описан в п. 4.5. Числовые данные этой задачи таковы: спрос вероятностный $p\ (d = 2) = \frac{1}{2}$; $p\ (d = 4) = \frac{1}{2}$; объем производства x ограничен $0 \leqslant x \leqslant 5$; конечный уровень запаса $j \leqslant 4$; затраты на производства и хранение продукции описываются соотношением: $g\ (x,\ j) = C\ (x) + hj$, где

$$C(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x = 0, \\ 13 + 2x, & \text{если } x > 0; \end{cases}$$

$$h = 1.$$

Текущее состояние системы i определяется величиной текущего запаса ($i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4$). Очевидно, если объем производства равен x, то будущие состояния системы с учетом вероятностей спроса ($d = 2$ и $d = 4$) таковы: $j = i + x - 2$ и $j = i + x - 4$, причем $P\ (i + x - 2/i) = P\ (i + x - 4/i) = \frac{1}{2}$. Пусть $f\ (i)$ — минимальные ИДЗ для этой задачи при условии, что начальный запас равен i. Тогда функциональное уравнение типа (4.5.4) для нее будет иметь следующий вид:

$$f(i) = \min_x \left\{ C(x) + 1\,[i + x - 3] + \alpha \frac{1}{2}\,[f(i + x - 2) + \right.$$
$$\left. + f(i + x - 4)] \right\} \qquad (4.5.8)$$

при $i = 0, 1, 2, 3, 4$; $0 < \alpha < 1$, где минимум отыскивается по всем целым x, удовлетворяющим условию

$$4 - i \leqslant x \leqslant \min(5;\ 6 - i).$$

Таблица 4.12

i	$d \in D(i)$	$p(j/i, d)$					c_{id}
		0	1	2	3	4	
0	4	$^1/_2$		$^1/_2$			22
	5		$^1/_2$		$^1/_2$		25
1	3	$^1/_2$		$^1/_2$			20
	4		$^1/_2$		$^1/_2$		23
	5			$^1/_2$		$^1/_2$	26
2	2	$^1/_2$		$^1/_2$			18
	3		$^1/_2$		$^1/_2$		21
	4			$^1/_2$		$^1/_2$	24
3	1	$^1/_2$		$^1/_2$			16
	2		$^1/_2$		$^1/_2$		19
	3			$^1/_2$		$^1/_2$	22
4	0	$^1/_2$		$^1/_2$			1
	1		$^1/_2$		$^1/_2$		17
	2			$^1/_2$		$^1/_2$	20

Исходные данные задачи могут быть представлены в виде табл. 4.12.

Будем решать задачу методом итераций по критерию (при $\alpha = 0{,}9$), начав с $y_i^{(0)} = 0$ для всех i.

Результаты последовательных итераций приводятся в табл. 4.13.

Рассмотрим теперь решение этой задачи управления запасами методом итераций по стратегиям.

В качестве пробной стратегии выберем следующую:

$$x = 4 - i; \quad i = 0, 1, 2, 3, 4; \quad n = 0.$$

1. Составим соответствующую данной стратегии систему уравнений для определения величин y_i, для чего используем данные табл. 4.12:

$$(1 - 0{,}5\alpha)\, y_0 - 0{,}5\alpha y_2 = 22;$$
$$-0{,}5\alpha y_0 + 1 y_1 - 0{,}5\alpha y_2 = 20;$$
$$-0{,}5\alpha y_0 + (1 - 0{,}5\alpha)\, y_2 = 18;$$
$$-0{,}5\alpha y_0 - 0{,}5 y_2 + 1 y_3 = 16;$$
$$-0{,}5\alpha y_0 - 0{,}5\alpha y_2 + 1 y_4 = 1,$$

где $\alpha = 0.9$.

Ее решением является

$$y_0 = 202, \quad y_1 = 200, \quad y_2 = 189, \quad y_3 = 196, \quad y_4 = 181.$$

2. Переходим к процедуре улучшения стратегии, для чего используем уравнения (4.5.8).

Таблица 4.13

Начальный уровень запасов	$n=1$		$n=2$		$n=3$		y_i^{10}	y_i^{20}	y_i^{30}	Бесконечный период	
	$x^*(i)$	y_i^1	$x^*(i)$	y_i^2	$x^*(i)$	y_i^3				$x_i(\infty)$	y_i
0	4	22	4	40	5	54.3	122.9	163.8	178.0	5	185.7
1	3	20	5	34.5	5	49.2	117.8	158.7	173.0	5	180.6
2	2	18	4	32.5	4	47.2	115.8	156.7	171	4	178.6
3	1	16	3	30.5	3	45.2	113.8	154.7	169	3	176.6
4	0	1	0	19	0	33.6	102.1	143.0	157.3	0	164.9

Таблица 4.14

Начальный уровень запасов	$n=0$		$n=1$		$n=2$		$Y_i^{(2)}$
	$x^0(i)$	$y_i^{(0)}$	$x^1(i)$	$y_i^{(1)}$	$x^2(i)$	$y_i^{(2)}$	
0	4	202	4	202	5	185.7	185.7
1	3	200	5	196.5	5	180.6	180.6
2	2	189	4	194.6	4	178.6	178.6
3	1	196	3	192.6	3	176.6	176.6
4	0	181	0	181	0	164.9	164.9

Результаты последовательных итераций приведены в табл. 4.14. Как видим, процесс вычислений прекращается при $n = 2$, поскольку $y_i^{(2)} = Y_i^{(2)}$ для всех i, а соответствующая стратегия $x^{(2)}(i)$ является оптимальной, что совпадает с решением, полученным методом итераций по критерию.

Оптимизация сети по критерию эквивалентного среднего эффекта ($\alpha = 1$)

Вывод функциональных уравнений

Рассмотрим теперь практически важный случай, когда в качестве критерия оптимальности используется средний эффект, и выведем соответствующие функциональные уравнения (аналогично детерминированной модели в п. 4.4).

Пусть имеется некоторая стратегия π^* (не обязательно детерминированная) и минимальные ИДЗ для системы, начинающей функционировать с состояния i, обозначим через $y_i(\alpha)$, где α рассматривается, как параметр. Стратегия π^* определяется, как оптимальная при $\alpha = 1$, если $y_i^*(\alpha) = y_i(\alpha)$ при каждом i и при всех α, достаточно близких к 1.

Иными словами, стратегия π^* оптимальная, если существует такое $\alpha^* < 1$, что при всех α, лежащих на отрезке $\alpha^* \leqslant \alpha < 1$, ожидаемый интегральный дисконтированный эффект $y_i^*(\alpha)$ при выборе стратегии π^* равен минимально возможному.

Здесь, как и в случае $\alpha < 1$, справедлива теорема о стационарной стратегии, утверждающая, что и при $\alpha = 1$ всегда существует детерминированная стационарная стратегия, являющаяся оптимальной.

Итак, предположим, что детерминированная стационарная стратегия π^* является оптимальной. Тогда по определению при значении α, достаточно близком к 1, имеем

$$y_i = \min_{d \in D(i)} \left[\sum_{j=1}^{N} p(j/i, d)\, \alpha y_j + c_{id} \right] = \sum_{j=1}^{N} p(j/i, d^*)\, \alpha y_j + c_{id}^*, \quad (4.5.9)$$

где d^* обозначает решение в состоянии i, определяемое стратегией π^*. Примем далее, что

$$c^* = \sum_{i=1}^{N} q_i^* c_{id^*}, \quad (4.5.10)$$

где q_i^* — предельные (стационарные) вероятности состояний (i), рассчитанные по уравнениям вида (4.5.2) для стратегии π^*. Величину c^* можно интерпретировать как ожидаемый средний эффект (или затраты) за отрезок при использовании стратегии π^* и бесконечном периоде функционирования.

Для вывода функциональных уравнений для вероятностной модели при $\alpha = 1$ используется тот же подход, что и в детерминированном случае (п. 4.3).

Рассмотрим ожидаемый ЭСЭ $(1-\alpha)\; y_i$ и определим величины весов состояний w_i с помощью соотношения

$$(1-\alpha)\, y_i \equiv (1-\alpha)\, w_i + c^* \text{ для всех } i. \quad (4.5.11)$$

Тогда функциональные уравнения (4.5.9) можно переписать в виде

$$w_i + \frac{c^*}{1-\alpha} = \min_{d \in D(i)} \left[\sum_{i=1}^{N} p(j/i, d)\, \alpha \left(w_j + \frac{c^*}{1-\alpha^*} \right) + c_{id} \right]. \quad (4.5.12)$$

С учетом того что $\sum_{j=1}^{N} p(j/i, d) = 1$, после несложных преобразований уравнения (4.5.12) при $\alpha = 1$ приводятся к виду

$$w_i + c^* = \min_{d \in D(i)} \left[\sum_{j=1}^{N} p(j/i, d)\, w_j + c_{id} \right] \text{ для всех } i. \quad (4.5.13)$$

Уравнения (4.5.13) представляют собой экстремальные уравнения для марковской системы при критерии минимума средних затрат за отрезок. Как и в детерминированном случае, величина w_i называется весом i-го состояния, а разность $w_i - w_j$ можно рассматривать как приращение ожидаемого эффекта, если система начинает функционировать с состояния i, а не j.

Если множество величин w_i^* удовлетворяет системе уравнений (4.5.13), то и множество величин $w_i^* + k$ (где k — произвольная константа) будет также удовлетворять этой системе. Поэтому для определения искомых значений w, вводится условие нормировки вида $w_0 = 0$.

Рассмотрим некоторую стационарную стратегию π', включающую решения d'. Пусть w_i' и c_i' являются решениями уравнений:

$$w_1' = 0,$$

$$w_1' + c' = \sum_{j=1}^{N} p(j/i, d')\, w_j' + c_{id'} \text{ для всех } i. \quad (4.5.14)$$

Справедливо следующее утверждение (достаточные условия оптимальности):

1) при заданной детерминированной стационарной стратегии в случае, когда величины w_i' и c' из (4.5.14) удовлетворяют функциональным уравнениям (4.5.13), величина c' является наименьшей по всем стратегиям, а соответствующая ей стратегия π' является оптимальной;

2) если величина c' не является наименьшей, то решения w_i' и c' из (4.5.14) не удовлетворяют экстремальным уравнениям (4.5.13). Таким образом, для определения оптимальной стратегии, минимизирующей c, необходимо решить систему уравнений (4.5.13).

Метод итераций по стратегиям

Рассмотрим метод итераций по стратегиям для определения решения функциональных уравнений вида (4.5.13). Этот метод является естественным обобщением метода для детерминированного случая.

Для упрощения изложения допустим, что для каждой пробной стратегии π', оцениваемой на шаге 2 алгоритма, существуют единственные стационарные вероятности.

Алгоритм включает следующие шаги:

Шаг 1. Выбрать произвольную стационарную стратегию и положить $n = 0$.

Шаг 2. При заданной пробной стратегии π' на итерации n решить систему уравнений для определения весов:

$$w_0^{(n)} = 0,$$

$$w_i^{(n)} + c^{(n)} = \sum_{j=1}^{N} p(j/i,\ d')\, w_j^{(n)} + c_{id'} \quad \text{для всех } i, \qquad (4.5.15)$$

где d' — решение в узле i, определяемое пробной стратегией.

Шаг 3. Вычислить

$$W_i^{(n)} = \min_{d \in D(i)} \left[\sum_{j=1}^{N} p(j/i,\ d)\, w_j^{(n)} + c_{id} \right] - c^{(n)} \quad \text{для всех } i. \qquad (4.5.16)$$

Шаг 4. Прекратить вычисления, если $W_i^{(n)} = w_i^{(n)}$ для всех i, при этом значение $c^{(n)}$ — минимально. В противном случае изменить стратегию в каждом узле k, где $W_k^{(n)} < w_k^{(n)}$, используя то решение d, которое дает $W_k^{(n)}$ в уравнении (4.5.16). Перейти от n к $n + 1$ и вернуться к шагу 2 при новой пробной стратегии.

Описанный алгоритм сходится за конечное число итераций.

Пример 4.6.

Рассмотрим вновь стохастическую задачу управления запасами, исходные данные для которой приведены в табл. 4.12.

В качестве критерия оптимальности примем минимум средних затрат за отрезок c^*. Для отыскания оптимальной стратегии применим метод итераций по стратегиям.

Запишем систему функциональных уравнений для этой задачи:

$$w_i + c^* = \min_x \left\{ C(x) + 1\,[i + x - 3] + \frac{1}{2}\,[w_{i+x-2} + w_{i+x-4}] \right\}. \qquad (4.5.17)$$

В качестве пробной стратегии выберем стратегию выпуска минимально допустимого объема партии:

$$x = 4 - i \quad \text{для } i = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ 4.$$

2. Составляем систему уравнений для определения весов:

$$i=0:\quad w_0+c^*=C(4)+1[1]+\frac{1}{2}w_0+$$

$$+\frac{1}{2}w_2=22+\frac{1}{2}w_0+\frac{1}{2}w_2;$$

$$i=1:\quad w_1+c^*=20+\frac{1}{2}w_0+\frac{1}{2}w_2;$$

$$i=2:\quad w_2+c^*=18+\frac{1}{2}w_0+\frac{1}{2}w_2;$$

$$i=3:\quad w_3+c^*=16+\frac{1}{2}w_0+\frac{1}{2}w_2;$$

$$i=4:\quad w_4+c^*=1+\frac{1}{2}w_0+\frac{1}{2}w_2;$$

$$w_0=0.$$

Находим решение этой системы:

$$w_0^{(0)}=20,\quad w_1^{(0)}=-2,\quad w_2^{(0)}=-4,\quad w_3^{(0)}=-6,\quad w_4^{(0)}=-21,$$

$$c_0=20.$$

Таблица 4.15

Начальный запас	$n=0$			$n=1$			$n=2$		
	$x^0(i)$	$w_i^{(0)}$	$W_i^{(0)}$	$x^1(i)$	$w_i^{(1)}$	$W_i^{(1)}$	$x^2(i)$	$w_i^{(2)}$	$W_i^{(2)}$
0	4	4	0	4	0	$-1^1/_4$	5	0	0
1	3	-2	$-6^1/_2$	5	$-6^1/_2$	$-6^1/_2$	5	$-5^3/_7$	$-5^3/_7$
2	2	-4	$-8^1/_2$	4	$-8^1/_2$	$-8^1/_2$	4	$-7^3/_7$	$-7^3/_7$
3	1	-6	$-10^1/_2$	3	$-10^1/_2$	$-10^1/_2$	3	$-9^3/_7$	$-9^3/_7$
4	0	-21	-21	0	-21	-21	0	$-20^2/_7$	$-20^2/_7$
c^n		20			$17^3/_4$			$17^4/_7$	

Переходим к процедуре улучшения весов (шаг 3) и вычисляем $W_i^{(0)}$.

Результаты этого шага и последующих итераций приведены в табл. 4.15.

Как видно, алгоритм сходится на итерации $n=2$.

Искомая оптимальная стратегия равна

$$x(0)=5,\quad x(1)=5,\quad x(2)=4,\quad x(3)=3,\quad x(4)=0,$$

а оптимальное решение системы уравнений (4.5.18):

$$c^*=17^4/_7,\quad w_1=-5^3/_7,\quad w_2=-7^3/_7,\quad w_3=-9^3/_7,$$

$$w_4=-20^2/_7,\quad w_0=0.$$

Рассмотрим теперь рекуррентное соотношение вида (4.5.9) для конечного планового периода. Можно показать, что при достаточно больших n значение функции $f_n(i)$ затрат за n отрезков при начальном состоянии i связано с величиной минимальных средних затрат за отрезок c^* соотношением

$$f_n(i) \approx nc^* + w_i. \qquad (4.5.18)$$

Используя условие нормировки $w_0 = 0$, получим из (4.5.18)

$$f_n(i) - f_n(0) \approx w_i - w_0 = w_i.$$

Задачи и упражнения

Решить следующие стохастические задачи марковского типа, используя метод динамического программирования.

4.19. В каждом из указанных ниже пунктов приведено некоторое изменение допущений, положенных в основу стохастической модели управления запасами, описанной в п. 4.5. Укажите, какие изменения нужно внести в табл. 4.12 в соответствии с каждым конкретным изменением:

а) функция затрат на содержание запасов имеет вид $(i + x - d)^2$, где d — уровень спроса;

б) вероятность того, что уровень спроса равен 2, 3 или 4, составляет $^1/_3$ для каждого значения спроса;

в) максимальный объем производства равен 6, где $C(6) = 25$;

г) максимальный начальный уровень запаса равен не 4, а 5;

д) максимальный начальный уровень запаса равен 5 и в стратегии принять: $x = 0$, если $i = 5$.

Записать матрицу вероятностей переходов, аналогичную той, которая приведена в табл. 4.12.

4.20. Рассмотреть стохастическую модель управления запасами, описанную в п. 4.5.

а) Выполнить шаги алгоритма итераций по критерию и проверить значения величин, стоящих в табл. 4.12, при $n = 1, 2, 3$.

б) Объяснить, почему при $i = 1, 2, 3$ значения $y_i^{(n)}$ в табл. 4.13 различаются на 2.

в) Записать функциональные уравнения для оптимальной стратегии при бесконечном плановом периоде ($\alpha = 0.5$) и найти минимальные значения y_i, а также оптимальную стратегию $x_{\text{opt}}(i)$, объяснить, почему значения величин $x_{\text{opt}}(i)$ уменьшаются при уменьшении α.

4.21. Сравнить алгоритм итераций по стратегиям при $\alpha = 1$; изложенный в п. 4.5, с аналогичным методом решения детерминированных задач, приведенным в п. 4.3. В чем эти алгоритмы совпадают и чем они отличаются друг от друга?

Сравнить объемы вычислений и свойства сходимости для этих алгоритмов.

4.22. Рассмотреть стохастическую задачу управления запасами, приведенную в п. 4.5. Допустим, что распределение спроса меняется от отрезка к отрезку следующим образом:

$$p(d = 2) = \frac{1}{2}; \quad p(d = 4) = \frac{1}{2} \text{ отрезок } t;$$

$$p(d = 1) = \frac{1}{3}; \quad p(d = 4) = \frac{2}{3} \text{ отрезок } t + 1.$$

а) Показать, как нужно изменить при этих условиях рекуррентное соотношение (4.5.4).

б) При $\alpha = 1$ составить соответствующие экстремальные уравнения и найти оптимальную стратегию.

4.23. Предположим, что в стохастической задаче управления запасами спрос на продукцию имеет место не на каждом отрезке. В частности, примем, что при наличии спроса на отрезке t следующий спрос на продукцию возникает на отрезке $t + s$, где $s = 1, 2, 3$ с вероятностью $q_s = 1/3$.

Таблица 4.16

Объем продаж предыдущей недели	Вероятность объема продаж текущей недели					
	Краткая реклама *L*			Подробная реклама *H*		
	B	*A*	*C*	*B*	*A*	*C*
B	0.2	0.5	0.3	0.6	0.3	0.1
A	0	0.6	0.4	0.4	0.5	0.1
C	0	0.3	0.7	0.2	0.7	0.1

а) Изменить соответствующим образом рекуррентное соотношение (4.5.4) ($\alpha < 1$).

б) Выведите соответствующие функциональные уравнения при $\alpha = 1$ и найдите оптимальную стратегию при бесконечном плановом периоде.

4.24. Директору одного универмага нужно принять решение о том, какого вида рекламное объявление целесообразно поместить в местной газете. В частности, он может выбрать краткую рекламу (L) и подробную рекламу (H). Еженедельные объемы продаж директор разделяет на 3 группы: средний объем (A), выше среднего (B) и ниже среднего (C), считая, что объем продаж рассматриваемой недели зависит в вероятностном смысле как от объема продаж предыдущей недели, так и от категории рекламы.

Он пользуется следующими данными о вероятностях объема продаж текущей недели, приведенными в табл. 4.16. Так, например, если объем продаж предыдущей недели относится к группе A, а используется подробная реклама (H), то с вероятностью 0,4 объем продаж текущей недели относится к группе B, с вероятностью 0.5 — к группе A и с вероятностью 0.1 — к группе C.

Предположим, что краткая реклама стоит 1000 руб., а подробная — 3000 руб. и недельная прибыль (без учета затрат на рекламу) при объеме продаж B составит 12 тыс. руб., при объеме A — 10 тыс. руб. и при объеме C — 8 тыс. руб.

а) Определить оптимальную стратегию рекламы, максимизирующую чистую еженедельную прибыль на бесконечном плановом периоде.

б) В каком диапазоне изменения затрат на рекламу типа L остается оптимальной стратегия, найденная в п. а).

в) В каком диапазоне изменения недельной прибыли при объеме продаж B остается оптимальной стратегия, найденная в п. а).

Тот же вопрос относится к объемам продаж групп A и C.

г) Пусть p_1 обозначает вероятность того, что объем продаж текущей недели составляет B, а p_2 — вероятность того, что он составляет A единиц при условии, что объем продаж предыдущей недели равнялся A и уровень рекламы на той же неделе был равен H, где $p_1 + p_2 = 0{,}9$.

Каков диапазон изменения p_1 в пределах которого стратегия, найденная в п. а), остается оптимальной?

Глава 5

СТОХАСТИЧЕСКОЕ ПРОГРАММИРОВАНИЕ

5.1. ОДНОЭТАПНЫЕ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

В стохастическом программировании рассматриваются проблемы принятия оптимальных решений в условиях риска и неопределенности, при необходимости учета воздействия случайных факторов.

Рассмотрим типичную задачу нелинейного программирования:

найти такое решение X, для которого

$$f(\mathbf{X}) \to \min \tag{5.1.1}$$

при ограничениях

$$g_i(\mathbf{X}) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m}; \tag{5.1.2}$$

$$\mathbf{X} \in \mathfrak{X}. \tag{5.1.3}$$

Задачи стохастического программирования возникают в случаях, когда функции $f(\mathbf{X})$ и $g_i(\mathbf{X})$ зависят также от случайных параметров ω. При этом предполагается, что w является элементом пространства состояний природы (или пространства случайных параметров) Ω. Тогда задачу стохастического программирования можно сформулировать так:

$$f(\mathbf{X}, \omega) \to \min \tag{5.1.4}$$

при условиях

$$g_i(\mathbf{X}, \omega) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m}; \tag{5.1.5}$$

$$\mathbf{X} \in \mathfrak{X}. \tag{5.1.6}$$

Постановки задач стохастического программирования существенно зависят от того, есть ли возможность при выборе решений уточнить состояние природы путем некоторых наблюдений или нет. В связи с этим различают задачи оперативного и перспективного стохастического программирования [4, 5, 7].

В задачах оперативного стохастического программирования решение X принимается после некоторого эксперимента над состоянием природы w, зависит от результатов эксперимента и является случайным вектором $\mathbf{X} = \mathbf{X}(\omega)$. Такие задачи возникают, например, в оперативном технико-экономическом планировании, медицинской диагностике и т. п.

В задачах перспективного стохастического программирования решение X принимается до проведения каких-либо наблюдений над состоянием природы и поэтому является детерминированным. Такие задачи возникают в перспективном технико-экономическом планировании, в задачах проектирования, когда параметры системы должны быть выбраны вполне конкретными детерминированными величинами в расчете на определенный диапазон возмущений.

Задачи стохастического программирования обычно задаются в одной из следующих форм:

$$\text{а) найти } \min M_{\omega}\{f(\mathbf{X}, \omega)\} = F(\mathbf{X}) \tag{5.1.7}$$

при условиях

$$M_\omega \{g_i \underset{X \in \mathfrak{X}}{(X, \omega)}\} = G_i(X) \leqslant 0, \quad i = \overline{1, m}, \tag{5.1.8}$$

где M_ω — операция математического ожидания;

$$\text{б) найти } \min P\{f(X, \omega) \geqslant a\} \tag{5.1.9}$$

при условиях

$$P\{g_i(X, \omega) \leqslant 0\} \geqslant p_i, \quad i = \overline{1, m}, \tag{5.1.10}$$

где a и p_i — некоторые вещественные числа; P — вероятность.
Очевидно, возможны и некоторые комбинации задач (5.1.7), (5. (5.1.9), (5.1.10).
Например, найти минимум (5.1.7) при условиях (5.1.10) или минимум (5.1.9) при условиях (5.1.8) и т. д. Несмотря на кажущееся различие в постановках задач (5.1.7—5.1.8) и (5.1.9—5.1.10) они могут быть сведены к некоторой общей формулировке, например, вида (5.1.7) — (5.1.8). Для этого необходимо ввести характеристические функции:

$$h_0(X, w) = \begin{cases} 1, & \text{если } f(X, \omega) \geqslant a, \\ 0 & \text{в противном случае;} \end{cases} \tag{5.1.11}$$

$$h_i(X, \omega) = \begin{cases} 1, & \text{если } g_i(X, \omega) \leqslant 0, \\ 0 & \text{в противном случае,} \end{cases} \tag{5.1.12}$$

для которых

$$M_\omega\{h_0(X, \omega)\} = P\{f(X, \omega) \geqslant a\}, \quad M\{h_i(X, \omega)\} = P\{g_i(X, \omega) \leqslant 0\}.$$

Задача (5.1.9) — (5.1.10) тогда приводится к виду:

$$\text{найти } \min M_\omega h_0(X, \omega) \tag{5.1.13}$$

при условиях

$$M_\omega h_i(X, \omega) \geqslant p_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{5.1.14}$$

Существуют 2 основных подхода к решению задач стохастического программирования:

1) непрямые методы, которые заключаются в нахождении функций F (X) и G_i (X) и решении эквивалентной детерминированной задачи НП вида (5.1.7) — (5.1.8). Заметим, что подобный подход применим лишь в ограниченном числе случаев;

2) прямые методы стохастического программирования, основанные на информации о значениях функций f (X, w), g_i (X, w) в результате реализаций экспериментов.

К одноэтапным задачам стохастического программирования относятся задачи, в которых решения принимаются на основе известных стохастических характеристик распределения случайных параметров условий задачи до наблюдения за реализациями текущих значений этих параметров. При этом должно приниматься некоторое наилучшее в среднестатистическом смысле решение.

Постановки задач стохастического программирования различаются по трем признакам:

1) по характеру решений; 2) по выбору показателя качества решения; 3) по способу расчленения ограничений задачи.

В качестве условий функции задачи стохастического программирования с вероятностными ограничениями обычно принимают такие функционалы, как математическое ожидание, или дисперсию целевой функции, или вероятность превышения ею некоторого порога.

Задачи с целевой функцией вида M (C^TX) называют M-моделями, задачи, в которых требуется минимизировать величину дисперсии M $(C^TX - \overline{C}^TX)^2$, называют V-моделями, а стохастические задачи, в которых максимизируется вероятность $P\{C^TX \geqslant C^TX_0 = k\}$, принято называть P-моделями [18]. В эту же группу моделей включают также и задачи, где требуется минимизировать порог k, который не должен быть превышен линейной формой $C^T X$ с заданной вероятностью α:

$$k \to \min \text{ при условии } P\{C^T X \leqslant h\} = \alpha.$$

Ограничения задачи могут быть представлены в одной из следующих форм записи:

$$\text{а) } P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \geqslant b_i\right\} \geqslant \alpha_i, \quad 0 \leqslant \alpha_i \leqslant 1, \quad i = \overline{1, m};$$

$$\text{б) } P\{AX \geqslant b\} \geqslant \alpha, \quad 0 \leqslant \alpha \leqslant 1;$$

$$\text{в) } P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{i_k j}x_j \geqslant b_{i_k}, \ i_k \subset I_k\right\} \geqslant \alpha_k, \quad 0 \leqslant \alpha_k < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, s.$$

Задачи с вероятностными ограничениями, заданными в форме а), называют задачами с построчными вероятностными ограничениями, а в форме б) — задачами с вероятностным ограничением.

1. Рассмотрим задачу линейного стохастического программирования с вероятными ограничениями типа а):

$$M(C^T X) \to \max \tag{5.1.15}$$

при условиях

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i\right\} \geqslant \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m; \tag{5.1.16}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = 1, \ldots, n. \tag{5.1.17}$$

При детерминированной матрице $A = \|a_{ij}\|$ и случайном векторе ограничений $b = \{b_i\}$ задача (5.1.15) — (5.1.17) сводится к эквивалентной детерминированной ЛП-задаче.

Пусть $P(b_1, b_2, \ldots, b_m)$ — совместная плотность распределения составляющих b_i случайного вектора b. Находим плотность распределения компоненты b_i:

$$P_i(b_i) = \underbrace{\int_{-\infty}^{\infty} \cdots \int_{-\infty}^{\infty}}_{m-1} P(b_1, b_2, \ldots, b_m)\, db_1 db_2 \ldots db_{i-1} db_{i+1} \ldots db_m.$$

Вычисляем $\tilde{b}_i$ из уравнения

$$\int_{\tilde{b}_i}^{\infty} P_i(b_i)\, db_i = \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{5.1.18}$$

Если решение уравнения (5.1.18) не единственно, то в качестве $\tilde{b}_i$ выбираем наибольший корень.

Очевидно, что условия (5.1.18) эквивалентны неравенствам:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant \tilde{b}_i,$$

где $\tilde{b}_i$ удовлетворяют соотношениям (5.1.18).

Отсюда следует, что задаче стохастического программирования вида (5.1.15) — (5.1.17) будет эквивалентна следующая детерминированная задача:

$$\bar{C}^T X \to \max \tag{5.1.19}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant \tilde{b}_i, \quad i = \overline{1, m}; \tag{5.1.20}$$

$$X \geqslant 0, \tag{5.1.21}$$

где $\overline{C} = M\{C\}$, $\tilde{b}_i$ — корень уравнения $F_i(\tilde{b}_i) = 1 - \alpha_i$, или $\tilde{b}_i = F_i^{-1}(1-\alpha_i)$; F_i — функция распределения случайной величины b_i.

2. Рассмотрим теперь более общий случай, когда A — случайная матрица. Пусть элементы матрицы A и составляющие вектора b — независимые между собой нормально распределенные случайные величины.

Пусть $a_{ij} \in N(\overline{a}_{ij}, \sigma_{ij}^2)$, $b_i \in N(\overline{b}_i, \sigma_i^2)$, где a_{ij} — нормальная случайная величина с математическим ожиданием $\overline{a}_{ij}$ и дисперсией σ_{ij}^2. Пусть, кроме того, в условиях (5.1.16) $\alpha_i \geqslant 0{,}5$, $i = \overline{1, m}$.

При сделанных предположениях стохастическая задача (5.1.15) — (5.1.17) сводится к детерминированной задаче выпуклого программирования с линейной целевой функцией и квадратичными ограничениями.

Действительно, при принятых допущениях невязка i-го условия случайная величина $\delta_i(X) = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j - b_i$ является нормально распределенной величиной с математическим ожиданием

$$\overline{\delta}_i(X) = \sum_{j=1}^{n} \overline{a}_{ij}x_j - \overline{b}_i$$

и дисперсией

$$\sigma_i^2(X) = \sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \sigma_i^2,$$

т. е.

$$\delta_i(X) \in N(\overline{\delta}_i(X);\ \sigma_i^2(X)).$$

Тогда условия $P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i\right\} \geqslant \alpha_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$ эквивалентны неравенствам

$$P\{\delta_i(X) \leqslant 0\} \geqslant \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \tag{5.1.22}$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_i(X)} \int_{-\infty}^{0} \exp\left\{\frac{-(\xi - \overline{\delta}_i(X))^2}{2\sigma_i^2(X)}\right\} d\xi \geqslant \alpha_i, \quad i = 1, \ldots, m. \tag{5.1.23}$$

Обозначив $\Phi(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{t} e^{-\frac{\xi^2}{2}} d\xi$, последние неравенства приведем к виду

$$\Phi\left(-\frac{\overline{\delta}_i(X)}{\sigma_i(X)}\right) \geqslant \alpha_i,$$

откуда $\overline{\delta}_i(X) + \Phi^{-1}(\alpha_i)\,\sigma_i(X) \leqslant 0$.

Учитывая выражения для $\overline{\delta}_i(X)$ и $\sigma_i(X)$, получим окончательно

$$\Phi^{-1}(\alpha_i)\left(\sum_{j=1}^{n} \sigma_{ij}^2 x_j^2 + \sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \overline{b}_i - \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\overline{x}_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m. \tag{5.1.24}$$

По условию $\alpha_i \geqslant 0{,}5$, поэтому $\Phi^{-1}(\alpha_i) \geqslant 0$, и как нетрудно непосредственно убедиться, область, определяемая условиями (5.1.24), будет выпукла.

Аналогичный результат получается и в случае, когда случайные элементы строки i-го условия коррелированы между собой. Введем обозначения

$$v_{ij} = M\{(b_i - \overline{b}_i)(a_{ij} - \overline{a}_{ij})\},$$

$$v_{ijk} = M\{(a_{ij} - \overline{a}_{ij})(a_{ik} - \overline{a}_{ik})\}.$$

Тогда, рассуждая как и выше, получаем при $\alpha \geqslant 0{,}5$

$$\Phi^{-1}(\alpha_i)\left(\sum_{j,k} v_{ijk}x_jx_k + 2\sum_j v_{ij}x_j^2 + \sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \bar{b}_i - \sum_{j=1}^{n} \bar{a}_{ij}x_j. \qquad (5.1.25)$$

Если матрица $V_i = \| v_{ijk} \|_{j,k=\overline{1,n}}$ — положительно определенная, то область, высекаемая условиями (5.1.25), будет выпукла.

Итак, при принятых допущениях линейная стохастическая задача (5.1.15) — (5.1.17) с вероятностными ограничениями сводится к детерминированной задаче выпуклого программирования вида

$$\sum_{j=1}^{n} \bar{c}_j x_j \to \max$$

при условиях

$$[\Phi^{-1}(\alpha_i)]\left(\sum_j \sum_k v_{ijk}x_jx_k + 2\sum_j v_{ij}x_j^2 + \sigma_i^2\right)^{\frac{1}{2}} \leqslant \bar{b}_i - \sum_j \bar{a}_{ij}x_j.$$

3. Рассмотрим теперь задачу стохастического программирования

$$\min k \qquad (5.1.26)$$

при условиях

$$P\left\{\sum_{i=1}^{n} c_j x_j \leqslant k\right\} = \alpha_0. \qquad (5.1.27)$$

Будем считать, что случайные коэффициенты c_j, $j = \overline{1, n}$ распределены нормально с математическими ожиданиями $\bar{c}_j$ и корреляционной матрицей $C = \| c_{ij} \|$, где $c_{ij} = M(c_i - \bar{c}_i)(c_i - \bar{c}_j)$. При принятых допущениях о распределении коэффициентов c_j линейная форма $\sum_{j=1}^{n} c_j x_j = C^T X$ нормально распределена со средним $\bar{C}^T X$ и дисперсией

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_i x_j.$$

Поэтому соотношение (5.1.27) может быть переписано в виде

$$\Phi\left(\frac{(k - \Sigma c_j x_j)}{\sqrt{\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}}}\right) = \alpha_0. \qquad (5.1.28)$$

Отсюда видно, что минимизация k при условии (5.1.27) эквивалентна минимизации

$$k = \sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \Phi^{-1}(\alpha_0) \sqrt{\sum_i \sum_j c_{ij}x_{ij}x_j}.$$

При $\alpha \geqslant 0{,}5$ k представляет собой выпуклую вниз функцию по x. Таким образом, при сделанных допущениях, задаче стохастического программирования

$$k \to \min \qquad (5.1.29)$$

при условиях

$$P\{C^T X \leqslant k\} = \alpha_0; \qquad (5.1.30)$$

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j \leqslant b_i\right\} \geqslant \alpha_i, \quad i = 1, 2, \ldots, m, \quad j = \overline{1, n} \qquad (5.1.31)$$

соответствует следующий детерминированный эквивалент:

$$k(X)=\sum_{j=1}^{n}\bar{c}_j x_j+\Phi^{-1}(\alpha_0)\sqrt{\sum_{i,j} c_{ij} x_i x_j}\to \min; \tag{5.1.32}$$

$$\Phi^{-1}(\alpha_i)\left(\sum_j\sum_k v_{ijk}x_j x_k+\sum_j v_{ij}x_j+\sigma_i^2\right)^{1/2}\leqslant\left(\bar{b}_i-\sum_j a_{ij}x_j\right), \tag{5.1.33}$$

$$i=1,\ 2,\ \ldots,\ m.$$

Задача (5.1.32) — (5.1.33) представляет собой задачу выпуклого программирования. Для ее решения могут быть использованы метод множителей Лагранжа, секущих плоскостей или один из вариантов метода возможных направлений [7].

4. Задачи с вероятностными ограничениями (общий случай). Выше были рассмотрены частные постановки стохастических задач с вероятностными ограничениями, порожденные моделями ЛП. Рассмотрим теперь достаточно общий прием сведения задач стохастического программирования к эквивалентной детерминированной задаче (детерминированным эквивалентам).

Запишем задачу стохастического программирования с вероятностным условием в форме б):

$$f_0(X)\to \max; \tag{5.1.34}$$

$$P\{\mathrm{f}(X)\leqslant 0\}\geqslant\alpha, \tag{5.1.35}$$

где

$$\mathrm{f}(X)=\{f_1(X),\ \ldots,\ f_m(X)\}.$$

Обозначим через $g(X)=\{g_1(X),\ \ldots,\ g_m(X)\}$ детерминированный вектор, область изменения составляющих которого для каждого X ограничена диапазоном изменения соответствующей случайной величины $f_i(X)$: $g_i(X)\in\{\inf f_i(X),\ \sup f_i(X)\}$. Для каждого X вводим функцию распределения

$$F_{ix}(g_i(X))=P\{f_i(X)\leqslant g_i(X)\},\quad 0\leqslant F_{ix}\leqslant 1$$

и

$$F_x(X)=P\{f_1(X)\leqslant g_1(X);\ \ f_2(X)\leqslant g_2(X);\ \ldots;\ f_m(X)\leqslant g_m(X)\}. \tag{5.1.36}$$

Задаче (5.1.34) — (5.1.35) соответствует следующий детерминированный эквивалент:

$$f_0(X)\to \max; \tag{5.1.37}$$

$$F_x(g(X))=\alpha; \tag{5.1.38}$$

$$g(X)\leqslant 0. \tag{5.1.39}$$

Пример 5.1. Пусть крупная свиноферма имеет возможность покупать от одного до трех различных видов зерна и приготавливать разные виды смесей. Разные зерновые культуры содержат различное количество питательных компонентов-ингредиентов. Допустим, что принимаются в расчет 4 компонента.

Исходные данные, относящиеся к этой задаче, приводятся в табл. 5.1.

Управляющим установлено, что комбикорма для свиней должны удовлетворять, по крайней мере, некоторым минимальным требованиям с точки зрения питательности. Пусть удельные затраты на единицу веса зерна вида 1, 2 и 3 составляют соответственно 41, 35 и 96 руб./кг. Требуется определить, какая из всех возможных смесей является самой дешевой. Обозначим через x_1, x_2 и x_3 искомое количество зерна каждого вида.

Тогда требуется найти такие x_1, x_2, x_3, для которых

$$(41x_1+35x_2+96x_3)\to \min \tag{5.1.40}$$

при условиях

$$2x_1 + 3x_2 + 7\quad x_3 \geqslant 1250 \text{ (ингредиент } A);$$
$$1x_1 + 1x_2 \geqslant 250 \text{ (ингредиент } B);$$
$$5x_1 + 3x_2 \geqslant 900 \text{ (ингредиент } C);$$
$$0{,}6x_1 + 0{,}25x_2 + 1x_3 \geqslant 235{,}5 \text{ (ингредиент } Д).$$

Допустим, что минимальные суммарные потребности в компонентах A, B, C и $Д$ являются случайными величинами a, b, c, d, распределенными равномерно соответственно в интервалах [1000, 1500], [200, 300], [500, 1000], [150, 250].

Таблица 5.1

Ингредиенты в составе смеси	Содержание ингредиента в единице зерна вида			Минимальные потребности на планируемый период
	вид 1	вид 2	вид 3	
A	2	3	7	1250
B	1	1	0	250
C	5	3	6	900
$Д$	0.6	0.25	1	232.5

Построить соответствующую оптимизационную модель, которая обеспечивала бы минимальные потребности во всех компонентах с вероятностью не менее 0.80. Соответствующие вероятностные ограничения будут иметь вид

$$P\{2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geqslant a\} \geqslant 0.80;$$
$$P\{1x_1 + 1x_2 \geqslant b\} \geqslant 0.80;$$
$$P\{5x_1 + 3x_2 \geqslant c\} \geqslant 0.80; \qquad (5.1.41)$$
$$P\{0.6x_1 + 0.25x_2 + 1x_3 \geqslant d\} \geqslant 0.80.$$

Вероятностным ограничениям (5.1.41) будут соответствовать следующие детерминированные эквиваленты:

$$2x_1 + 3x_2 + 7x_3 \geqslant a_1 = 1400;$$
$$1x_1 + 1x_2 \geqslant b_1 = 280;$$
$$5x_1 + 3x_2 \geqslant c_1 = 900; \qquad (5.1.42)$$
$$0.6x_1 + 0.25x_2 + 1x_3 \geqslant d_1 = 230,$$

где a_1 — значение случайной величины a, удовлетворяющее условию $P\{a \leqslant a_1\} \geqslant \alpha = 0.80$, откуда $a_1 = 1400$. Аналогичным образом определяются и значения b_1, c_1 и a_1.

Далее решаем детерминированную задачу ЛП (5.1.40) при условии (5.1.42).

Ее оптимальное решение $x_1^0 = 162.5$; $x_2^0 = 117.5$; $x_3^0 = 103.5$.

5.2. ДВУХЭТАПНЫЕ ЗАДАЧИ СТОХАСТИЧЕСКОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Постановка двухэтапной задачи

При исследовании многих задач планирования и управления в условиях неполной информации возможно и целесообразно процесс принятия решений представить разделенным на 2 этапа. На первом этапе выбирается так называемый предварительный план, позволяющий провести необходимые подготовительные работы, на втором этапе производится компенсация невязок, выявленных после наблюдения реализованных значений случайных параметров условий задачи. Естественно, что предварительный план и план-компенсация должны быть согласованы таким образом, чтобы обеспечить минимум среднего значения суммарных затрат, возникающих на обоих этапах решения задачи. В разрешимой задаче выбор предварительного плана должен гарантировать существование плана-компенсации.

Рассмотрим следующую задачу:

$$C^T X \to \min \tag{5.2.1}$$

при условиях

$$AX = b; \tag{5.2.2}$$

$$A^{(1)}\ X = b^{(1)}; \tag{5.2.3}$$

$$X \geqslant 0, \tag{5.2.4}$$

где

$$C^T = [c_j]\ j = \overline{1,\ n};\quad A = \|a_{ij}\|\ i = \overline{1,\ m},\ j = \overline{1,\ n};$$

$$A^{(1)} = \|a_{kj}^{(1)}\|,\ k = \overline{1,\ m},\quad j = \overline{1,\ n}.$$

Допустим, что элементы матрицы $A = A(\omega)$ и векторов $b = b(\omega)$ и $C = C(\omega)$ — случайные величины (зависящие от реализации некоторого случайного события ω), а решение X необходимо принимать до наблюдения реализации случайных параметров $A(\omega)$, $b(\omega)$ и $C(\omega)$. Представим себе процесс решения задачи (5.2.1) — (5.2.4) следующим образом. Выберем вначале (на первом этапе) вектор $\tilde{X}$, удовлетворяющий условиям (5.2.3) — (5.2.4). Затем зафиксируем реализацию $\tilde{\omega}$ случайного события и соответствующие ему значения $A(\tilde{\omega})$, $b(\tilde{\omega})$, оценим невязку $b(\tilde{\omega}) - A(\omega)\tilde{X}$ в условиях (5.2.2) и вычислим вектор $Y \geqslant 0$, компенсирующий невязки в соответствии с соотношением

$$DY = b(\tilde{\omega}) - A(\tilde{\omega})\tilde{X},$$

где $D = \|d_{il}\|\ i = \overline{1,\ m},\ l = \overline{1,\ n_1}$ — матрица компенсации. В общем случае элементы D — случайные. Если задача (5.2.1—5.2.4) интерпретируется в терминах планирования производства, и A — матрица основных технологических способов, то D интерпретируется как матрица аварийных технологических способов, определяющих возможные пути компенсации обнаруженных невязок.

За нарушение условий задачи устанавливается штраф, зависящий от величин составляющих вектора Y, компенсирующего невязку. Будем характеризовать штраф величиной $q^T Y$, причем в общем случае q — случайный n_1-мерный вектор; $q \geqslant 0$. Вектор Y может быть выбран многими способами. Обычно его выбирают таким образом, чтобы обеспечить минимальный ожидаемый штраф за компенсацию условий задачи, определяемых предварительным планом X. Иными словами, на втором этапе решается задача

$$q^T Y \to \min \tag{5.2.5}$$

при условиях

$$DY = b - AX; \tag{5.2.6}$$

$$Y \geqslant 0. \tag{5.2.7}$$

Оба этапа решения задачи могут быть сведены в один, и тогда мы приходим к постановке, называемой двухэтапной задачей стохастического программирования:

$$\text{найти } \min_{X} M_{\omega} \{C(\omega) X + \min_{Y} [q(\omega)^T Y]\} \tag{5.2.8}$$

при условиях

$$A^1 X = b^{(1)}; \tag{5.2.9}$$

$$D(\omega) Y = b(\omega) - A(\omega) X; \tag{5.2.10}$$

$$X \geqslant 0. \tag{5.2.11}$$

Таким образом, решение двухэтапной стохастической задачи состоит из двух векторов: детерминированного n-мерного вектора X, определяющего предварительный план, и случайного n_1-мерного вектора $Y = Y(\omega)$, определяющего план компенсации невязок. Для решения задачи достаточно вычислить оптимальный предварительный план X. После реализации случайного события ω, т. е. после реализации случайных параметров условий задачи, соответствующая реализация Y оптимального плана-компенсации вычисляется, как решение ЛП-задачи (5.2.5) — (5.2.7).

Затраты на коррекцию плана должны быть возможно меньшими. Поэтому целесообразно для перспективного планирования (двухэтапной схемы) использовать малочувствительные к изменению параметров условия задачи.

Условия разрешимости

Рассмотрим условия разрешимости задачи второго этапа. Запишем задачу (5.2.8) — (5.2.11) в следующем виде:

$$\min M_{\omega} \{CX + P(X, A, b)\} \tag{5.2.12}$$

при условиях

$$A^{(1)} X = b^{(1)}; \tag{5.2.13}$$

$$X \geqslant 0; \tag{5.2.14}$$

где

$$P(X, A, b) = \min q^T Y; \tag{5.2.15}$$

$$DY = b - AX; \tag{5.2.16}$$

$$Y \geqslant 0. \tag{5.2.17}$$

Для разрешимости задачи второго этапа (5.2.15) — (5.2.17) при любых реализациях A и любом предварительном плане X необходимо и достаточно, чтобы система неравенств

$$D^T Z \leqslant q \tag{5.2.18}$$

была разрешима [18].

Доказательство. По условию множество планов задачи (5.2.15) — (5.2.17) непустое. Согласно теореме двойственности ЛП функция $P(X, A, b)$ ограничена снизу тогда и только тогда, когда область определения двойственной задачи для каждого X, A и b

$$Q(X, A, b) = \max_{Z} Z^T (b - AX) \tag{5.2.19}$$

$$D^T Z \leqslant q \tag{5.2.20}$$

непустая.

Поскольку область определения задачи (5.2.19) — (5.2.20) не зависит от X, A и b, то при выполнении условия (5.2.20) задача второго этапа разрешима при всех X, A и b, а при его нарушении не имеет решения ни при каких значениях этих переменных.

Эквивалентная детерминированная задача

Построим детерминированную задачу, эквивалентную двухэтапной задаче стохастического программирования. Ее решением является предварительный план X, По составляющим оптимального предварительного плана и реализации параметров условий задачи ω строится задача второго этапа — задача ЛП, решение которой определяет необходимую компенсацию плана.

Эквивалентная детерминированная задача имеет вид:

$$\text{найти} \min_{X \in K} G(X). \tag{5.2.21}$$

Исследуем целевой функционал $G(X)$ — показатель качества предварительного плана.

Выразим $G(X)$ через статистические характеристики параметров условий задачи и докажем, что детерминированная задача, эквивалентная задаче стохастического программирования, является задачей выпуклого программирования.

Рассмотрим задачу второго этапа (5.2.15) — (5.2.17) и двойственную к ней (5.2.19) — (5.2.20) для каждого X, A, b.

Предположим, что задача второго этапа и двойственная к ней разрешимы.

По теореме двойственности для линейного программирования

$$P(X, A, b) = Q(X, A, b) = Z^{*T}(A, b, X)(b - AX), \tag{5.2.22}$$

где $Z^*(A, b, X)$ — решение задачи (5.2.19) — (5.2.20), зависящее от параметров A, b и X.

Учитывая эти обозначения, двухэтапную задачу можно переписать так:

$$\min G(X) = \min \{\bar{C}^T X + MQ(X, A, b)\} \tag{5.2.23}$$

или

$$\min \{\bar{C}^T X + M_\omega Z^{*T}(A, b, X)(b - AX)\}. \tag{5.2.24}$$

Детерминированная задача (5.2.23), эквивалентная двухэтапной задаче (5.2.12) — (5.2.17), является задачей выпуклого программирования.

Некоторые частные постановки двухэтапной задачи

В общем случае нахождение детерминированного эквивалента двухэтапной задачи стохастического программирования представляет значительные трудности и находится приближенно.

Однако в ряде частных случаев она существенно упрощается и может быть решена классическими методами линейного и выпуклого программирования.

Рассмотрим некоторые такие случаи.

1. Рассмотрим двухэтапную задачу, в которой случайным является только вектор ограничений $b(\omega)$, а матрица компенсации после соответствующей перестановки строк и столбцов может быть представлена в виде $D = (E, -E)$, где E — единичная матрица размером $m \times m$. Аналогичным образом разобьем векторы Y и q на две части q_1 и q_2, соответствующие матрицам E и —E. Задача (5.2.8) — (5.2.11) в этом случае принимает вид

$$Q(X) = C^T X + MP(X, b) \to \min; \tag{5.2.25}$$

$$A^{(1)}X = b^{(1)} \text{ и } X \geqslant 0, \tag{5.2.26}$$

где

$$P(X, b) = \min (q_1^T y_1 + q_2^T y_2) \tag{5.2.27}$$

при условиях

$$y_1 - y_2 = b(\omega) - AX, \tag{5.2.28}$$

$$y_1 \geqslant 0, \quad y_2 \geqslant 0. \tag{5.2.29}$$

Здесь y_1, y_2, q_1 и q_2 — m-мерные векторы.

Очевидно, что задача (5.2.27) — (5.2.29) второго этапа имеет планы при произвольной реализации ω и любом выбранном предварительном плане X.

Задача, двойственная к (5.2.27) — (5.2.29), записывается так:

$$Q(X, b) = \max Z^T(b - Ax) \tag{5.2.30}$$

при условиях

$$-q_2 \leqslant Z \leqslant q_1. \tag{5.2.31}$$

Задача (5.2.30) легко решается и ее решение имеет вид

$$Q(\mathbf{X}, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{m} Q_i(\mathbf{X}, b_i), \tag{5.2.32}$$

где

$$Q_i(\mathbf{X}, b_i) = \begin{cases} [b_i - (\mathbf{AX})_i]\, q_i^{(1)}, & \text{при } b_i - (\mathbf{AX})_i \geqslant 0; \\ -[b_i - (\mathbf{AX})_i]\, q_i^{(2)}, & \text{при } b_i - (\mathbf{AX})_i < 0. \end{cases} \tag{5.2.33}$$

Поэтому эквивалентная выпуклая задача для двухэтапной стохастической задачи (5.2.25) — (5.2.29) записывается следующим образом:

$$\left\{\mathbf{C}^T\mathbf{X} + M\sum_{i=1}^{m} Q_i(\mathbf{X}, b_i)\right\} \to \min \tag{5.2.34}$$

при условиях

$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{X} = \mathbf{b}^{(1)}; \tag{5.2.35}$$

$$\mathbf{X} \geqslant 0, \tag{5.2.36}$$

где $Q_i(\mathbf{X}, b_i)$ определяются из соотношений (5.2.33).

Приведем еще одну форму записи этой же задачи.

Введем обозначения

$$\mathbf{AX} = \mathbf{W}; \quad (\mathbf{AX})_i = w_i; \tag{5.2.37}$$

$$MQ(\mathbf{X}, \mathbf{b}) = M\sum_{i=1}^{m} Q_i(\mathbf{X}, b_i) = M\sum_{i=1}^{m} Q_i(w_i, \mathbf{b}) = \sum_{i=1}^{m} Q_i(w_i). \tag{5.2.38}$$

Заметим, что функции $Q_i(w_i)$ так же, как и $Q_i(w_i, \mathbf{b})$, выпуклы по w_i.

Двухэтапная стохастическая задача в простейшей постановке сводится таким образом к следующей задаче выпуклого программирования

$$\mathbf{C}^T\mathbf{X} + \sum_{i=1}^{m} Q_i(w_i) \to \min \tag{5.2.39}$$

при условиях

$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{X} = \mathbf{b}^{(1)}; \tag{5.2.40}$$

$$\mathbf{AX} = \mathbf{W}; \tag{5.2.41}$$

$$\mathbf{X} \geqslant 0. \tag{5.2.42}$$

Исследуем функции $Q_i(w_i)$. Для этого обозначим через δ_i и γ_i соответственно точную верхнюю и точную нижнюю грани случайной величины $b_i(\omega)$, через $\bar{\mathbf{b}} = (\bar{b}_1, \bar{b}_2, \ldots, \bar{b}_m)$ — математическое ожидание вектора ограничений и через $F_i(b_i)$ — функцию распределения компоненты $b_i(\omega)$.

Разобьем множество значений w_i на 3 области: $(-\infty, \gamma_i)$, (γ_i, δ_i), (δ_i, ∞) Если $b_i(\omega)$ не имеет нижней (соответственно верхней) грани, то положим $\gamma_i = -\infty$. Вычислим значения $Q_i(\omega_i)$ в каждой из этих областей. Используя (5.2.33), получим

$$Q_i(w_i) = MQ_i(w_i, b_i) = -q_i^{(2)} \int\limits_{b_i \leqslant W_i} (b_i - w_i)\, dF_i(b_i) +$$

$$+ q_i^{(1)} \int\limits_{b_i > w_i} (b_i - w_i)\, dF_i(b_i) = q_i^{(1)} \int\limits_{\Omega} [b_i(\omega) - w_i]\, dF_i(b_i) -$$

$$-(q_i^{(1)} + q_i^{(2)}) \int\limits_{b_i \leqslant w_i} (b_i - w_i)\, dF_i(b_i).$$

Откуда

$$Q_i(w_i) = q_i^{(1)}(\bar{b}_i - w_i) - (q_i^{(1)} + q_i^{(2)}) \int\limits_{b_i \leqslant w_i} (b_i - w_i)\, dF_i(b_i). \tag{5.2.43}$$

Рассмотрим три случая.

1. Пусть $w_i < \gamma_i$. В этом случае $\{b_i : b_i \leqslant w_i\} = \varnothing$ и из (5.2.33) получим $Q_i(w_i) = q_i^{(1)}(\bar{b}_i - w_i)$. Таким образом, функция $Q_i(w_i)$ — линейна на луче $(-\infty, \gamma_i)$.

2. Пусть $w_i \in [\gamma_i, \delta_i]$. Тогда функция $Q_i(w_i)$ на этом отрезке выражается соотношением

$$Q_i(w_i) = q_i^{(1)}(\bar{b}_i - w_i) - (q_i^{(1)} + q_i^{(2)}) \int_{\gamma_i}^{\delta_i} (b_i - w_i)\, dF_i(b_i).$$

3. $w_i > \delta_i$. В этом случае множество $\{b_i : b_i \leqslant w_i\}$ совпадает со всей областью изменения $b_i(w)$:

$$\int_{b_i \leqslant w_i} [b_i(\omega) - w_i]\, dF_i(b_i) = \int_{\Omega} [b_i(\omega) - w_i]\, dF_i = \bar{b}_i - w_i. \qquad (5.2.44)$$

Следовательно, функция $Q(w_i)$ на интервале (δ_i, ∞) имеет вид

$$Q_i(w_i) = q_i^{(2)}(w_i - \bar{b}_i) = -q_i^{(2)}(\bar{b}_i - w_i).$$

Как видим, функция $Q(w_i)$ непрерывна и выпукла на всей числовой прямой.

При некоторых частных распределениях составляющих вектора двухэтапная задача может быть сведена к типовым задачам ЛП или выпуклого программирования и решена стандартными методами.

Пример 5.2. Пусть составляющие $b_i(\omega)$ равномерно распределены на отрезке $[\gamma_i, \delta_i]$. Тогда

$$F_i(b_i) = \begin{cases} 0 \text{ при } b_i < \gamma_i; \\ \dfrac{b_i - \gamma_i}{\delta_i - \gamma_i} \text{ при } \gamma_i \leqslant b_i \leqslant \delta_i \\ 1 \text{ при } b_i > \delta_i. \end{cases} \text{ и } dF(b_i) = \frac{1}{\delta_i - \gamma_i}\, db_i; \qquad (5.2.45)$$

Допустим, что $w_i \in [\gamma_i, \delta_i]$. Тогда

$$Q_i(w_i) = q_i^{(1)}(\bar{b}_i - w_i) + (q_i^{(1)} + q_i^{(2)}) \int_{b_i \leqslant w_i} (w_i - b_i)\, dF(b_i) =$$

$$= q_i^{(1)}(\bar{b}_i - w_i) + (q_i^{(1)} + q_i^{(2)}) \int_{\gamma_i}^{w_i} \frac{(w_i - b_i)}{\delta_i - \gamma_i}\, db_i.$$

Учитывая, что $\displaystyle\int_{\gamma_i}^{w_i} \frac{w_i - b_i}{\delta_i - \gamma_i}\, db_i = \frac{1}{\delta_i - \gamma_i} \frac{(w_i - \gamma_i)^2}{2}$, получим

$$Q_i(w_i) = q_i^{(1)}(\bar{b}_i - w_i) + \frac{q_i^{(1)} + q_i^{(2)}}{2(\delta_i - \gamma_i)} (w_i - \gamma_i)^2.$$

Тогда двухэтапная задача стохастического программирования (5.2.40) — (5.2.43) приводится к следующей задаче квадратичного программирования:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} q_i^{(1)}(\bar{b}_i - w_i) + \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i^{(1)} + q_i^{(2)}}{2(\delta_i - \gamma_i)} (w_i - \gamma_i)^2 \to \min \qquad (5.2.46)$$

при условиях

$$A^{(1)}X = b^{(1)} \quad \text{или} \quad \sum_{j=1}^{n} a_{lj}^{(1)} x_j = b_l, \quad l = \overline{1, m}, \tag{5.2.47}$$

$$(AX)_i = w_i, \quad i = \overline{1, m}; \tag{5.2.48}$$

$$x_j \geqslant 0. \tag{5.2.49}$$

Пример 5.3. Пусть все компоненты b_i вектора $\mathbf{b}(\omega)$ распределены экспоненциально, т. е.

$$F_i(b_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } b_i < \gamma_i; \\ 1 - e^{-\lambda_i(b_i - \gamma_i)} & \text{при } b_i \in [\gamma_i, \infty]; \end{cases} \tag{5.2.50}$$

$$dF_i(b_i) = \lambda_i e^{-\lambda_i(b_i - \gamma_i)}.$$

В таком случае, в соответствии с формулой (5.2.50), получим

$$\int_{b_i \leqslant w_i} (b_i - w_i)\, dF(b_i) = \lambda_i \int_{\gamma_i}^{w_i} (b_i - w_i)\, e^{-\lambda_i(b_i - \gamma_i)} db_i. \tag{5.2.51}$$

Интегрируя выражение (5.2.51) по частям, после несложных преобразований получим:

$$\lambda_i \int_{\gamma_i}^{w_i} (b_i - w_i)\, e^{-\lambda_i(b_i - \gamma_i)} db_i = (w_i - b_i)\, e^{-\lambda_i(b_i - \gamma_i)} -$$

$$- \frac{1}{\lambda_i} e^{-\lambda_i(b_i - \gamma_i)} - w_i \Big|_{\gamma_i}^{w_i} = \frac{1}{\lambda_i} [1 - e^{-\lambda_i(w_i - \gamma_i)} - \lambda_i (w_i - \gamma_i)]. \tag{5.2.52}$$

Подставляя (5.2.52) в (5.2.43) и учитывая, что $\bar{b}_i = \gamma_i + \frac{1}{\lambda_i}$, получим

$$Q_i(w_i) = q_i^{(1)} (\bar{b}_i - w_i) - (q_i^{(1)} + q_i^{(2)}) \cdot \frac{1}{\lambda_i} [1 - e^{-\lambda_i(w_i - \gamma_i)} -$$

$$- \lambda_i (w_i - \gamma_i)] = q_i^{(1)} \left(\gamma_i + \frac{1}{\lambda_i} - w_i\right) + (q_i^{(1)} + q_i^{(2)}) (w_i - \gamma_i) -$$

$$- \frac{q_i^{(1)} + q_i^{(2)}}{\lambda_i} [1 - e^{-\lambda_i(w_i - \gamma_i)}] = \frac{q_i}{\lambda_i} + q_i^{(2)} (w_i - \gamma_i) -$$

$$- \frac{q_i^{(1)} + q_i^{(2)}}{\lambda_i} [1 - e^{-\lambda_i(w_i - \gamma_i)}]. \tag{5.2.53}$$

Следовательно, двухэтапная задача стохастического программирования сводится к следующей задаче выпуклого программирования:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} q_i^{(2)} (w_i - \gamma_i) -$$

$$- \sum_{i=1}^{m} \frac{q_i^{(1)} + q_i^{(2)}}{\lambda_i} [1 - e^{-\lambda_i(w_i - \gamma_i)}] \to \min \tag{5.2.54}$$

при условиях (5.2.40) — (5.2.42).

В тех случаях, когда можно предполагать, что $w_i^0 \ll \frac{1}{\lambda_i} = b_i$, разложив функцию $(1 - e^{-\lambda_i(w_i - \gamma_i)})$ в ряд Тейлора, получим

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{n} q_i^{(1)} (w_i - \gamma_i) + \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i^{(1)} + q_i^{(2)}}{2} \lambda_i (w_i - \gamma_i)^2 \to \min, \quad (5.2.55)$$

т. е. данная задача сводится к задаче квадратичного программирования.

Пример 5.4. Рассмотрим теперь случай конечного числа реализаций случайного вектора $b(\omega)$. Пусть составляющие b_i вектора $b(\omega)$ могут принимать значения $b_i^{(1)} < b_i^{(2)} < b_i^{(3)} < \dots < b_i^{k_i}$ с вероятностями $p_i^{(1)}, p_i^{(2)}, \dots, p_i^{k_i}$.

Из формулы (5.2.43) следует, что в случае дискретного распределения случайной величины $b_i(\omega)$ функции $Q(w_i, b_i)$ являются кусочно-линейными функциями переменных w_i. Ввод дополнительных переменных и ограничений позволяет свести выпуклую кусочно-линейную задачу к задаче ЛП.

Обозначим

$$F_i^{(s)} = \sum_{r=1}^{s-1} p_i^{(r)} = P\{b_i < b_i^{(s)}\};$$

$$F_i^{(k_i+1)} = 1; \quad F_i^{(1)} = P\{b_i < b_i^{(1)}\} = 0, \quad (5.2.56)$$

$$\bar{b}_i = Mb_i = \sum_{r=1}^{k_i} b_i^{(r)} p_i^{(r)}.$$

Введем переменные $w_i^{(r)}$, $r = 1, 2, \dots, k_i + 1$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{r=1}^{k_i+1} w_i^{(r)} = w_i, \quad w_i^{(1)} \leqslant b_i^{(1)} = d_i^{(1)}, \quad 0 \leqslant w_i^{(r)} \leqslant b_i^{(r)} - b_i^{(r-1)} =$$

$$= d_i^r, \quad r = 2, 3, \dots, k_i, \quad w_i^{k_i+1} \geqslant 0.$$

В этом случае

$$(q_1 + q_2) \int\limits_{b_i \leqslant w_i} (b_i - w_i)\, dF_i(b_i) = (q_1 + q_2) \sum_{b_i \leqslant w_i} (b_i^{(r)} - w_i)\, p_i^{(r)} =$$

$$= q_i^{(1)} \bar{b}_i - \sum_{r=1}^{k_i+1} [q_i^{(1)} - (q_i^{(1)} + q_i^{(2)}) F_i^{(r)}]\, w_i^{(r)},$$

и задача стохастического программирования (5.2.39) — (5.2.42) сводится в этом случае к задаче ЛП вида:

найти

$$\min\left(\sum_{j=1}^{n} c_j x_j - \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{k_i+1} [q_i^{(1)} - (q_i^{(1)} + q_i^{(2)}) F_i^{(r)}]\, w_i^{(r)}\right) \quad (5.2.57)$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij}^{(1)} x_j = b_i^{(1)}, \quad i = \overline{1, m}; \tag{5.2.58}$$

$$\sum_{j=1}^{m} a_{ij} x_j = \sum_{r=1}^{k_i+1} w_i^{(r)}, \tag{5.2.59}$$

где

$$w_i^{(1)} \leqslant d_i^{(1)}; \quad 0 \leqslant w_i^{(r)} \leqslant d_i^{(r)}, \ r = 2, \ldots, k_i, \tag{5.2.60}$$

$$w_i^{k_i+1} \geqslant 0, \quad i = \overline{1, m}; \tag{5.2.61}$$

$$x_j \geqslant 0, \quad j = \overline{1, n}. \tag{5.2.62}$$

Пример 5.5. Двухэтапную задачу, в которой все случайные компоненты вектора b (ω) имеют непрерывную функцию распределения, можно приближенно свести к задаче квадратичного программирования. Для этого необходимо заменить непрерывную гладкую функцию распределения ступенчатой функцией распределения и представить b_i в виде суммы равномерно распределенных случайных величин:

$$b_i = \sum_{r=1}^{k_i} p_i^{(r)} \bar{b}_i^{(r)}, \quad \sum_{r=1}^{k_i} p_i^{(r)} = 1;$$

$$F_i(b_i^{(r)}) = \begin{cases} 0 \text{ при } b_i^{(r)} < \gamma_i^{(r)}, \\ \dfrac{b_i^{(r)} - \gamma_i^{(r)}}{\delta_i^{(r)} - \gamma_i^{(r)}} \text{ при } b_i^{(r)} \in [\gamma_i^{(r)}, \delta_i^{(r)}], \\ 1 \text{ при } b_i^{(r)} > \delta_i^{(r)}. \end{cases} \tag{5.2.63}$$

Соответствующая детерминированная задача тогда запишется следующим образом:

$$\sum_{j=1}^{n} c_j x_j + \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{k_i} q_i^{(1)} (\bar{b}_i^{(r)} - w_i^{(r)}) p_i^{(r)} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^{m} \sum_{r=1}^{k_i} \frac{q_i^{(1)} + q_i^{(2)}}{\delta_i^{(r)} - \gamma_i^{(r)}} p_i^{(r)} (w_i^{(r)} - \gamma_i^{(r)})^2 \to \min \tag{5.2.64}$$

при условиях

$$\sum_{j} a_{ij}^{(1)} x_j = b_i^{(1)}, \quad i = \overline{1, m}; \tag{5.2.65}$$

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j + w_i^{(r)} = \bar{b}_i^{(r)}, \ r = \overline{1, k_i}, \quad i = \overline{1, m}; \tag{5.2.66}$$

$$w_i^{(r)} \geqslant 0, \ x_j \geqslant 0. \tag{5.2.67}$$

Пример 5.6. Рассмотрим задачу, приводящую к двухэтапной модели стохастического программирования. Пусть имеется несколько предприятий, производящих некоторый однородный продукт, расположенных в пп. A_1, A_2, A_3 и A_4. Объемы производства продукта обозначим соответственно a_1, a_2, a_3 и a_4. Имеется также $n = 4$ пунктов потребления этого продукта B_1, B_2, B_3, B_4 с уровнями спроса b_1, b_2, b_3, b_4. Обозначим производственные затраты по производству 1 ед. изделий в п. A_i через c_i, а затраты по перевозке 1 единицы продукта из п. A_i в п. B_j через c_{ij} $i = \overline{1, 4}$, $j = \overline{1, 4}$.

Допустим, что величина спроса b_j — случайная с известным законом распределения $P(b_j)$ и предположим, что $P(b_j)$ — равномерное распределение на отрезке $[\gamma_j, \delta_j]$.

Обозначим через s_j затраты по хранению единицы избыточного продукта в п. B_j. Если спрос b_j превышает объем ввоза x_j, то необходимы дополнительные производственные затраты по производству и ввозу продукции. Величину удельных дополнительных затрат по производству и ввозу единицы продукта в п. B_j обозначим через q_j ($q_j = \min\limits_i (c_i + c_{ij})$).

Допустим, что величины c_i и c_{ij} случайные с известными средними $\bar{c}_i$ и $\bar{c}_{ij}$. Требуется определить такие объемы перевозок x_{ij} из п. A_i в п. B_j, а также планы выпуска дополнительной продукции x_i, при которых минимизируется сумма ожидаемых затрат по производству и перевозке продукции и затрат по хранению избыточного запаса.

Решение. Составим математическую модель задачи. На первом этапе необходимо найти такой план перевозок $\mathbf{X} = \| x_{ij} \|$, для которого

$$M_c\{\mathbf{CX}\} = M_c\left\{\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij}\right\} \to \min \tag{5.2.68}$$

при условиях

$$\mathbf{A}^{(1)}\mathbf{X} = \sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i = \overline{1, m}. \tag{5.2.69}$$

Обозначим объем продукта, ввезенного в п. B_j, через w_j. Очевидно,

$$\mathbf{A}_2\mathbf{X} = \sum_{i=1}^{m} x_{ij} = w_j.$$

Вектор компенсации $\mathbf{Y}$ определяется, как $y_j = b_j - w_j$, а матрица компенсации — $Q(\mathbf{X}, \mathbf{b}) = \sum\limits_{j=1}^{n} Q_j(\mathbf{X}, b_j) = \sum\limits_j Q_j(w_j, b_j)$, где

$$Q_j(\mathbf{X}, b_j) = \begin{cases} [b_j - w_j]\, q_j, & \text{если } b_j > w_j, \\ -[b_j - w_j]\, s_j, & \text{если } b_j < w_j. \end{cases}$$

Используя соотношения (5.2.39) — (5.2.42), запишем детерминированный эквивалент для данной задачи в следующем виде:

$$M_c\left\{\sum_i \sum_j c_{ij} x_{ij} + \sum_j Q_j(w_j, b_j)\right\} \to \min \tag{5.2.70}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i, \quad i = \overline{1, m}; \tag{5.2.71}$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = w_j, \quad j = \overline{1, n}; \tag{5.2.72}$$

$$x_{ij} \geqslant 0. \tag{5.2.73}$$

Используя выражение (5.2.46), приведем эту задачу к виду

$$\sum_i \sum_j \bar{c}_{ij} x_{ij} + \sum_{j=1}^{n} q_j (\bar{b}_j - w_j) + \sum_{j=1}^{n} \frac{s_j + q_j}{2(\delta_j - \gamma_j)} (w_j - \gamma_j)^2 \to \min_{\{x, y\}} \tag{5.2.74}$$

$$i = \overline{1, m}; \tag{5.2.75}$$

при условиях

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \leqslant a_i,$$

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = w_j, \quad j = \overline{1, n}. \tag{5.2.76}$$

Как видим, задача (5.2.74) — (5.2.77) является задачей квадратичного программирования с ограничениями — равенствами и неравенствами. Для ее решения можно применить теорему Куна — Таккера.

Задачи и упражнения

Решить следующие задачи стохастического программирования.

5.1. Фирма, специализирующаяся на производстве замороженных пищевых полупродуктов, выпускает 3 различных продукта (1, 2 и 3), каждый из которых получается путем определенной обработки картофеля и подлежит соответствующей упаковке. Фирма может закупить картофель у двух поставщиков. При этом объемы продуктов 1, 2 и 3, которые можно получить из одной тонны картофеля первого поставщика, отличаются от объемов продуктов, получаемых из картофеля второго.

Таблица 5.2

Продукт	Количество продукта, получаемого из 1 т картофеля					Ограничение на объем выпуска продукта
	$p_{11} = 1/3$	$p_{12} = 1/3$	$p_{13} = 1/3$	$p_{21} = 2/3$	$p_{22} = 1/3$	
1	0.1	0.25	0.30	0.3	0.35	8
2	0.2	0.25	0.10	0.1	0.1	6
3	0.3	0.35	0.3	0.3	0.25	12

Предположим, что из одной тонны картофеля поставщика 1 можно с одинаковой вероятностью получить продукты 1, 2 и 3 в количествах 0.1, 0.2, 0.3, либо (0.25, 0.25, 0.35), либо (0.3, 0.1, 0.3). Допустим, что для картофеля поставщика 2 соответствующие показатели будут следующими: либо (0.3, 0.1, 0.3), либо (0.35, 0.1, 0.25), причем первая возможность реализуется с вероятностью $^2/_3$, а вторая с вероятностью $^1/_3$ (табл. 5.2).

Предположим далее, что относительная прибыль при закупке картофеля у поставщика 1 равна 5 ед. ст., а у поставщика 2 — 6 ед. ст. При принятии решения по закупке картофеля необходимо также учитывать производственные возможности фирмы по выпуску продукции каждого вида, а также максимальные объемы продукции, которые могут быть проданы.

Допустим, что исходя из этих факторов, ограничения на объем выпуска каждого продукта составляют: для первого — 8 ед., для второго — 6 ед., а для третьего — 12 ед.

Допустим, что спрос на i-й продукт d_i, $i = 1, 2, 3$ — случаен с известной функцией распределения $p_i(d_i)$. Пусть продукт 1, оказавшийся в избытке по отношению к фактическому уровню спроса D_1, можно продать оптовому покупателю и получить при этом относительную удельную прибыль E, аналогично удельная относительная прибыль в случае реализации по оптовым ценам продукта 2 составляет H единиц, а продукта 3 — L единиц.

Построить двухшаговую линейную модель, позволяющую выбрать объем закупок картофеля у поставщика 1 и 2 таким образом, чтобы ожидаемая прибыль фирмы была максимальной.

Решить эту задачу для следующих исходных данных:

$$D_1^{(1)} = 3,\ D_1^{(2)} = 4,\ D_1^{(3)} = 5,\ p_{11} = p_{12} = p_{13} = 1/3;$$

$$D_2^{(1)} = 1,\ D_2^{(2)} = 3,\ D_3^{(2)} = 5,\ p_{21} = 1/6,\ p_{22} = 1/2,\ p_{23} = 1/3;$$

$$D_3^{(1)} = 4,\ D_3^{(2)} = 6,\ p_{31} = p(D_3^{(1)}) = 1/3,\ p_{32} = p(D_3^{(2)}) = 2/3;$$

$$E = 2\text{ ед.},\ H = 1\text{ ед.},\ L = 3\text{ ед.}$$

5.2. Пусть некоторое предприятие после выполнения основной производственной программы располагает запасами сэкономленного сырья трех видов S_1, S_2, S_3 в количествах b_1, b_2 и b_3 условных единиц. Из этого сырья может быть изготовлено 2 вида изделий G_1 и G_2. Известны величины a_{ij} — количество единиц i-го сырья, идущее на изготовление единицы j-го вида изделия, и c_{ij} — доход, получаемый от реализации одной единицы каждого вида изделий.

Допустим, что нормы расхода a_{ij} являются случайными величинами с равномерным законом распределения в интервале $(\gamma_{ij}, \delta_{ij})$, а c_j распределены нормально со средним c_j и дисперсией σ.

Таблица 5.3

Вид сырья	Запас сырья	Количество единиц сырья, идущее на изготовление одного изделия			
		первого вида		второго вида	
		γ_{i1}	δ_{i1}	γ_{i2}	δ_{i2}
1	2	3	4	5	6
S_1	20	2	4	1	5
S_2	16	1	2	1	4
S_3	12	0	0	2	6

Таблица 5.4

Характеристики	Удельная прибыль продажи изделия	
	$j=1$	$j=2$
Среднее c_j	3	2
Дисперсия σ_j^2	4	1

Соответствующие числовые данные приведены в табл. 5.3 и 5.4. Требуется составить такой план выпуска продукции, при котором ожидаемый доход предприятия был бы максимален при условии, что с вероятностью не менее 0,90 план будет реализуемым, т. е. количество всех видов сырья окажется достаточным для его выполнения.

Составить математическую модель задачи и найти оптимальное решение для исходных данных табл. 5.3.

5.3. (Об использовании производственных мощностей.) Предположим, что предприятие намеревается выполнить (или перевыполнить) план производства по двум видам изделий. Для производства каждого из видов изделий может быть использовано оборудование группы A_1 или A_2. Производительность различных групп оборудования при производстве изделий a_{ij} различна и является случайной (здесь i — индекс типа оборудования, а j — вида продукции). Стоимость единицы продукции, которую обозначим через b_{ij} ($i = 1, 2,\ j = 1, 2$), будет также случайна.

Допустим, что плотность распределения величин a_{ij} и b_{ij} известна, и пусть a_{ij} распределены нормально — $N\ (\overline{a}_{ij}, \sigma^2_{ij})$, а b_{ij} — равномерно в интервале $(\delta_{ij}, \gamma_{ij})$.

Обозначим через N_1 и N_2 план выпуска изделий первого и второго типа соответственно. Пусть $N_1 = 100$ шт., $N = 200$ шт.

Определить оптимальный план работы групп оборудования, при котором минимизировались бы ожидаемые суммарные производственные затраты по выпуску изделий при условии, что вероятность превышения заданного времени T работы выполнения всего планового задания составляла бы не более 0.10, а план выпуска изделий N_1, N_2 был бы выполнен с вероятностью не менее 0.95.

Составить математическую модель задачи и найти решения для исходных данных, приведенных в табл. 5.5.

Таблица 5.5

Группа оборудования i	Производительность оборудования, шт/ч				Стоимость производства изделия				Фонд времени i-го оборудования, ч
	$j=1$		$j=2$		$j=1$		$j=2$		
	a_{i1}	σ_{i2}	a_{i2}	σ_{i2}	δ_{i1}	γ_{i1}	δ_{i2}	γ_{i2}	
1	5	5	3	3	2	4	1	2	40
2	10	5	5	2	3	6	2	8	45

5.4. Имеется n различных типов судов, которые могут осуществлять перевозки народнохозяйственных грузов по регулярным линиям. Суда разных типов при эксплуатации на той или иной линии имеют разные характеристики.

Исходя из данных о себестоимости грузокилометра и коммерческой загрузки каждого типа судна, на каждой линии устанавливаются: месячные эксплуатационные расходы на судно j-го типа на i-й линии c_{ij} $i = \overline{1, m}$, $j = \overline{1, n}$; месячный объем грузооборота (объем перевозок) — судна j-го типа на i-й линии a_{ij}. Пусть величины c_{ij} и a_{ij} — случайные, причем c_{ij} имеют равномерное распределение с параметрами $(\gamma_{ij}, \delta_{ij})$, а a_{ij} — нормальное распределение — $N(\alpha_{ij}, \sigma_{ij})$, причем a_{ij} — независимые случайные величины.

Минимальный план перевозок по i-й линии равен A_i, $i = \overline{1, m}$. Допустим, что число судов j-го типа равно N_j.

Требуется составить такой план распределения парка судов по регулярным линиям, который обеспечивает минимум ожидаемых суммарных расходов при выполнении плана перевозок с вероятностью не менее 0.80.

Составить математическую модель задачи в одноэтапной постановке. Найти оптимальное решение этой задачи для разных вариантов исходных данных, приведенных в следующих таблицах

Таблица 5.6

№ линии i	Месячный грузооборот j-го судна		
	$j=1$	$j=2$	$j=3$
1	15 / 5	30 / 10	25 / 15
2	10 / 5	25 / 10	50 / 15
3	30 / 15	10 / 5	30 / 10
4	50 / 20	20 / 10	24 / 30

$N_1 = (50 \quad 20 \quad 30)$

$$A_1 = \begin{bmatrix} 300 \\ 200 \\ 1000 \\ 500 \end{bmatrix}$$

Таблица 5.7

№ линии i	Месячные эксплуатационные расходы j-го судна		
	$j=1$	$j=2$	$j=3$
1	5 / 20	40 / 100	20 / 60
2	10 / 30	20 / 36	40 / 80
3	20 / 30	12 / 18	25 / 45
4	30 / 40	10 / 90	30 / 90

Таблица 5.8

№ линии i	a_{ij}/σ_{ij}			
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
1	25 / 15	20 / 10	50 / 10	500 / 20
2	20 / 10	12 / 6	—	45 / 15
3	15 / 15	10 / 5	—	40 / 10
4	10 / 5	40 / 20	18 / 4	25 / 25

$N_2 = (55 \quad 95 \quad 30 \quad 45)$

$$A_2 = \begin{bmatrix} 500 \\ 200 \\ 200 \\ 200 \end{bmatrix}$$

Таблица 5.9

№ линии i	γ_{ij}/σ_{ij}			
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	$j=4$
1	15 / 20	10 / 30	4 / 10	12 / 18
2	20 / 40	20 / 40	—	10 / 16
3	20 / 30	8 / 12	—	30 / 40
4	10 / 50	5 / 10	15 / 25	20 / 70

5.5. Рассмотрим задачу 5.4. Допустим, что если план перевозок по некоторой i-й линии оказывается невыполненным, то управление пароходства может использовать резервные суда. При этом эксплуатационные расходы по их использованию на i-й линии составляют r_i руб/мес, а грузооборот судна — b_i. Общее число резервных судов составляет N_p шт.

Требуется составить такой план перевозок, при котором минимизируются суммарные ожидаемые расходы по использованию основных и резервных судов при безусловном выполнении плана перевозок.

Составить двухэтапную модель стохастического программирования. Решить данную задачу для исходных данных в табл. 5.6 и 5.7, если r_i и b_i — случайные величины, равномерно распределенные в интервалах (r_{i1}, r_{i2}) и (b_{i1}, b_{i2}) соответственно. Соответствующие значения приведены в табл. 5.10.

Таблица 5.10

i	1	2	3	4
r_{i1}	100	50	120	40
r_{i2}	200	80	140	60
b_{i1}	40	15	30	20
b_{i2}	60	45	50	40

5.6. Обработка деталей А, В и С может производиться на трех станках (1, 2 и 3).

Предположим, что нормы затрат времени на обработку j-й детали на i-м станке a_{ij} ($j = A, B, C$, $i = 1, 2, 3$) случайны и распределены по равномерному закону в интервале $[\delta_{ij}, \gamma_{ij}]$, а цена j-й детали c_j распределена но нормальному закону со средним $\bar{c}_j$ и СКО — θ_j. Величины δ_{ij} и γ_{ij} приводятся в табл. 5.11, а c_j и θ_j — в табл. 5.12.

Таблица 5.11

Станки i	Нормы времени на обработку j-й детали						Оплата за 1 ч работы станка, руб	Время работы станка, ч
	A		B		C			
	δ_{iA}	γ_{iA}	δ_{iB}	γ_{iB}	δ_{iC}	γ_{iC}		
1	0.2	0.4	0.1	0.2	0	0.1	30	40
2	0.6	1	0.1	0.3	0.1	0.4	10	60
3	0.2	0.5	0.2	0.4	0.2	1.0	10	30

Таблица 5.12

Характеристика	Цена j-й детали		
	A	B	C
$\bar{c}_j$	10	16	12
θ_j	5	10	8

Предположим, что любая деталь может производиться на любом из станков.

Определить оптимальную производственную программу, которая обеспечивает:

1) максимум ожидаемой стоимости товарной продукции Т;

2) максимум ожидаемой суммарной прибыли П;

3) максимум числа комплектов, включающих 3 детали А, 2 детали В и 1 деталь С при условии физической реализуемости плана с вероятностью не менее 0.95 (план называется физически реализуемым, если для него потребные ресурсы не превышают наличных);

4) максимум П при заданном ассортименте 3 : 2 : 1;

5) максимум П при заданном количестве деталей А = 200, В = 400 и С = 600;

6) максимум ожидаемой загрузки станков при заданном ассортименте 3 : 2 : 1;

7) максимум ожидаемой прибыли при дополнительных условиях, чтобы каждый станок был загружен производством только одной детали, а план предусматривал производство всех трех деталей;

8) максимум П при условии, что с вероятностью 0.8 деталей будет выпущено не менее 300 шт., а детали В — не менее 200 шт.;

9) максимум вероятности того, что будет выпущено не менее заданного числа комплектов $K = 200$, которые включают три детали типа А, две детали В и 1 деталь С.

5.7. Для изготовления определенного сплава из свинца, цинка и олова используется сырье в виде следующих пяти сплавов из тех же металлов, отличающихся составом и стоимостью 1 кг. Допустим, что процент содержания металла j в каждом сырье i является равномерно распределенной случайной величиной в интервале $[a_{ij}, b_{ij}]$.

Таблица 5.13

Металл j	Содержание металла в сырье, %									
	$i = \mathrm{I}$		$i = \mathrm{II}$		$i = \mathrm{III}$		$i = \mathrm{IV}$		$i = \mathrm{V}$	
	a_{ij}	b_{ij}	a_{ij}	b_{ij}	a_{ij}	b_{ij}	a_{ij}	b_{ij}	a_{ij}	b_{ij}
Свинец	10	20	10	20	30	50	30	80	20	40
Цинк	5	15	20	50	40	60	20	40	10	20
Олово	60	100	40	80	5	15	10	20	20	70

Таблица 5.14

i	$i = \mathrm{I}$	$i = \mathrm{II}$	$i = \mathrm{III}$	$i = \mathrm{IV}$	$i = \mathrm{V}$
c_i	4	5	6	8	7

Исходные данные приведены в табл. 5.13 и 5.14. Требуется:

а) определить, сколько сырья каждого типа нужно взять, чтобы изготовить с минимальной себестоимостью сплав, содержащий с вероятностью 0.75 не менее 20 % свинца, 30 % цинка и 50 % олова;

б) решить эту задачу при условии, что с вероятностью 0.9 сплав будет содержать олова не более 40 %, а цинка — не менее 20 %.

5.8. В колхозе 3 поля ($j = 1, 2, 3$) площадью $S_1 = 10\,000$ га, $S_2 = 15\,000$ га, $S_3 = 5000$ га засеяны пшеницей. Для уборки полей могут быть использованы комбайны разных типов $i/i = \overline{1, 4}$) производительностью g_{ij} га/день. Пусть суточные эксплуатационные расходы по содержанию комбайна i составляют

Таблица 5.15

Тип i	Средняя производительность на поле j			Число комбайнов	Эксплуатационные расходы	
	$j=1$	$j=2$	$j=3$		a_i	b_i
1	40	55	80	10	10	30
2	80	120	150	10	20	40
3	120	175	200	8	26	45
4	100	160	180	16	30	40

C_i руб./день. Общее количество комбайнов типа i равно N_i. Величины g_{ij} случайные, распределены экспоненциально со средним $\tau_{ij} = \frac{1}{\lambda_{ij}}$, c_i — равномерно распределены в интервале $[a_i, b_i]$. Исходные данные задачи приведены в табл. 5.15. Определить, какое количество комбайнов каждого типа необходимо направить на каждое из полей, чтобы с вероятностью $p = 0{,}9$ убрать все поля не более чем за T дней при минимальных ожидаемых суммарных издержках.

Задачу решить при $T = 4$, 5 и 6 дней.

5.9. В условиях задачи 5.8 определить, какое количество комбайнов каждого типа необходимо направить на каждое из полей, чтобы ожидаемое время уборки было минимальным, а суммарные производственные издержки с вероятностью $p_1 = 0.9$ не превысили величину $C_{\text{общ}}$.

Составить модель задачи стохастического программирования и решить ее при $C_{\text{общ}} = 7000$ руб., 8000 руб., 8000 руб., 9000 руб.

5.10. Предположим, что в задаче 5.8 вследствие возможных поломок техники не гарантировано окончание уборки за T дней. Колхоз может обратиться в межрайонную базу «Сельхозтехника» за дополнительным числом комбайнов.

Пусть производительность комбайна на поле j составляет g_{jp} га/день, а эксплуатационные расходы на 1 комбайн составляют c_p руб./день, причем g_{jp} распределены экспоненциально со средним τ_{jp}. Исходные данные приведены в табл. 5.16. Определить, какое дополнительное количество комбайнов необходимо запросить на базе «Сельхозтехника» и на какие поля их направить, чтобы с вероятностью $p_0 = 0.95$ убрать все поля не более чем за T дней при минимальных ожидаемых суммарных расходах.

Таблица 5.16

Тип резервного комбайна p	Производительность комбайна на поле j			Эксплуатационные расходы, c_p	
	$j=1$	$j=2$	$j=3$	a_p	b_p
A	200	300	350	30	35
B	120	180	200	20	30

Составить модель двухэтапной задачи и решить ее при следующих значениях T: а) 8 дней; б) 6 дней; в) 4 дня.

5.11. Предприятие располагает ресурсами сырья, рабочей силой и оборудованием, необходимыми для производства четырех видов изделий. Пусть удельные расходы ресурсов типа j являются случайными величинами, распределенными в интервале $[a_j, b_j]$, а прибыль на единицу изделия вида i составляет c_i единиц. Исходные данные приводятся в табл. 5.17 и 5.18.

Таблица 5.17

Вид ресурса	Нормы расхода ресурса при производстве				Объем ресурсов
	$i=1$	$i=2$	$i=3$	$i=4$	
Сырье, кг	2—4	3—6	1—2	2—5	60
Рабочая сила, нормо-ч	15—25	10—15	15—20	30—50	400
Оборудование, станко-ч	6—12	10—18	6—10	12—20	130

Таблица 5.18

Вид изделия	1	2	3	4
Прибыль	30	25	56	48

Определить оптимальный ассортимент изделий, обеспечивающий:

1) максимум ожидаемой прибыли при условии реализуемости плана с вероятностью 0.95;

2) максимум ожидаемой прибыли при ассортименте 3 : 2 : 1 : 2;

3) максимум числа комплектов, включающих одно изделие — типа 1, два — типа 2, три — типа 3 и одно — типа 4.

5.12. Мебельная фабрика выпускает столы, стулья, бюро и книжные шкафы, используя 2 типа досок. Фабрика имеет 1000 досок типа 1 и 500 досок типа 2. Трудовые ресурсы фабрики составляют 800 чел-ч в неделю. Затраты каждого вида ресурсов на изготовление 1 изделия являются равномерно распределенными случайными величинами в интервале (a_i, b_i) (табл. 5.19). Прибыль от реализации 1 стола — 12 руб., 1 стула — 5 руб., 1 бюро — 15 руб., 1 книжного шкафа — 10 руб.

Определить оптимальный ассортимент выпуска, обеспечивающий при условии реализуемости плана с вероятностью не менее 0.90:

1) максимум ожидаемой прибыли;

2) максимум ожидаемой прибыли при условии комплектности (количество столов относится к количеству стульев как 1 : 6);

3) максимум ожидаемой прибыли при дополнительных условиях; столов — не менее 40 шт., бюро — не менее 130 шт., книжных шкафов — не более 10 шт.

Таблица 5.19

Вид ресурса i	Удельные затраты							
	стол		стул		бюро		книжные шкафы	
	a_i^1	b_i^1	a_i^2	b_i^2	a_i^3	b_i^3	a_i^4	b_i^4
Доски типа 1, м	4	6	1	2	8	12	9	15
Доски типа 2, м	1	3	2	4	2	6	10	14
Трудовые ресурсы, чел-ч	2	5	1	3	4	6	8	12

4) максимум товарной продукции при условии комплектности столов и стульев 1 : 6 и следующих ценах на продукцию: стол — 40 руб., стул — 15 руб., бюро — 12 руб., книжный шкаф — 80 руб.

5.13. Ткань трех артикулов производится на ткацких станках двух типов. Производительности станков при обработке пряжи — случайные величины, распределенные по показательному закону со средним τ_i, $i = 1, 2, 3$, а расходы пряжи и краски (в кг на

Таблица 5.20

Тип станка	Производственная мощность, тыс. станко-ч	Средняя производительность станка, м/ч		
		$i=1$	$i=2$	$i=3$
I	30	20	10	25
II	45	8	20	15

Таблица 5.21

Вид ресурсов j	Объем ресурсов	Нормы расхода на ткань					
		$i=1$		$i=2$		$i=3$	
		a_{ij}	b_{ij}	a_{ij}	b_{ij}	a_{ij}	b_{ij}
Пряжа	30	100	140	160	200	180	240
Красители	5	5	10	3	7	6	12

1000 м) — равномерно распределенные в интервале (a_i, b_i) случайные величины. В табл. 5.20, 5.21 указаны производственные мощности станков (тыс. станко-ч), наличные ресурсы пряжи и красителей (в тыс. кг), производительности станков (м/ч), минимальные и максимальные нормы расхода пряжи и краски (кг на 1000 м). Цена 1 м ткани трех артикулов равна соответственно 16, 18 и 20 руб.

1. Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий товарную продукцию фабрики с вероятностью p не менее 0.90.

2. Определить максимальное число комплектов ткани, которое может выпустить фабрика с вероятностью $p = 0.90$ при комплектности артикулов ткани 2 : 1 : 3.

3. Определить оптимальный ассортимент, максимизирующий прибыль, если средняя себестоимость 1 м ткани равна соответственно 8,5 и 15 руб. при условии реализуемости плана не менее 0.85.

5.14. В кормовую смесь входят 3 продукта: сено, силос и концентраты, содержащие питательные вещества: белок, кальций и витамины. Количества питательных веществ (табл. 5.22) являются равномерно распределенными случайными величинами, находящимися в интервале $[a_j, b_j]$.

Минимально необходимые нормы потребления белка — 2000 г, кальция — 120 г, витаминов — 40 г.

Таблица 5.22

Продукт	Минимальное/максимальное содержание питательных веществ (1 г/кг)		
	Белок	Кальций	Витамины
Сено	30/70	4/8	1/3
Силос	10/30	2/6	1/2
Концентраты	150/210	2/4	0,5/1,5

1. Определить оптимальный рацион кормления минимальной стоимости, обеспечивающий с вероятностью не менее 0.80 суточные нормы потребления всех питательных веществ, если цена 1 кг сена равна 3 коп.; силоса — 2 коп., концентратов — 5 коп.

2. Решить эту задачу при условии, что известны предельные нормы суточной выдачи: сена — не более 12 кг, силоса — не более 20 кг и концентратов — не более 16 кг.

5.15. Три сорта $(i = 1, 2, 3)$ взаимозаменяемого сырья в количествах 200, 100 и 300 кг используются при производстве четырех продуктов $(j = 1, 2, 3, 4)$. Нормы расхода g_{ij} сырья i на производство продукта j являются равномерно распределенными случайными величинами в интервале (a_{ij}, b_{ij}), а производственные затраты равномерно распределены в интервале $(\delta_{ij}, \gamma_{ij})$. Исходные данные приведены в табл. 5.23 и 5.24.

Составить такой план использования сырья, чтобы с вероятностью $p = 0.90$ выпустить 25 единиц первого продукта, 45 еди-

Таблица 5.23

Сорт сырья i	Нормы расхода на продукт j							
	a_{i1}	b_{i1}	a_{i2}	b_{i2}	a_{i3}	b_{i3}	a_{i4}	b_{i4}
1	2	4	0,5	3,5	3	5	1	3
2	1	3	2	6	1	4	2	4
3	2	7	1	3	0.5	3.5	2	6

Таблица 5.24

Сорт сырья i	Производственные затраты на единицу продукции							
	δ_{i1}	γ_{i1}	δ_{i2}	γ_{i2}	δ_{i3}	γ_{i3}	δ_{i4}	γ_{i4}
1	20	60	15	45	10	20	20	50
2	15	45	20	30	40	50	30	50
3	10	30	30	60	10	30	25	45

ниц — второго, 30 единиц — третьего и 70 единиц — четвертого при минимальных суммарных производственных затратах.

5.16. Для выпуска продукции j (j = А, Б, В) три предприятия ($i = 1, 2, 3$) используют два вида ресурсов (I и II) в объемах соответственно 250 и 150, 100 и 200, 240 и 300 единиц.

Нормы расхода каждого ресурса на i-м предприятии для изготовления единицы j-й продукции — равномерно распределенные

Таблица 5.25

Предприятие i	Нормы затрат на продукцию											
	А				Б				В			
	I a_{ij}	I b_{ij}	II a_{ij}	II b_{ij}	I a_{ij}	I b_{ij}	II a_{ij}	II b_{ij}	I a_{ij}	I b_{ij}	II a_{ij}	II b_{ij}
1	1	3	2	6	0.5	1,5	2	3	3	4	2	4
2	1	2	3	7	1	3	1,5	3.5	1	3	1	5
3	1	4	2	4	1	2	1	4	1	4	3	5

Таблица 5.26

Предприятие i	Себестоимость j-й продукции i-го предприятия		
	А	Б	В
1	2	8	5
2	4	6	7
3	3	9	7

случайные величины g_{ij} в интервале $[a'_{ij}, b'_{ij}]$, а себестоимость изготовления единицы j-й продукции на i-м предприятии c_{ij} — случайная величина со средним $\bar{c}_{ij}$.

Исходные данные приводятся в табл. 5.25 и 5.26.

Пусть производственный план выпуска продукции составляет соответственно 300, 170 и 250.

Составить математическую модель для определения оптимальной специализации производства, при которой минимизируется суммарная ожидаемая себестоимость выпуска и вероятность выполнения плана не менее 0.85.

5.17. Решить задачу 5.16 при дополнительном условии, что первый вид ресурса закреплен за предприятием, а второй можно передавать другому предприятию.

5.18. На трех участках колхозного поля ($k = 1, 2, 3$) можно выращивать три культуры: рожь, пшеницу и ячмень ($i = 1, 2, 3$). Урожайность λ_{ik} этих культур равномерно распределена в интервале $[\delta_{ik}, \gamma_{ik}]$ (табл. 5.27).

Таблица 5.27

Участок k	Урожайность i-й культуры, ц/га						Средние затраты, чел.-ч.		
	δ_{k1}	ν_{k1}	δ_{k2}	ν_{k2}	δ_{k3}	ν_{k3}	c_{k1}	c_{k2}	c_{k3}
1	10	15	12	20	8	14	2	2.5	3
2	8	12	10	14	12	18	2.4	3	3.2
3	10	20	10	22	20	28	1.8	2	2.5

Пусть плановое задание по сбору урожая каждой культуры составляет соответственно 500, 600 и 400 ц, а площади участков равны соответственно 30, 50 и 20 га.

1. Определить оптимальную структуру посевов, минимизирующую суммарные ожидаемые затраты при условии выполнения плана с вероятностью не менее 0.90.

2. Определить оптимальную структуру посевов, обеспечивающую максимальную вероятность перевыполнения плана при сохранении планового ассортимента 5 : 2 : 4.

5.19. При составлении суточного рациона кормления скота можно использовать свежее сено (не более 50 кг) и силос (не более 85 кг). Смесь должна содержать питательные вещества: белок (не менее 1 кг), кальций (не менее 100 г) и фосфор (не менее 80 г).

Количество каждого компонента в 1 кг сена и силоса является нормально распределенной случайной величиной со средним μ_{ij} и дисперсией σ^2_{ij} и себестоимость единицы продукта c_i равномерно распределена в интервале $[\delta_i, \gamma_i]$.

Исходные данные приводятся в табл. 5.28.

Определить оптимальный рацион, исходя из условия минимума себестоимости при условии, что с вероятностью $p = 0.80$ выполняется требование заданной питательности.

Таблица 5.28

Продукты i	Содержание компонентов в продукте						Удельная себестоимость, руб./кг	
	Белок		Кальций		Фосфор			
	μ_{i1}	σ_{i1}	μ_{i2}	σ_{i2}	μ_{i3}	σ_{i3}	δ_i	γ_i
Сено	40	20	1.25	0.5	2	1	1	1.6
Силос	10	10	3	1.5	1	0.3	0.6	1

5.20. Предприятие может выпускать продукцию, используя три технологических процесса ($i = 1, 2, 3$). Производительность a_i i-й технологии является нормально распределенной случайной величиной со средним μ_i и дисперсией σ_i^2.

Пусть расход j-го ресурса за 1 ч работы является случайной величиной, равномерно распределенной в интервале $[\gamma_{ij}, \delta_{ij}]$ (табл. 5.29). Объем каждого ресурса на предприятии приведен в табл. 5.30.

Таблица 5.29

Способ производства i	Расход j-го ресурса										Производительность	
	δ_{i1}	γ_{i1}	δ_{i2}	γ_{i2}	δ_{i3}	γ_{i3}	δ_{i4}	γ_{i4}	δ_{i5}	γ_{i5}	μ_i	σ_i^2
1	1	3	2	4	4	10	1	3	0.5	1.5	20	10
2	1	2	3	5	2	4	0.5	1.5	—	—	25	15
3	2	4	1.5	2.5	3	5	1	2	0.8	1.2	30	30

Таблица 5.30

Тип ресурса	Сырье	Станки	Рабочая сила	Энергия	Транспорт
Объем ресурса	60	80	70	50	40

Определить оптимальный объем продукции, изготавливаемой по каждому технологическому процессу, при котором максимизируется суммарный объем продукции при условии реализуемости плана с вероятностью не менее 0.90.

ОТВЕТЫ

К главе 1

1.1. $F = 78$; $X = \{6, 5\}$. **1.2.** $F = 11\frac{3}{5}$; $X = \left\{4\frac{4}{5},\ 1\frac{2}{5}\right\}$. **1.3.** $F = 10$; $X = \{2, 0\}$. **1.4.** $F = 19\frac{6}{7}$; $X = \left\{2\frac{5}{7},\ 8\frac{4}{7}\right\}$. **1.5.** $F = 14$; $X = \{2, 0\}$. **1.6.** Неразрешима. **1.7.** $F = 16$; $X = \{3, 5\}$. **1.8.** Неразрешима. **1.9.** $F = 8$; $X = \{2, 3\}$. **1.10.** $F = 15$; $X = \{4, 1\}$. **1.11.** $F = 9$; $X = \left\{5\frac{1}{4},\ 1\frac{1}{2}\right\}$. **1.12.** $F = 6\frac{1}{9}$; $X = \left\{\frac{4}{9},\ 3\frac{7}{9}\right\}$. **1.13.** $F = -8$; $X = \left\{1\frac{1}{2},\ 9\frac{1}{2}\right\}$. **1.14.** $F = 77\frac{3}{4}$; $X = \left\{10\frac{5}{8},\ 3\frac{3}{8}\right\}$. **1.15.** $F = -2\frac{3}{5}$; $X = \left\{\frac{1}{5},\ 4\right\}$. **1.16.** $F = 4$; $X = \{2, 2\}$. **1.17.** $F = 15\frac{2}{7}$; $X = \left\{1\frac{4}{7},\ 4\frac{4}{7}\right\}$. **1.18.** Неразрешима. **1.19.** $F = 16$; $X = \{3, 5\}$. **1.20.** $F = 4$; $X = \{2, 0\}$. **1.21.** $F = -2\frac{2}{5}$; $X = \left\{\frac{4}{5},\ 0\right\}$. **1.22.** $F = 24$; $X = \{0, 8\}$. **1.23.** $F = 6$; $X = \{5, 1\}$. **1.24.** $F = 6$; $X = \left\{\frac{1}{2},\ 5\frac{1}{2}\right\}$. **1.25.** $F = -6\frac{2}{5}$; $X = \left\{3\frac{3}{5},\ \frac{4}{5}\right\}$. **1.26.** $F = \frac{3}{5}$; $X = \left\{1\frac{4}{5},\ 4\frac{1}{5}\right\}$. **1.27.** $F = -22$; $X = \{8, 1\}$. **1.28.** $F = 24$; $X = \{9, 6\}$. **1.29.** $F = 12$; $X = \{1, 3\}$. **1.30.** $F = 8$; $X = \{2, 3\}$. **1.31** $F = 4\frac{10}{11}$; $X = \left\{3\frac{9}{11},\ 2\frac{8}{11}\right\}$. **1.32.** $F = -5\frac{1}{7}$; $X = \left\{0,\ 1\frac{2}{7}\right\}$. **1.33.** $F = 9$; $X = \{4, 5\}$; $Y = \left\{0,\ \frac{1}{3},\ \frac{1}{3},\ 0\right\}$. **1.34.** $F = 6\frac{1}{3}$; $X = \left\{1,\ 3\frac{1}{3}\right\}$; $Y = \left\{0,\ \frac{1}{3},\ \frac{4}{3}\right\}$. **1.35.** $F = \frac{24}{5}$; $X = \left\{\frac{4}{5},\ \frac{4}{5}\right\}$; $Y = \left\{\frac{3}{5},\ \frac{3}{5}\right\}$. **1.36.** $F = 12$; $X = \{2, 0\}$; $Y = \left\{0,\ \frac{6}{5}\right\}$. **1.37.** $F = 45\frac{3}{5}$; $X = \left\{5\frac{3}{5},\ \frac{2}{5}\right\}$; $Y = \left\{\frac{6}{5},\ 0,\ 6\frac{4}{5}\right\}$. **1.38.** $F = \frac{9}{7}$; $X = \left\{\frac{5}{7},\ \frac{2}{7}\right\}$; $Y = \left\{\frac{1}{7},\ \frac{12}{7},\ 0,\ 0\right\}$. **1.39.** $F = 221\frac{2}{3}$; $X = \left\{\frac{5}{3},\ 0,\ \frac{85}{6},\ 0\right\}$; $Y = \left\{\frac{1}{7},\ \frac{12}{7},\ 0,\ 0\right\}$. **1.40.** $F = 10\frac{4}{13}$; $X = \left\{3\frac{1}{13},\ 1\frac{5}{13}\right\}$; $Y = \left\{\frac{5}{13},\ \frac{7}{13},\ 0\right\}$. **1.41.** $F = 33$; $X = \{3, 0, 3\}$; $Y = \{7, 1, 0\}$. **1.42.** $F = -14$; $X = \{2, 0\}$; $Y = \left\{0,\ 0,\ 0,\ 3\frac{1}{2}\right\}$. **1.43.** $F = 9$;

$X = \left\{\frac{3}{2}, 0\right\}$; $Y = \{3, 0\}$. **1.44.** $F = -8$; $X = \{2, 3\}$; $Y = \left\{\frac{1}{2}, \frac{3}{2}, 0\right\}$. **1.45.** $F = 12$; $X = \{1, 3\}$; $Y = \{3, 0, 0, 0, 0\}$. **1.46.** $F = -7\frac{33}{37}$; $X = \left\{3\frac{21}{37}, \frac{28}{37}\right\}$; $Y = \left\{0, 0, \frac{1}{37}, \frac{10}{37}\right\}$. **1.47.** $F = \frac{139}{5}$; $X = \left\{\frac{21}{5}, \frac{4}{5}\right\}$; $Y = \left\{\frac{17}{5}, \frac{27}{5}, 0, 0, 0\right\}$. **1.48.** Неразрешима. **1.49.** $F = -4$; $X = \{0, 4\}$; $Y = \{0, 1, 0, 0\}$. **1.50.** $F = -6$; **1.51.** $X = \{0, 3\}$; $Y = \{0, 0, 0, 2\}$. **1.52.** $F = 5\frac{1}{7}$; $X = \left\{\frac{16}{7}, \frac{4}{7}, 0\right\}$; $Y = \left\{\frac{4}{7}, 0, \frac{5}{7}\right\}$. **1.53.** Да. **1.54.** Да. **1.55.** Да. **1.56.** Да. **1.57.** Да. **1.58.** Да. **1.59.** Да. **1.60.** Нет. **1.61.** Нет. **1.62.** Да. **1.63.** $F = \frac{16}{3}$; $X = \left\{0, \frac{8}{3}\right\}$. **1.64.** $F = -\frac{32}{5}$; $X = \left\{\frac{18}{5}, \frac{4}{5}\right\}$. **1.65.** $F = 10$; $X = \{1, 1\}$. **1.66.** $F = 60$; $X = \{15, 0\}$. **1.67.** $F = 13{,}8$; $X = \{6, 6, 2, 4\}$. **1.68.** $F = \frac{1}{7}$; $X = \left\{\frac{5}{7}, \frac{2}{7}\right\}$. **1.69.** $F = 45\frac{3}{5}$; $X = \left\{5\frac{3}{5}, \frac{2}{5}\right\}$. **1.70.** $F = 4$; $X = \{0, 1\}$. **1.71.** $F = 13$; $X = \{2, 3\}$. **1.72.** $F = 12$; $X = \{1, 3\}$. **1.73.** $F = 4$; $X = \{2, 0\}$. **1.74.** $F = 27\frac{4}{5}$; $X = \left\{4\frac{1}{5}, \frac{4}{5}\right\}$. **1.75.** $F = 33$; $X = \{3, 0, 3\}$. **1.76.** $F = -14$; $X = \{2, 0\}$. **1.77.** $F = 5\frac{1}{7}$; $X = \left\{2\frac{2}{7}, \frac{4}{7}, 0\right\}$. **1.78.** $F = 24$; $X = \{12, 0\}$. **1.79.** $F = 9$; $X = \left\{\frac{3}{2}, 0\right\}$. **1.80.** $F = -\infty$; $X = \{2, 3\}$. **1.81.** $F = 22\frac{4}{7}$; $X = \left\{7\frac{3}{7}, 8\frac{4}{7}\right\}$. **1.82.** $F = 11\frac{1}{3}$; $X = \left\{6\frac{2}{3}, 4\frac{2}{3}\right\}$. **1.83.** $F = 4\frac{6}{7}$; $X = \left\{3\frac{1}{7}, 1\frac{5}{7}\right\}$. **1.84.** $F = 10\frac{8}{13}$; $X = \left\{\frac{6}{13}, 3\frac{11}{13}\right\}$. **1.85.** $F = 36$; $X = \{0, 18\}$. **1.86.** $F = 4\frac{2}{5}$; $X = \left\{3\frac{3}{5}, \frac{4}{5}\right\}$. **1.87.** $F = 27\frac{6}{7}$; $X = \left\{4\frac{5}{7}, 6\frac{6}{7}\right\}$. **1.88.** $F = 5$; $X = \{0, 5\}$. **1.89.** $F = 9\frac{1}{2}$; $X = \left\{\frac{1}{2}, 4\frac{1}{2}\right\}$. **1.90.** $F = 53$; $X = \left\{1\frac{1}{3}, 1\right\}$. **1.91.** $F = -5$; $X = \{0, 5\}$. **1.92.** $F = 28$; $X = \{4, 6\}$. **1.93.** 1. $F = 1350$; $X = \{0, 100, 230, 0, 0, 20\}$. 2. Более чем на 2 мин. 3. До 0,5 мин. 4. Функция уменьшается. 5. Не изменится. 6. *а*) $Z = 746{,}67$; *б*) $Z = 890$; *в*) $Z = 870$; *г*) $Z = 1350$. **1.94.** $F = 20$; $X = \{0, 0, 6, 16\}$. **1.95.** $F = 3$; $X = \{2, 1, 0, 0\}$. **1.96.** $F = 1786$; $X = \left\{0, 0, 0, 0, 0, 6, 92\frac{1}{3}, 53\frac{1}{3}\right\}$. **1.97.** $F = 3$; $X = \{1, 2, 0, 0\}$. **1.98.** $F = 10\frac{9}{14}$; $X = \left\{0, 0, 1\frac{11}{14}, 2\frac{9}{14}, 5\frac{1}{2}, 0, 0\right\}$. **1.99.** $F = -27$; $X = \{0, 2, 0, 1, 4, 0\}$. **1.100.** $F = -\frac{15}{9}$; $X = \left\{2\frac{1}{9}, 0, \frac{7}{9}, 0, 1\frac{7}{9}\right\}$. **1.101.** $F = 6\frac{1}{2}$; $X = \left\{\frac{1}{2}, 0, 5, 3\frac{1}{2}\right\}$. **1.102.** $F = 25$; $X = \{1, 1, 3, 0, 1\}$. **1.103.** $F = 36\frac{2}{3}$; $X = \left\{8\frac{1}{3}, 3\frac{1}{3}, 10\frac{1}{2}\right\}$

1.104. $F = 204$; $X = \{0, 0, 0, 18, 0, 5\}$. 1.105. $F = 11$; $X = \{3, 2, 4, 0, 0\}$. 1.106. $F = 25$; $X = \{0, 0, 5, 5, 0\}$. 1.107. $F = 120$; $X = \{6, 0, 0, 12, 0\}$. 1.108. $F = 24$; $X = \{2, 0, 1, 1, 0\}$. 1.109. $F = 4$; $X = \{1, 5, 0, 0, 0, 0\}$. 1.110. $F = 5\frac{1}{2}$; $X = \left\{1\frac{1}{2}, 2\frac{1}{2}, 0, 0\right\}$. 1.111. $F = 2$; $X = \{0, 0, 1, 0, 0, 0\}$. 1.112. $F = 15$; $X = \{7, 0, 5, 0, 0, 3\}$. 1.113. $F = 65$; $X = \left\{0, 0, 15\frac{1}{2}, 0, 0, 62, 49, 0\right\}$. 1.114. $F = 31{,}09$; $X = \{0; 0; 7, 36; 0; 28, 27; 0; 0; 4, 54\}$. 1.115. $F = 22$; $X = \{8, 3, 4, 0, 0, 0, 0, 0\}$. 1.116. $F = 17.6$; $X = \{8, 6, 3, 0, 0, 2, 6, 0\}$. 1.117. $F = 2$; $X = \{0, 1, 0, 0, 0\}$. 1.118. $F = 1$; $X = \{0, 1, 2, 2, 0\}$. 1.119. $F = 3$; $X = \{1, 1, 1, 0, 0\}$. 1.120. $F = 7$; $X = \{4, 2, 0, 1, 0, 0\}$. 1.121. $F = 10$; $X = \{0, 0, 10, 0, 0\}$. 1.122. $F = 2{,}2$; $X = \{5, 6, 0, 0, 0, 2, 2, 4\}$. 1.123. $L = 240$. 1.124. $L = 432$. 1.125. $L = 310$. 1.126. $L = 345$. 1.127. $L = 1880$. 1.128. $L = 320$. 1.129. $L = 310$. 1.130. $L = 220$. 1.131. $L = 265$. 1.132. $L = 555$. 1.133. $L = 190$. 1.134. $L = 1055$. 1.135. $L = 1190$. 1.136. $L = 825$. 1.137. $L = 585$. 1.138. $L = 133$. 1.139. $L = 225$. 1.140. $L = 800$. 1.141. $L = 275$. 1.142. $L = 400$. 1.143. $L = 240$. 1.144. $L = 176$. 1.145. $L = 475$. 1.146. $L = 305$. 1.147. $L = 715$. 1.148. $L = 860$.

К главе 2

2.1. $F = 16$; $X = \{0, 4\}$. 2.2. $F = 16$; $X = \{8, 0\}$. 2.3. $F = 6$; $X = \{0, 3\}$. 2.4. $F = 16$; $X = \{2, 0\}$. 2.5. $F = 22$; $X = \{2, 1\}$. 2.6. $F = 4$; $X = \{0, 1\}$. 2.7. $F = 5$; $X = \{1, 2\}$. 2.8. $F = 21$; $X = \{3, 1, 0\}$. 2.9. $F = 3$; $X = \{0, 3\}$. 2.10. $F = 10$; $X = \{4, 3\}$. 2.11. $F = 22$; $X = \{2, 1\}$. 2.12. $F = 11$; $X = \{6, 5\}$. 2.13. $F = 6$; $X = \{4, 2\}$, 2.14. $F = 21$; $X = \{3, 1, 0\}$. 2.15. $F = 2$; $X = \{0, 2\}$. 2.16. $F = 12$; $X = \{3, 2\}$. 2.17. $F = 2$; $X = \{1, 1\}$. 2.18. $F = 7$; $X = \{0, 7\}$. 2.19. $F = 11$; $X = \{1, 2\}$. 2.20. $F = 48$; $X = \{18, 14\}$. 2.21. $F = 16$; $X = \{2, 1\}$. 2.22. $F = 6$; $X = \{2, 2\}$. 2.23. $F = 5$; $X = \{3, 2\}$. 2.24. $F = 12$; $X = \{1, 2\}$. 2.25. $F = 5$; $X = \{3, 1\}$. 2.26. $F = 3$; $X = \{1, 2\}$. 2.27. $F = 26$; $X = \{4, 1\}$. 2.28. $F = 11$; $X = \{2, 2, 5\}$. 2.29. $F = 10$; $X = \{1, 1\}$. 2.30. $F = 7$; $X = \{3, 1\}$. 2.31. $F = 32$; $X = \{4, 0\}$. 2.32. $F = 28$; $X = \{8, 4\}$.

К главе 3

3.1. 1) $x^0 = \frac{1}{2}$, $y^0 = \frac{1}{2}$; 2) $x^0 = \frac{3}{2}$, $y^0 = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $x^0 = 2{,}2$, $y^0 = 3{,}8$; 4) не существует; 5) $x^0 = 0{,}6$; $y^0 = 6{,}2$. 3.2. 1) $x_1^0 = 3$, $x_2^0 = 3$, $x_3^0 = 3$; 2) $x_1^0 = x_2^0 = \frac{\sqrt{2}}{2}$; 3) $x_1^0 = x_2^0 = 2$, $x_3^0 = x_4^0 = 0$; 4) $x_1^0 = 6\frac{2}{3}$, $x_2^0 = \frac{1}{3}$, $x_3^0 = 1$. 3.3. $x_1^0 = \frac{14}{9}$, $x_2^0 = \frac{2}{3}$, $\min z = -2\frac{4}{9}$. 3.4. $x_1^0 = \frac{4}{13}$, $x_2^0 = \frac{33}{13}$. 3.5. $x_1^0 = 4{,}4$, $x_2^0 = 2{,}8$, $x_3^0 = x_4^0 = 0$. 3.6. $x_1^0 = x_2^0 = 0$, $x_1^0 = x_2^0 = \{1, 2, 3\}$. 3.7. 1) $x_1^0 = 3$, $x_2^0 = 2$, 2) $x_1^0 = 2{,}78$, $x_2^0 = 1{,}32$; 3) $x_1^0 = 6$, $x_2^0 = 6$; 4) $x_1^0 = 5$, $x_2^0 = 8$; 5) $x_1^0 = \frac{40}{7}$, $x_2^0 = \frac{46}{7}$. 3.8. $x_1^0 = 1$, $x_2^0 = 0$. 3.9. $x_1^0 = 5{,}5$; $x_2^0 = 2{,}5$; $x_3^0 = 1{,}5$, $\max f = 26{,}75$. 3.10. $x_1^0 = x_2^0 = x_3^0 = 0$, $\min z = 0$. 3.11. $x_1^0 = 0$, $x_2^0 = \frac{13}{4}$, $x_3^0 = \frac{1}{2}$. 3.12. $x_1^0 = 0$; $x_2^0 = 1{,}5$. 3.13. $x_1^0 = 3$, $x_2^0 = 3$. 3.14. $x_1^0 = 7$; $x_2^0 = 1$. 3.15. $x_1^0 = 0$; $x_2^0 = 0$. 3.16. $x_1^0 = \frac{15}{4}$; $x_2^0 = \frac{17}{4}$.

3.17. $x_1^0 = \frac{15}{4}$; $x_2^0 = \frac{17}{4}$. 3.18. $x_1^0 = 5$; $x_2^0 = 2$. 3.19. $x_1^0 = \frac{24}{7}$; $x_2^0 = \frac{16}{7}$. 3.20. $x_1^0 = 5$; $x_2^0 = 3$, $\min f = 21$. 3.21. $x_1^0 = 3{,}4$; $x_2^0 = 2{,}6$. 3.22. $x_1^0 = 7$; $x_2^0 = 1$. 3.23. $x_1^0 = \frac{19}{12}$, $x_2^0 = \frac{58}{12}$. 3.24. $x_1^0 = 4$, $x_2^0 = 6\frac{2}{9}$, $x_3^0 = \frac{1}{3}$. 3.25. $x_1^0 = 3{,}9$; $x_2^0 = 3{,}22$; $\max f = 19{,}21$. 3.26. $x_1^0 = \frac{3}{4}$; $x_2^0 = 1$. 3.27. $x_1^0 = \frac{138}{31}$; $x_2^0 = \frac{51}{31}$. 3.28. $x_1^0 = 3{,}7$; $x_2^0 = 2{,}3$. 3.29. $x_1^0 = \frac{120}{29}$, $x_2^0 = \frac{30}{29}$, $x_3^0 = \frac{20}{29}$. 3.30. $x_1^0 = \frac{5}{2}$; $x_2^0 = 0$; $x_3^0 = 0$. 3.31. $x^0 = 2\sqrt[3]{25}$, $y^0 = 2\sqrt[3]{25}$, $z = \sqrt[3]{25}$; $C_{\min} = 6 \cdot 10^3 \sqrt[3]{5}$. 3.32. $\delta_1 = \frac{3}{4}$, $\delta_2 = \frac{1}{4}$, $\delta_3 = \frac{1}{4}$, $\delta_4 = \frac{1}{2}$, $\min u(x, y) = 40$; $u_1 = 30$, $u_2 = 10$. 3.33. $r = \frac{2}{9}$, $\delta_1 = \frac{8}{9}$, $\delta_2 = \frac{1}{9}$, $\delta_3 = \frac{2}{9}$, $\delta_4 = \frac{2}{9}$, $\min g_0 = 45$. 3.34. $r_1 = 0{,}3$, $\delta_1 = 0{,}2$, $\delta_2 = 0{,}4$, $\delta_3 = 0{,}4$, $\delta_4 = 0{,}3$, $\delta_5 = 0{,}6$, $g_0 = 100$; $t_1 = t_2 = 1$, $t_3 = 2$. 3.35. $\delta_1 = 0{,}4$; $\delta_2 = 0{,}6$; $\delta_3 = 0{,}15$; $\delta_4 = 0{,}15$; $g_0 = 2{,}03$; $t_0 = 3{,}9$; $t_1 = 2{,}1$, $t_2 = 3{,}8$. 3.36. $\delta_1 = 0{,}6$; $\delta_2 = 0{,}4$; $\delta_3 = 1{,}2$, $\delta_4 = 0{,}1$, $g_0 = 45{,}9$; $t_1 = 1{,}5$; $t_2 = 1{,}3$; $t_3 = 1{,}89$. 3.37. $\delta_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_2 = \frac{1}{3}$, $\delta_3 = \frac{1}{6}$, $g_0(t) = 40{,}3$. 3.38. $g_0(t) = v_0(\delta) = 90$, $\delta_1 = \frac{2}{9}$, $\delta_2 = \frac{4}{9}$, $\delta_3 = \frac{1}{3}$. 3.39. $g_0(t) = 4{,}39$; $t_1 = 2{,}9$; $t_2 = 0{,}172$; $t_3 = 1{,}1$; $\delta_1 = 0{,}57$; $\delta_2 = 0{,}43$; $\delta_3 = 0{,}425$, $\delta_4 = 0{,}144$; $\delta_5 = 0{,}575$. 3.40. $g_0(t) = 8{,}2$, $\delta_1 = \frac{5}{8}$, $\delta_2 = \frac{1}{8}$, $\delta_3 = \frac{1}{4}$; $\delta_4 = \frac{3}{16}$, $\delta_5 = \frac{3}{8}$, $t_1 = 5^{-2/5} \approx 0{,}52$; $t_2 = 2 \cdot 5^{-1/5} \approx 1{,}45$; $t_3 = 5^{4/5} \approx 3{,}62$. 3.41. $\delta_1 = \frac{1}{4}$; $\delta_2 = \frac{1}{2}$; $\delta_3 = \frac{1}{4}$; $\delta_4 = \frac{1}{4}$; $\delta_5 = \frac{1}{2}$; $g_0(t) = v(\delta) = 60$; $t_1 = \frac{15}{16}$; $t_2 = t_3 = 0{,}8$; $t_4 = \sqrt{\frac{3}{8}} = \sqrt{\frac{6}{16}} \approx 0{,}61$. 3.42. $g_0 = 1{,}6$; $\delta_1 = \frac{5}{21}$, $\delta_2 = \frac{2}{21}$, $\delta_3 = \frac{2}{3}$, $\delta_4 = \frac{23}{21}$, $t_1 = 1{,}25$; $t_2 = 0{,}114$; $t_3 = 1{,}368$. 3.43. $\delta_1 = \frac{1}{3}$; $\delta_2 = \frac{2}{3}$; $\delta_3 = \delta_4 = \frac{1}{6}$, $g_0 = 20 \cdot 2^{1/2} 3^{1/3}$, $t_1 = 3^{2/3}$, $t_2 = \left(\frac{3}{2}\right)^{1/3}$; $t_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. 3.44. $v(\delta) = g_0(t) = \frac{80}{3} \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3/8}$; $\delta_1 = \frac{1}{4}$, $\delta_2 = \frac{3}{4}$, $\delta_3 = \frac{3}{8}$; $\delta_4 = \frac{1}{8}$, $t_1 = \left(\frac{3}{2}\right)^{11/4}$, $t_2 = \frac{9}{8}\left(\frac{2}{3}\right)^{11/4}$, $t_3 = \left(\frac{2}{3}\right)^{9/8}$. 3.45. $\delta_1 = \frac{3}{4}$; $\delta_2 = \frac{1}{4}$, $\delta_3 = \frac{1}{2}$, $\delta_4 = \frac{1}{4}$, $g_0(t) = 40\sqrt{2} \cdot 15^{-3/4}$, $t_1 = 6$, $t_2 = 20^{-1/2}$; $t_3 = 2 \cdot 10^{1/2} \cdot 15^{-3/4}$. 3.46. $\delta_1 = \frac{1}{2}$, $\delta_2 = \frac{1}{2}$, $\delta_3 = 2$, $\delta_4 = 1$, $g_0(t) = 2{,}16\sqrt{6}$; $t_1 = \frac{3}{2}$, $t_2 = 0{,}3 \cdot \left(\frac{2}{3}\right)^{3/4}$, $t_3 = 0{,}12 \cdot 6^{1/2} \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{3/4}$. 3.47. $\delta_1 = \frac{1}{4}$, $\delta_2 = \frac{1}{2}$, $\delta_3 = \frac{1}{4}$, $\delta_4 = \frac{1}{8}$, $g_0(t) = 20\sqrt{2}$, $t_1 = 2^{1/5}$, $t_2 = 2^{-7/20}$, $t_3 = 2^{1/15}$. 3.48. $\delta_1 = \frac{7}{8}$, $\delta_2 = \frac{1}{8}$, $\delta_3 = \frac{1}{4}$, $\delta_4 = \frac{3}{8}$, $v(\delta) = g_0(t) = 41{,}33$, $t_1 = 0{,}311$, $t_2 = 1{,}89$,

$t_3 = 2{,}05$. **3.49.** $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \frac{1}{3}$, $v(\delta) = g_0(t_1, t_2, t_3) = 30\sqrt[3]{90} \approx 134{,}4$; $t_1 = 2^{1/3} \cdot 3^{-2/3} \cdot 90^{5/9}$, $t_2 = 3^{1/3} \cdot 2^{-2/3} \cdot 90^{2/9}$, $t_3 = 2^{1/3} \cdot 3^{1/3} \cdot 90^{-4/9}$. **3.50.** $\delta_1 = 0{,}32$; $\delta_2 = 0{,}52$; $\delta_3 = 0{,}16$; $\delta_4 = 0{,}16$; $\delta_5 = 0{,}52$, $v(\delta) = g_0(\mathbf{t}) = 23{,}9$. **3.51.** $\delta_1 = 0{,}08$; $\delta_2 = 0{,}92$; $\delta_3 = 0{,}52$; $\delta_4 = 0{,}2$; $\delta_5 = 1{,}24$; $v(\delta) = g_0(t) = 101$; $t_1 = 1{,}04$; $t_2 = 1{,}745$; $t_3 = 0{,}456$. **3.52.** $\delta_1 = \delta_2 = \delta_3 = \delta_5 = \frac{1}{3}$; $\delta_4 = \frac{1}{6}$; $g_0 = 60$; $t_1 = \frac{1}{2}$; $t_2 = 4$; $t_3 = 1$. **3.53.** $\delta_1 = 0{,}4$; $\delta_2 = 0{,}6$; $\delta_3 = 0{,}2$; $\delta_4 = 0{,}8$; $g_0(\mathbf{t}) = 11{,}89$, $t_1 = 0{,}706$, $t_2 = 1{,}19$, $t_3 = 1{,}416$. **3.54.** $\delta_1 = \frac{3}{8}$, $\delta_2 = \frac{5}{8}$, $\delta_3 = \frac{1}{4}$, $\delta_4 = \frac{1}{2}$, $v(\delta) = g_0(t) = 25{,}14$, $t_1 = 0{,}74$, $t_2 = 1{,}0$, $t_3 = 1{,}57$. **3.55.** $\delta_1 = \frac{4}{5}$, $\delta_2 = \frac{1}{5}$, $\delta_3 = \frac{2}{5}$, $\delta_4 = \frac{1}{5}$, $v(\delta) = g_0(t) = 6{,}97$, $t_1 = 2{,}426$, $t_2 = 0{,}855$, $t_3 = 0{,}46$. **3.56.** $\delta_1 = \frac{1}{8}$, $\delta_2 = \frac{3}{8}$, $\delta_3 = \frac{1}{2}$, $\delta_4 = \frac{1}{4}$, $\delta_5 = \frac{1}{8}$, $v(\delta) = g_0(t) = 23{,}68$, $t_2 = 0{,}276$, $t_3 = 5{,}455$, $t_4 = 0{,}394$, $t_5 = 0{,}590$. **3.57.** $\delta_1 = 0{,}34$, $\delta_2 = 0{,}42$, $\delta_3 = 0{,}24$, $\delta_4 = 0{,}14$, $\delta_5 = 0{,}04$, $g_0(\mathbf{t}) = v(\delta) = 23{,}1$, $t_1 = 0{,}046$, $t_2 = 2{,}38$, $t_3 = 0{,}406$. **3.58.** $\delta_1 = \frac{3}{7}$, $\delta_2 = \frac{4}{7}$, $\delta_3 = \frac{5}{7}$, $\delta_4 = \frac{1}{7}$. $\delta_4 = \frac{1}{7}$, $v(\delta) = g_0(\mathbf{t}) = 13{,}82$, $t_1 = 0{,}528$, $t_2 = 1{,}7$, $t_3 = 1{,}32$. **3.59.** $\delta_1 = \frac{3}{4}$, $\delta_2 = \frac{1}{4}$, $\delta_3 = \frac{1}{4}$, $\delta_4 = \frac{1}{2}$, $v(\delta) = g_0(\mathbf{t}) = 29{,}5$, $t_1 = 0{,}303$, $t_2 = 1{,}642$, $t_3 = 2{,}226$. **3.60.** $g_0(t) = 17{,}7$, $t_1 = 1{,}373$, $t_2 = 1{,}06$, $t_3 = 1$, $\delta_1 = 0{,}6$, $\delta_2 = 0{,}4$, $\delta_3 = 0{,}4$, $\delta_4 = 0{,}7$, $\delta_5 = 0{,}1$.

К главе 4

4.3. $y_1^0 = 0$, $y_2^0 = 6$, $y_3^0 = 4$, $R_{\text{общ}} = 1100$ кг. **4.4.** а) $y_1^0 = 4$, $y_2^0 = 0$, $y_3^0 = 4$; б) $y_1^0 = 0$, $y_2^0 = 6$, $y_3^0 = 3$, $R = 1000$; в) $y_1^0 = 0$, $y_2^0 = 6$, $y_3^0 = 4$. **4.6.** 1. $x_1^0 = 5$, $x_2^0 = 10$, $x_3^0 = 14$, $x_4^0 = 14$, $x_5^0 = 10$. **4.7.** 1) $x_1^0 = 10$, $x_2^0 = 23$, $x_3^0 = 0$, $x_4^0 = 37$, $x_5^0 = 0$, $x_6^0 = 30$, $\min L = 160$; 2) $x_1^0 = 20$, $x_2^0 = 10$, $x_3^0 = 15$, $x_4^0 = 20$, $x_5^0 = 0$, $x_6^0 = 10$, $x_7^0 = 20$, $x_8^0 = 25$, $L = 128$; 3) $s = 1$; $x_1^0 = 45$, $x_2^0 = x_3^0 = 0$, $x_4^0 = 58$, $x_5^0 = x_6^0 = x_7^0 = 0$, $\min L = 322$, $s = 2$; $x_1^0 = 45$, $x_2^0 = x_3^0 = 0$, $x_4^0 = 30$, $x_5^0 = 0$, $x_6^0 = 28$, $x_7^0 = 0$; $L_{\min} = 432$; $s = 3$; $x_1^0 = 45$, $x_2^0 = x_3^0 = 0$, $x_4^0 = 30$, $x_5^0 = 0$, $x_6^0 = 28$, $x_7^0 = 0$; $L_{\min} = 498$; $s = 4$; $x_1^0 = 30$, $x_2^0 = 0$, $x_3^0 = 15$, $x_4^0 = 30$, $x_5^0 = 0$, $x_6^0 = 28$; $L_{\min} = 544$. **4.8.** 1. а) оптимальная стратегия; $x^0 = 4$ при $i = 0$, $x^0 = 5$ при $i = 1, 2$, $x^0 = 0$ при $i = 3, 4$; б) оптимальная стратегия: $x^0 = 3$ при $i = 0$, $x^0 = 5$ при $i = 1$, $x^0 = 4$ при $i = 2$, $x^0 = 0$ при $i = 3, 4$; в) оптимальная стратегия та, которая при каждом i минимизирует c_{ij}: $x^0 = 3$ при $i = 0$, $x^0 = 2$ при $i = 1$, $x^0 = 1$ при $i = 2$, $x^0 = 0$ при $i = 3, 4$. 2. Чем меньше α, тем меньше $x_{\text{опт}}(i)$ при любом i. **4.10.** б) оптимальная стратегия: если $i = 0$, 1, 2 и 3, то $x^0 = 5$ если $i = 4$, то $x^0 = 0$; $\bar{c}_{\min} = 20{,}4$; в) оптимальная стратегия: если $i = 0$, 1 и 2, то $x^0 = 4$; если $i = 3$ и 4, то $x^0 = 0$; ей соответствует производственный цикл (4; 4; 4; 0) и $\bar{c}_{\min} = 17{,}25$. д) оптимальная стратегия: если $i = 0$, то $x = 3$; если $i = 1$, то $x = 2$; если $i = 2$, 3 и 4, то $x = 1$; е) оптимальная стратегия: если $i = 0$, то $x = 4$; если $i = 1$, то $x = 5$; если $i = 2$, то $x = 5$; если $i = 3$, то $x = 0$; $c_{\min} = 14$; ж) если $i = 0$, то $x = 3$; если $i = 1$, то $x = 2$;

если $i=2$, то $x=1$; если $i=3$; 4, то $x=0$, $c_{\min}=19$. **4.12.** A $(\alpha=1)$. Если $i=0$, то $x=5$; если $i=1$, то $x=1$; если $i=2$; 3; 4, то $x=0$, Б $(\alpha=0;\ 0,9)$. Оптимальная стратегия та же, что в п. А. $Г$ $(\alpha=1)$. Если $i=0$, 1, то $x=5$; если $i=2$, то $x=1$; если $i=3$; 4, то $x=0$. $Г$ $(\alpha=0,\ 9)$. Оптимальная стратегия та же, что и в п. А. $Г$ $(\alpha=0,5;\ 0)$. Если $i=0$, то $x=3$; если $i=1$, то $x=2$; если $i=2$, то $x=1$, если $i=3$; 4, то $x=0$. **4.13.** $\alpha=1$. Оптимальная стратегия: если $i=0$, то $x=2$; если $i=1$, то $x=2$; если $i=2$, то $x=1$; если $i=3$, то $x=0$; если $i=4$, то $x=0$; $c_{\min}=9$. **4.14.** Оптимальная стратегия при $\alpha=1$ и $\alpha=0.9$: (1, 3); (2, 1); (3, 4); (4, 3), $\min c=2$. **4.15.** Оптимальная стратегия: (1, 3); (3, 1); (2, 1); (4, 3); $c=2,5$. **4.16.** В. $x_1^0=2$; $x_2^0=2$; $x_3^0=5$; $\max P_{общ}=0,964$. **4.18.** Б. $C_{общ}=14$; $x_1^0=10$; $x_2^0=3$; $x_3^0=0$; $x_4=0$. **4.23.** Оптимальная стратегия: $x=0$, если $i=4$, 5; $x=1$, если $i=3$; $x=2$, если $i=2$; $x=3$, если $i=1$; $x=4$, если $i=0$; $C=9\frac{2}{3}$. **4.24.** При объеме продажи B и A используется краткая реклама, при объеме продажи C — подробная реклама. Средняя прибыль за 1 неделю равна 7950 руб. II. При затратах на рекламу, не привышающих $1,08\cdot10^3$ руб. III. Оптимальная стратегия не изменяется, если прибыль при объеме продаж В лежит в диапазоне 11,30 — 12,18 тыс. руб.

К главе 5

5.2. $x_1^0=5$, $x_2^0=0$, $\max f=15$. **5.3.** $x_{11}^0=45$, $x_{21}^0=50$ шт., $x_{12}^0=60$, $x_{22}=130$, $\min f=1085$, где x_{ij} — объем выпуска j-х изделий на i-м оборудовании. **5.4.** $x_{11}^0=11$, $x_{12}^0=1$, $x_{13}^0=10$, $x_{21}^0=0$, $x_{22}^0=12$, $x_{23}=0$, $x_{13}^0=26$, $x_{32}^0=0$, $x_{33}^0=20$, $x_{41}^0=13$, $x_{42}^0=4$, $x_{43}^0=0$, $\min f=2948,5$. **5.6.** 1) $x_{13}^0=410$, $x_{22}^0=206$, $x_{32}^0=128$, $x_{11}^0=x_{12}^0=x_{21}^0=x_{25}^0=x_{31}^0=x_{33}^0=0$; 2) $x_{13}^0=410$, $x_{22}^0=206$, $x_{32}^0=128$, $\max f=8161,5$; 3), 6) $x_{11}^0=81$, $x_{12}^0=2$, $x_{13}^0=67$, $x_{21}^0=20$, $x_{22}^0=132$, $x_{23}^0=0$, $x_{32}^0=100$, $x_{31}^0=x_{33}^0=0$, $x_1^0=201$, $x_2^0=184$, $x_3^0=67=\max z$ (z — число комплектов); 4) $x_{11}^0=84$, $x_{12}^0=2$, $x_{13}^0=70$, $x_{21}^0=23$, $x_{22}^0=138$, $x_{23}^0=0$, $x_{31}^0=103$, $x_{32}^0=x_{33}^0=0$, $x_1^0=210$, $x_2^0=140$, $x_3^0=70=z$ (z — число комплектов); 5) Ответ такой же, что и в п. 3, $П_{\max}=3076,5$; 7) $x_{13}^0=410$, $x_{22}^0=206$, $x_{31}^0=103$, $П_{\max}=7190,5$; 8) $x_{13}^0=410$, $x_{22}^0=230$, $x_{31}^0=100$, $П_{\max}=7517,5$. **5.7.** 1. $x_1^0=0,47$, $x_2^0=0$, $x_3^0=0,53$, $\min f=5,06$.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. *Базара М., Шетти К.* Нелинейное программирование: Теория и алгоритмы.— М. : Мир, 1982.— 580 с.
2. *Вагнер Г.* Основы исследования операций.— М. : Мир, 1972—1973.— Т. 1—3.
3. *Даффин Р., Питерсон Э., Зенер К.* Геометрическое программирование.— М. : Мир, 1972.— 312 с.
4. *Ермольев Ю. М.* Методы стохастического программирования.— М. : Наука, 1976.— 240 с.
5. *Ермольев Ю. М., Ястремский А. И.* Стохастические модели и методы в экономическом планировании.— М. : Наука, 1979.— 256 с.
6. *Ермольев Ю. М., Ляшко И. И., Михалевич В. С. и др.* Математические методы исследования операций.— К. : Вища шк. Головное изд-во, 1979.— 312 с.
7. *Зайченко Ю. П.* Исследование операций.— 3-е изд., перераб. и доп.— К. : Выща шк. Головное изд-во, 1988.— 552 с.
8. *Исследование* операций / Под ред. Дж. Моудера, С. Эмалграби.— М. : Мир, 1981.— Т. 1—2.
9. *Калихман И. Л.* Сборник задач по линейной алгебре и линейному программированию.— М. : Высш. шк., 1969.— 427 с.
10. *Калихман И. Л.* Сборник задач по математическому программированию.— М. : Высш. шк., 1975.— 270 с.
11. *Кофман А., Фор Р.* Займемся исследованием операций.— М. : Мир, 1965.— 256 с.
12. *Кофман А., Анри-Лабордер А.* Методы и модели исследования операций / Под ред. Н. П. Бусленко.— М. : Мир, 1977.— 432 с.
13. *Лэсдон Л. С.* Оптимизация больших систем / Под ред. А. А. Первозванского.— М. : Наука, 1975.— 432 с.
14. *Михалевич В. С., Волкович В. Л.* Вычислительные методы исследования и проектирования сложных систем.— М. : Наука, 1982.— 286 с.
15. *Саати Т.* Целочисленные методы оптимизации и связанные с ними экстремальные проблемы.— М. : Мир, 1973.— 302 с.
16. *Финкельштейн Ю. Ю.* Приближенные методы и прикладные задачи дискретного программирования.— М. : Наука, 1976.— 264 с.
17. *Хедли Дж.* Нелинейное и динамическое программирование.— М. : Мир, 1967.— 506 с.
18. *Юдин Д. Б.* Математические методы управления в условиях неполной информации.— М. : Сов. радио, 1974.— 400 с.
19. *Юдин Д. Б.* Задачи и методы стохастического программирования.— М. : Сов. радио, 1979.— 392 с.
20. *Таха Х.* Введение в исследование операций.— М. : Мир, 1985.— 479 с.

Учебное пособие

ЗАЙЧЕНКО Юрий Петрович
ШУМИЛОВА Светлана Александровна

ИССЛЕДОВАНИЕ ОПЕРАЦИЙ
Сборник задач

Переплет художника
Г. М. Балюна

Художественный редактор
С. П. Духленко

Технический редактор
С. Л. Светлова

Корректор
И. П. Берус

ИБ 13888

Сдано в набор 23.06.89. Подписано в печать 14.05.90. БФ 05569. Формат 60×90[1]/16. Бум. тип. № 2. Гарнитура литературная. Высокая печать. Усл. печ. л. 15,0. Усл. кр.-отт. 15,0. Уч.-изд. л 15,64. Тираж 5000 экз. Изд. № 8942. Зак. № 9—4063. Цена 85 к.

Издательство «Выща школа», 252054, Киев-54, ул. Гоголевская, 7.

Отпечатано с матриц Головного предприятия республиканского производственного объединения «Полиграфкнига». 252057, Киев, ул. Довженко, 3 в Киевской книжной типографии научной книги, 252004, Киев-4, ул. Репина, 4. Зак. 0-427.

Ю. П. ЗАЙЧЕНКО
С. А. ШУМИЛОВА

Исследование операций

СБОРНИК ЗАДАЧ