

С.И.Баскаков ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ

**С.И.Баскаков**

ЛЕКЦИИ  
ПО ТЕОРИИ  
ЦЕПЕЙ

Издательство МЭИ

РОСВУЗНАУКА

**С.И.Баскаков**

ЛЕКЦИИ  
ПО ТЕОРИИ  
ЦЕПЕЙ



**ИЗДАТЕЛЬСТВО  
МЭИ**

**Москва  
1991**



**РОСВУЗНАУКА**

ББК 31.21  
Б 27  
УДК 621.372(07)

Рецензенты: кафедра теории цепей и сигналов.  
Нижегородского политехнического института;  
доктор техн. наук, профессор **А. В. Негушил**

**Баскаков С. И.**

**Б27** Лекции по теории цепей. — М.: Изд-во МЭИ,  
1991. — 224 с.

ISBN 5-7046-0027—1.

Систематически изложен материал курса «Основы теории цепей» в соответствии с современной вузовской программой. Рассмотрены методы анализа стационарных гармонических режимов линейных цепей, теория четырехполюсников, характеристики частотно-избирательных цепей и фильтров, основы теории нелинейных цепей. Подробно изучены способы нахождения реакции линейной цепи на импульсные воздействия. Представлена теория цепей с распределенными параметрами. Обсуждаются методы синтеза линейных двухполюсников. Отдельная глава посвящена применению компьютеров для расчета сложных цепей.

Для студентов радиотехнических специальностей вузов.

Б  $\frac{2302020000-007}{097(02)-91}$  10—90

ББК 31.21

ISBN 5-7046-0027—1

© Баскаков С. И., 1991

## ПРЕДИСЛОВИЕ

Эта книга является учебным пособием по курсу «Основы теории цепей» для студентов радиотехнических специальностей вузов.

С позиций радиотехники теория цепей представляет собой научно-техническую область, образованную совокупностью методов, которые дают возможность: 1) анализировать процессы, происходящие в радиотехнических устройствах при обработке и преобразовании электрических сигналов; 2) синтезировать электрические устройства с заранее заданными характеристиками.

Роль теории цепей в формировании профессионального статуса радиоинженера исключительно велика. Методы теории цепей без преувеличения пронизывают все специальные радиотехнические дисциплины. Велика также методологическая ценность данного курса, поскольку теория цепей служит замечательным примером научного построения, в котором огромное разнообразие следствий выводится из небольшого числа исходных положений, прежде всего из двух законов Кирхгофа.

Современная теория цепей прочно опирается на фундаментальные дисциплины. Она органически включает в себя многие положения из раздела «Электричество и магнетизм» вузовского курса физики [13]. Многообразны также математические методы, используемые теорией цепей, — алгебра комплексных чисел, матричное исчисление, теория функций комплексного переменного и теория дифференциальных уравнений [6], [7], [12].

За последние годы отечественная литература по данному курсу пополнилась обширными учебниками, например [1] и [2]. По сравнению с ними данная книга имеет более скромный объем. Однако это достигнуто не изъятием каких-либо разделов курса и, не преднамеренным упрощением материала, а исключительно путем отказа от рассмотрения многих частных, порой второстепенных вопросов и концентрации внимания на общих положениях и методах. Представляется, что такое изложение учебного материала принесет студентам определенную пользу и подготовит их как к слушанию последующих курсов, так и к самостоятельной работе с литературными источниками.

По мере возможности мы стремились подчеркнуть прикладную направленность теории цепей. С этой целью в текст введено много числовых примеров. Читателю следует внимательно проработать их, обращая внимание на порядки физических величин, встречающихся в радиотехнической практике.

Серьезная работа над курсом обязательно должна сопровождаться решением задач разного уровня сложности, начиная с эле-

ментарных, предусматривающих расчеты по формулам, и кончая нестандартными задачами, требующими навыков, настойчивости и, главное, творческой выдумки. Среди имеющихся пособий для этой цели можно рекомендовать, например, задачник [3].

Выражаю признательность рецензентам — профессорам А. В. Нетушилу и В. В. Крылову, а также преподавателям кафедры теории цепей и сигналов Нижегородского политехнического института за тщательный и высококвалифицированный анализ текста рукописи, за ценные замечания и конструктивную доброжелательную критику.

Хочется также искренне поблагодарить коллег, сотрудников кафедры основ радиотехники Московского энергетического института, неоднократно обсуждавших план будущей книги и ее отдельные фрагменты.

Отзывы и замечания просьба присылать по адресу: 105835 ГСП, Москва, Е-250, Красноказарменная ул., 14, Издательство МЭИ.

Москва, сентябрь 1990 г.

*С. И. Баскаков*

## 1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Как известно, любые электромагнитные процессы в рамках представлений классической физики описываются уравнениями Максвелла. Решив эти уравнения, можно в каждой точке пространства найти векторы напряженности электрического поля  $\mathbf{E}$  и магнитного поля  $\mathbf{H}$ , которые в общем случае зависят от времени.

Однако столь подробное описание на практике является неэффективным. Во-первых, для количественного задания векторов в пространстве потребовались бы огромные информационные массивы, обозреть и сопоставить которые практически невозможно. Во-вторых, сама процедура решения уравнений Максвелла, описывающих электромагнитные поля внутри реальной радиотехнической конструкции, например, внутри телевизионного приемника, встречает непреодолимые вычислительные трудности.

Тем не менее, имеется обширный и весьма важный в практическом отношении класс электромагнитных систем, которые удается приближенно описать, не прибегая непосредственно к концепции электромагнитного поля, а используя более простые интегральные характеристики, такие как напряжения и токи.

### 1.1. КВАЗИСТАЦИОНАРНЫЕ ПОЛЯ

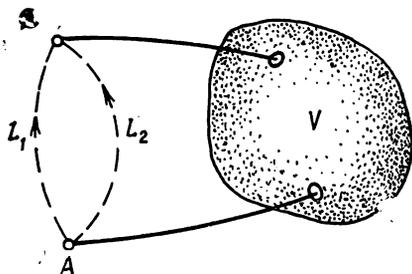
В физике доказано, что переменное электромагнитное поле является волновым процессом; электромагнитные волны любой частоты распространяются в вакууме со скоростью  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с. В переменном поле электрический и магнитный векторы неразрывно связаны друг с другом законом электромагнитной индукции Фарадея: криволинейный интеграл по произвольному замкнутому контуру  $L$  от векторного поля  $\mathbf{E}$  равен с отрицательным знаком производной по времени от магнитного потока  $\Phi$ , пронизывающего этот контур:

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = -d\Phi/dt. \quad (1.1)$$

Предположим, что поле изменяется во времени *достаточно медленно*, так что приближенно

$$\oint_L \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0. \quad (1.2)$$

Такие поля, называемые *квазистационарными*, обладают фундаментальным свойством: значение интеграла от вектора  $\mathbf{E}$  вдоль кривой, соединяющей две произвольные точки  $A$  и  $B$ , зависит от



положения этих точек в пространстве и не зависит от формы кривой. Действительно, пусть имеется некоторое устройство, заключенное в объеме  $V$  (рис. 1.1). Между выводами устройства проведены две кривые  $L_1$  и  $L_2$ . При этом на основании формулы (1.2)

Рис. 1.1. К определению понятия электрического потенциала

$$\int_{AL_1B} \mathbf{E} d\mathbf{l} + \int_{BL_2A} \mathbf{E} d\mathbf{l} = 0,$$

откуда

$$\int_{AL_1B} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \int_{AL_2B} \mathbf{E} d\mathbf{l}. \quad (1.3)$$

Равенство (1.3) означает, что квазистационарное поле  $\mathbf{E}$  является *потенциальным полем* и независимо от формы кривой  $L$

$$\int_{ALB} \mathbf{E} d\mathbf{l} = \varphi_A - \varphi_B = u_{AB}, \quad (1.4)$$

где  $\varphi$  — электрический потенциал;  $u$  — напряжение (разность потенциалов), измеряемое в вольтах (В) и имеющее физический смысл работы, совершаемой силами электрического поля при переносе заряда в 1 кулон (Кл) из точки  $A$  в точку  $B$ . Очевидно, что если изменить порядок следования точек  $A$  и  $B$ , то знак напряжения изменится на противоположный:  $u_{BA} = -u_{AB}$ .

**Цепные структуры.** Понятие квазистационарного электромагнитного поля приобретает содержательный смысл только в том случае, если геометрические размеры системы  $l$  существенно меньше длины волны колебаний  $\lambda$ . При этом время  $\tau = l/c$ , необходимое для распространения волн вдоль системы, пренебрежимо мало по сравнению с характерным временным масштабом процессов в системе, например, по сравнению с периодом возбуждающих колебаний.

В радиотехнике и в смежных областях широко применяют системы, обладающие *цепной структурой*. В качестве примера на рис. 1.2,а изображено устройство, в котором на общей печатной плате расположены индуктивная катушка  $L$ , конденсаторы  $C$ , транзистор  $VT$  и резисторы  $R$ . Любая цепная структура состоит из ряда пространственных областей  $A, B, C, \dots$  (рис. 1.2,б), которые соединены между собой проводниками.

Наличие таких областей указывает на пространственную локализацию электромагнитных процессов. Так, в некоторых из этих областей может запасаться энергия электрического или магнитного полей. В других областях происходит необратимое превращение энергии электромагнитного поля в теплоту или в механи-

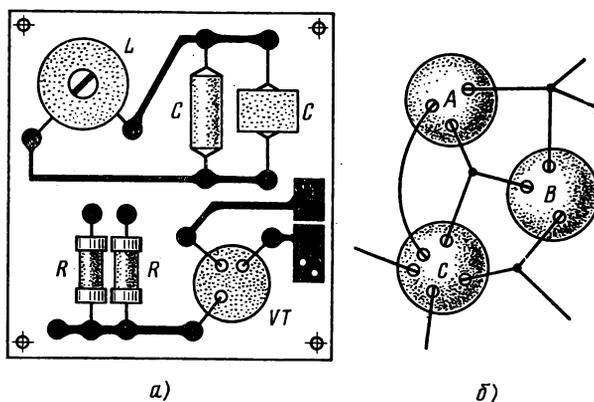


Рис. 1.2. Цепные структуры:

*a* — физические элементы на печатной плате; *b* — области пространственной локализации электромагнитных процессов

ческую работу. Наконец, в некоторых областях размещены источники (генераторы), которые превращают энергию неэлектромагнитного происхождения в энергию электромагнитного поля.

### 1.2. ЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ЦЕПЬ КАК МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ КВАЗИСТАЦИОНАРНОЙ СИСТЕМЫ

Потенциальный характер квазистационарного электрического поля позволяет абстрагироваться от геометрической конфигурации элементов, образующих цепную структуру, и рассматривать ее наглядное графическое представление, которое называется *электрической* или *принципиальной схемой*. Пример такой схемы изображен на рис. 1.3. Можно заметить, что цепная структура состоит из отдельных элементов, помеченных буквами А, В, С, D

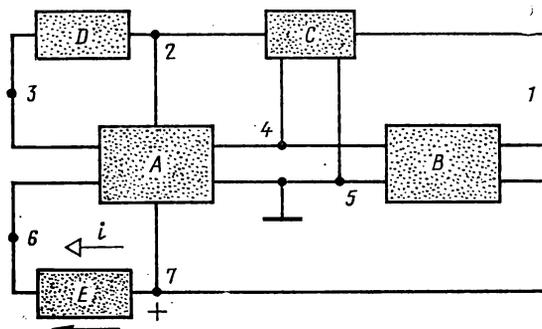


Рис. 1.3. Принципиальная схема цепной структуры

и Е. Каждый такой элемент имеет несколько *доступных зажимов*, называемых также *полюсами*. Элемент А является шестиполюсником, элементы В и С представляют собой четырехполюсники, а элементы D и Е — двухполюсники.

Процессы в цепных структурах можно изучать экспериментально, возбуждая их некоторыми внешними источниками. Наблюдаемыми величинами являются токи и напряжения в разных участках структуры. Однако такой подход лишен общности, так как экспериментатор каждый раз имеет дело лишь с одной конкретной системой.

Чтобы изучать цепную структуру теоретически, рассчитывать и проектировать ее, необходимо предложить способ математического описания, т. е. создать математическую модель такой структуры, называемую *электрической цепью* (в дальнейшем для краткости просто *цепью*). При этом требуется: 1) сформулировать и количественно выразить законы функционирования физической системы; 2) описать динамические свойства элементов, образующих цепь.

**Узлы, ветви и контуры.** В цепи можно, прежде всего, выделить *узлы*. Так называют точки, в которых полюсы двух или более элементов соединяются вместе. На рис. 1.3 узлы помечены номерами от 1 до 7.

Путь между двумя узлами, проходящий по тому или иному элементу, называют *ветвью* цепи. Чтобы указать конкретную ветвь, следует задать номера узлов и символ соответствующего элемента. Применительно к схеме, изображенной на рис. 1.3, можно говорить о ветвях 4С1, 2D3, 6А5 и т. д.

В структуре цепи отдельные ветви принято объединять в *контуры*. Контуром называют множество узлов, которые мысленно обходятся в одном выбранном направлении. Контур начинается и заканчивается в одном и том же узле. Обход контура обычно проводят вдоль смежных ветвей, каждая из которых проходится только один раз и лишь в одном направлении. Именно такими являются контуры 1С4В1, 3D2С1В4А3, 7Е6А7 и т. д. (рис. 1.3).

**Знаки напряжений и токов.** Предположим, что потенциал  $\varphi_7$  узла 7 оказался выше потенциала  $\varphi_6$  узла 6. В этом случае напряжение  $u = \varphi_7 - \varphi_6$  положительно, что принято отмечать на принципиальной схеме цепи одним из двух способов: 1) поставив знак «плюс» около узла 7; 2) изобразив стрелку, направленную от «плюса» к «минусу», т. е. в сторону уменьшения потенциала.

Следует иметь в виду, что потенциал системы в целом определяется с точностью до произвольной постоянной, которую всегда можно выбрать так, чтобы потенциал одного из узлов стал равен нулю. Подобным «заземленным» узлом может быть, например, узел 5, что отмечается на схеме условным обозначением.

Ток в каждой ветви может иметь одно из двух возможных направлений. Если ток направлен в сторону убывания потенциала

ветви, то говорят, что ток и напряжение *согласованы* по направлению. При этом стрелки, соответствующие току и напряжению, на схеме ориентированы в одну и ту же сторону.

Напомним, что в теории цепей по традиции используют «техническое» направление тока, которое совпадает с ориентацией вектора скорости упорядоченного движения воображаемых положительно заряженных частиц. Если же ток создается отрицательно заряженными электронами, то он направлен в сторону, противоположную вектору их скорости.

**Элементарные пассивные двухполюсники.** Чтобы описать процессы в цепи, требуется указать однозначную динамическую связь между напряжением и током для каждой ветви. В общем случае такая связь может быть весьма сложной.

Рассмотрим свойства ряда простейших элементов цепи, которые называются *элементарными двухполюсниками*. Все эти элементы не содержат источников энергии и являются *пассивными* звеньями. Соединяя элементарные двухполюсники между собой, можно создавать составные элементы любого уровня сложности.

Подчеркнем, что все токи и напряжения, рассматриваемые в дальнейшем, считаются согласованными по направлению.

**Резистивный элемент.** Служит математической моделью устройства, в котором энергия электромагнитного поля преобразуется в теплоту. Характеризуется прямой пропорциональностью между током и напряжением (рис. 1.4,а)

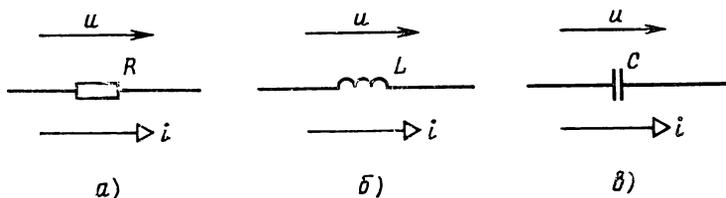


Рис. 1.4. Элементарные пассивные двухполюсники:

а — резистивный элемент; б — индуктивный элемент; в — емкостный элемент

$$u = Ri, \quad (1.5)$$

где  $R$  — сопротивление элемента, измеряемое в омах (Ом). Величина  $G = 1/R$  называется проводимостью и измеряется в сименсах (См).

На практике широко используют резисторы — компоненты радиоустройств, характеристики которых весьма точно описываются равенством (1.5). Сопротивления резисторов часто измеряют в килоомах ( $1 \text{ кОм} = 10^3 \text{ Ом}$ ) и мегаомах ( $1 \text{ МОм} = 10^6 \text{ Ом}$ ).

**Индуктивный элемент.** Является математической моделью устройства, накапливающего энергию магнитного поля в

локализованном объеме. По определению, связь между напряжением и током в данном элементе такова (рис. 1.4,б):

$$u = L di/dt. \quad (1.6)$$

Параметр  $L$  называют индуктивностью и измеряют в генри (Гн). На радиочастотах, т. е. в диапазоне до нескольких сотен мегагерц индуктивный элемент можно достаточно точно реализовать с помощью индуктивной катушки. Индуктивность катушек, применяемых в радиотехнике, обычно измеряют в миллигенри ( $1 \text{ мГн} = 10^{-3} \text{ Гн}$ ) или в микрогенри ( $1 \text{ мкГн} = 10^{-6} \text{ Гн}$ ).

**Емкостный элемент.** Служит математической моделью устройства, способного запасать энергию электрического поля. Для данного элементарного двухполюсника, по определению (рис. 1.4,в)

$$i = C du/dt, \quad (1.7)$$

где  $C$  — емкость элемента. Единицей измерения емкости служит фарад (Ф). Промышленно выпускаемые конденсаторы имеют характеристики, весьма схожие с характеристиками идеального емкостного элемента. Фарад — весьма крупная единица, поэтому для измерения емкостей практически используемых конденсаторов применяют пикофарады ( $1 \text{ пФ} = 10^{-12} \text{ Ф}$ ), нанофарады ( $1 \text{ нФ} = 10^{-9} \text{ Ф}$ ) и микрофарады ( $1 \text{ мкФ} = 10^{-6} \text{ Ф}$ ).

**Элементарные активные двухполюсники.** Электрические цепи, используемые для обработки радиосигналов, обычно содержат один или несколько *источников*. Так называют элементы цепи, создающие напряжения и токи за счет действия каких-либо факторов, внешних по отношению к рассматриваемой цепи. Например, таким источником является устройство питания микросистемных цепей. Другим примером служит антенна, которая создает на входе приемника напряжение под действием падающей электромагнитной волны.

В теории цепей принято рассматривать две простейшие модели активных двухполюсников. Слева на рис. 1.5,а приведено условное обозначение *источника напряжения*, который на зажимах любой внешней цепи создает заданное напряжение  $u$ . Идеальный источник напряжения близок по своим свойствам к реальному

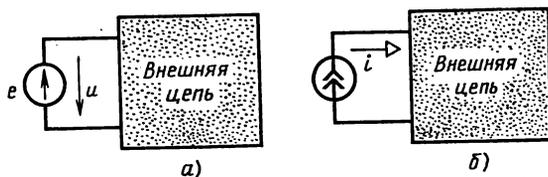


Рис. 1.5. Элементарные активные двухполюсники:

а — источник напряжения; б — источник тока

источнику, внутреннее сопротивление которого пренебрежимо мало по сравнению с входным сопротивлением цепи.

На рис. 1.5,б слева изображен *источник тока* — воображаемое активное устройство, ток  $i$  в котором не зависит от параметров внешней цепи. Такая модель достаточно точно описывает источник, внутреннее сопротивление которого значительно больше сопротивления подключаемой цепи, так что возникающий ток не зависит от свойств цепи.

По исторически сложившейся традиции часто говорят, что внутри источника напряжения действует *электродвижущая сила* (ЭДС), измеряемая в вольтах и направленная так же, как и ток, возникающий под действием этого источника. ЭДС характеризует собой напряженность *стороннего электрического поля*. Это поле обусловлено внешними (неэлектрическими) факторами; вектор его напряженности ориентирован от нижнего зажима, имеющего более низкий потенциал, по направлению к верхнему зажиму. Таким образом, векторы напряженности стороннего и «собственного» квазистационарного поля ориентированы противоположно; стороннее поле совершает положительную работу над зарядами, перемещающимися внутри источника, и поставляет, таким образом, энергию во внешнюю цепь.

Следует отметить, что направления электродвижущей силы  $e$  и напряжения  $u$  на зажимах источника противоположны (см. рис. 1.5,а).

**Управляемые источники.** Так называют активные элементы цепи, параметры которых зависят от напряжений или токов, существующих в других участках этой цепи.

При составлении моделей радиоэлектронных устройств широко используют *источник напряжения, управляемый напряжением* (ИНУН), схематически представленный на рис. 1.6,а. Его эквивалентная схема изображена на рис. 1.6,б. Видно, что со стороны управляющего входа ИНУН имеет бесконечно высокое входное сопротивление, не потребляет тока и не нагружает внешние цепи. Со стороны выхода ИНУН ведет себя подобно идеальному источнику напряжения с пренебрежимо малым выходным сопротивле-

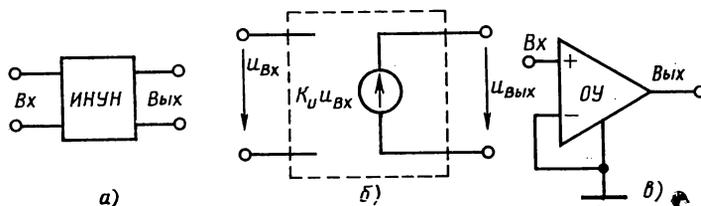


Рис. 1.6. Источник напряжения, управляемый напряжением: а — условное обозначение; б — эквивалентная схема; в — реализация на основе ОУ

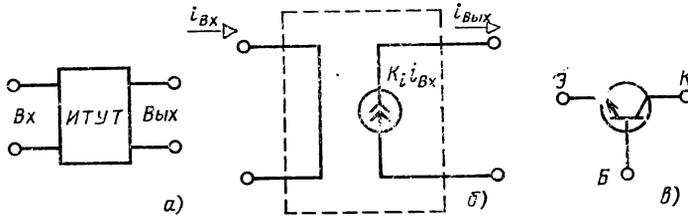


Рис. 1.7. Источник тока, управляемый током:  
 а — условное обозначение; б — эквивалентная схема; в — реализация  
 на основе биполярного транзистора

нием. Безразмерное число  $K_u$  называют коэффициентом усиления напряжения, так что  $u_{\text{вых}} = K_u u_{\text{вх}}$ .

Практически ИНУН реализуют на базе операционных усилителей (ОУ) — интегральных микросхем, широко выпускаемых промышленностью. В схеме, изображенной на рис. 1.6, в, входной сигнал подан на неинвертирующий вход ОУ, помеченный знаком «плюс». Если же использовать инвертирующий вход, то  $u_{\text{вых}} = -K_u u_{\text{вх}}$ .

Другая важная разновидность управляемого активного элемента — источник тока, управляемый током (ИТУТ), изображенный на рис. 1.7, а, б. Такой источник имеет пренебрежимо малое входное и неограниченно большое выходное сопротивление; параметр  $K_i$ , называемый коэффициентом усиления тока, определяет связь между токами на входе и выходе:  $i_{\text{вых}} = K_i i_{\text{вх}}$ .

По своим характеристикам к ИТУТ близок биполярный транзистор, включенный по схеме с общей базой (ОБ) (рис. 1.7, в). Входным током здесь является ток эмиттера  $i_{\text{э}}$ , а выходным — ток коллектора  $i_{\text{к}}$ .

### 1.3. ЗАКОНЫ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Все разнообразие процессов в электрических цепях удается описать с помощью двух фундаментальных принципов, известных под названием законов (правил) Кирхгофа.

**Первый закон Кирхгофа.** Является следствием закона сохранения заряда и формулируется так: алгебраическая сумма токов в ветвях, которые подходят к любому узлу цепи, равна нулю:

$$\sum i = 0. \quad (1.8)$$

Для определенности полагают, что токи, выходящие из узла, положительны, а токи, входящие в узел, отрицательны (рис. 1.8, а).

Свободные электрические заряды не могут накапливаться как в узлах, так и в любых элементах цепи. Поэтому равенство (1.8) справедливо применительно к системе токов в зажимах многополюсника.

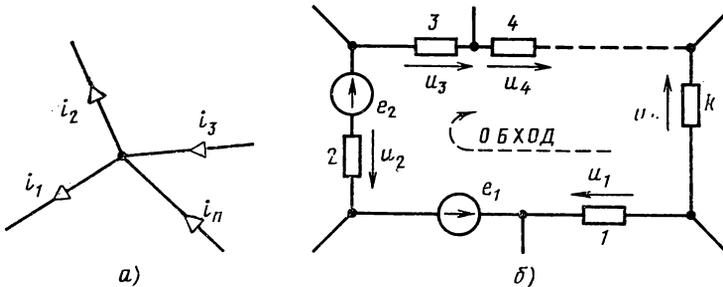


Рис. 1.8. К формулировке законов Кирхгофа:  
 а — суммирование токов в узле; б — суммирование напряжений при обходе контура

**Второй закон Кирхгофа.** Рассмотрим контур, выделенный в некоторой цепи и изображенный на рис. 1.8,б. Контур образован рядом пассивных элементов с известными напряжениями  $u_1, u_2, \dots, u_k$  и некоторым числом идеальных источников напряжения, для которых заданы значения ЭДС  $e_1, e_2, \dots, e_n$ .

Будем совершать обход контура в произвольно выбранном направлении, суммируя все напряжения в соответствии с правилом: перемещение от зажима с более высоким потенциалом к зажиму с меньшим потенциалом *дает вклад со знаком «плюс»*. Так, положительными оказываются напряжения  $u_1, u_3$  и  $u_4$ , стрелки которых ориентированы вдоль направления обхода контура. Напротив, если потенциал вдоль ветви повышается в направлении обхода, то соответствующее напряжение *берется со знаком «минус»*. Именно такими оказываются напряжения  $u_2$  и  $u_k$ , изображенные на рис. 1.8,б.

Рассматривая напряжения на зажимах источников, следует иметь в виду, что, как уже указывалось, знаки напряжения и ЭДС противоположны. Поэтому источник с ЭДС  $e_1$ , ориентированной против направления обхода, дает положительный вклад, а источник с ЭДС  $e_2$ , имеющей противоположную ориентацию, — отрицательный вклад в общую сумму.

Теперь примем во внимание, что электрическое поле в рассматриваемой физической структуре потенциально и поэтому всегда выполняется равенство (1.2). Контурный интеграл есть сумма вкладов от напряжений на пассивных ветвях и на источниках. Таким образом, всегда  $\sum (u - e) = 0$ , откуда получаем формулировку второго закона Кирхгофа

$$\sum_{l=1}^k u_l = \sum_{l=1}^n e_l. \quad (1.9)$$

Принято говорить, что выражение (1.9) устанавливает принцип *электрического равновесия* вдоль произвольного замкнутого

контура. Следует подчеркнуть, что равенство (1.9) выполняется для любого контура, в том числе и когда в образующих его ветвях существуют *разные* по величине токи.

**Классификация электрических цепей.** Для того, чтобы на базе равенств (1.8) и (1.9) составить законченную математическую модель цепной структуры, необходимо указать закон связи между током  $i$  в каждом элементе и возникающим при этом напряжением  $u$ . Классификацию цепей проводят на основании характерных особенностей таких связей.

Говорят, что электрическая цепь является *линейной*, если для каждой ее ветви функция  $i=f(u)$  удовлетворяет условию

$$f(au_1 + bu_2) = af(u_1) + bf(u_2) \quad (1.10)$$

при любых числовых значениях  $a$  и  $b$ . Равенство (1.10) выражает общефизический *принцип суперпозиции*: реакция цепи на сумму воздействий является суммой реакций на отдельные воздействия. Легко убедиться непосредственной подстановкой, что цепь, созданная из идеальных резистивных, индуктивных и емкостных элементов, является линейной.

Если хотя бы для одной ветви равенство (1.10) не выполняется, то такую цепь называют *нелинейной*. Примером нелинейного элемента может служить двухполюсник, для которого  $i=Au^2$ , где  $A$  — постоянный коэффициент. Когда  $u=au_1 + bu_2$ , ток  $i=A(a^2u_1^2 + b^2u_2^2 + 2abu_1u_2)$  помимо квадратичных слагаемых содержит перекрестное слагаемое, пропорциональное произведению  $u_1u_2$ . Таким образом, в нелинейном элементе наблюдается *взаимодействие* двух напряжений. Это приводит к существенному усложнению анализа таких цепей.

Примерами нелинейных элементов, используемых в радиотехнике, служат полупроводниковые приборы (диоды и транзисторы), а также индуктивные катушки с ферромагнитными сердечниками.

Если параметры всех пассивных элементов цепи не зависят от времени, то такую цепь называют *цепью с постоянными параметрами* или *стационарной цепью*. Если же один или несколько пассивных элементов имеют параметры, зависящие от времени, то говорят о *цепи с переменными параметрами* или, короче, о *параметрической цепи*. Параметрическим элементом служит, например, конденсатор, емкость  $C(t)$  которого зависит от времени.

В данном курсе наибольшее внимание будет уделено линейным цепям с постоянными параметрами.

## ВОПРОСЫ

1. Какие поля в физике называют квазистационарными?
2. Что такое принципиальная схема цепи и чем она отличается, например, от технологического чертежа?
3. Дайте определение понятий узла, ветви и контура.

4. В каком случае говорят, что ток в ветви и существующее на ней напряжение согласованы между собой?

5. Чем отличаются между собой элементарные пассивные и активные двухполюсники?

6. Сформулируйте первый и второй законы Кирхгофа. Поясните физический смысл этих законов.

7. На основании каких принципов проводят классификацию электрических цепей?

## 2. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ

### 2.1. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ И ИХ ПАРАМЕТРЫ

Токи и напряжения в радиотехнических цепях представляют собой некоторые *колебания*. Так принято называть процессы, при которых те или иные физические величины изменяются во времени. Особо важную роль играют *гармонические колебания*, происходящие по закону косинуса или синуса.

Если  $u(t)$  — гармоническое напряжение, то математическая модель, описывающая его мгновенные значения, имеет вид

$$u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi). \quad (2.1)$$

Параметр  $U_m$  называют *амплитудой* колебаний. Величина  $\omega$ , называемая *угловой частотой*, связана с периодом колебаний  $T$  соотношением  $\omega = 2\pi/T$ . Аргумент косинуса

$$\psi(t) = \omega t + \varphi \quad (2.2)$$

называют *полной фазой* (для краткости просто *фазой*) гармонического колебания. Полная фаза нарастает во времени по линейному закону. Численное значение  $\omega$  показывает, на сколько радиан увеличивается фаза за 1 секунду. Поэтому угловая частота  $\omega$  имеет физическую размерность рад/с или, короче,  $\text{с}^{-1}$ . Постоянный параметр  $\varphi = \psi(0)$  называют *начальной фазой*. Начальная фаза определяет положение каждого колебания на оси времени (рис. 2.1) и изменяется в пределах отрезка  $[-\pi, \pi]$ .

Рассмотрим совместно два гармонических колебания одинаковой частоты  $\omega$ :

$$u_1(t) = U_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1),$$

$$u_2(t) = U_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Величина  $\delta\varphi_{12} = \varphi_1 - \varphi_2$  представляет собой *сдвиг фаз* между этими колебаниями. Ясно, что  $\delta\varphi_{12} = -\delta\varphi_{21}$ . Если  $\delta\varphi_{12} > 0$ , то говорят, что колебание  $u_1(t)$  *опережает по фазе* колебание  $u_2(t)$ . Если же  $\delta\varphi_{12} < 0$ , то  $u_1(t)$  *отстает по фазе* от  $u_2(t)$ . При  $\delta\varphi_{12} = \pm\pi$  колеба-

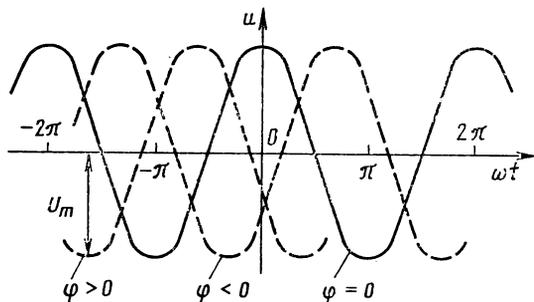


Рис. 2.1. Временные диаграммы гармонических колебаний

ния *противофазны*. При  $\delta\varphi_{12} = \pm\pi/2$  они находятся *во временной квадратуре*.

В практических расчетах обычно используют частоту  $f = \omega / (2\pi)$ , измеряемую в герцах (Гц). Часто применяют кратные единицы — килоггерцы (1 кГц =  $10^3$  Гц), мегагерцы (1 МГц =  $10^6$  Гц) и гигагерцы (1 ГГц =  $10^9$  Гц).

## 2.2. ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОЙ АМПЛИТУДЫ

В теории цепей при описании гармонических колебаний наряду с моделью (2.1), принимающей лишь действительные значения, широко используют модель вида

$$v(t) = U_m \exp[j(\omega t + \varphi)] = U_m \cos(\omega t + \varphi) + jU_m \sin(\omega t + \varphi), \quad (2.3)$$

где  $j = \sqrt{-1}$  — мнимая единица (обозначение, применяемое по традиции). Значения этой функции комплексны, причем, очевидно,  $u(t) = \operatorname{Re} v(t)$ . Функция  $v(t)$  отображается вектором длиной  $U_m$  на комплексной плоскости. Вектор вращается с угловой скоростью  $\omega$  в сторону увеличения аргумента, т. е. против часовой стрелки. В каждый момент времени проекция вектора на горизонтальную ось численно равна мгновенному значению колебания  $u(t)$  (рис. 2.2).

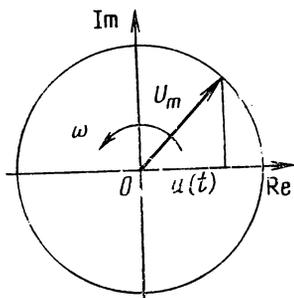


Рис. 2.2. Представление гармонического колебания с помощью вращающегося комплексного вектора

Представим формулу (2.3) так:

$$v(t) = U_m \exp(j\varphi) \exp(j\omega t).$$

Комплексное выражение  $\exp(j\omega t)$  с единичным модулем и линейно нарастающим во времени аргументом называют *фазовым множителем* или *фазором*. Данный множитель отображает вращение вектора.

Постоянное комплексное число

$$\dot{U} = U_m \exp(j\varphi) \quad (2.4)$$

называют *комплексной амплитудой* гармонического колебания (2.1). Здесь и в дальнейшем комплексные амплитуды отмечаются точками над символами. Для того, чтобы перейти от комплексной амплитуды к мгновенному значению гармонического колебания с известной угловой частотой  $\omega$ , следует воспользоваться формулой

$$u(t) = \operatorname{Re}[\dot{U} \exp(j\omega t)]. \quad (2.5)$$

Описание гармонических колебаний с помощью комплексных амплитуд имеет исключительное значение для теории цепей, существенно упрощая теоретический анализ и расчеты.

### 2.3. СЛОЖЕНИЕ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ

Рассмотрим функцию  $u(t)$ , описывающую сумму двух гармонических колебаний с одинаковой частотой  $\omega$ , имеющих амплитуды  $U_{m1}$ ,  $U_{m2}$  и начальные фазы  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  соответственно:

$$u(t) = U_{m1} \cos(\omega t + \varphi_1) + U_{m2} \cos(\omega t + \varphi_2).$$

Введя комплексные амплитуды  $\dot{U}_1 = U_{m1} \exp(j\varphi_1)$  и  $\dot{U}_2 = U_{m2} \exp(j\varphi_2)$ , перепишем эту формулу следующим образом:

$$\begin{aligned} u(t) &= \operatorname{Re}[\dot{U}_1 \exp(j\omega t)] + \operatorname{Re}[\dot{U}_2 \exp(j\omega t)] = \\ &= \operatorname{Re}[(\dot{U}_1 + \dot{U}_2) \exp(j\omega t)]. \end{aligned}$$

Итак, при суммировании получается новое гармоническое колебание с той же частотой и комплексной амплитудой, равной сумме комплексных амплитуд слагаемых:

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2. \quad (2.6)$$

Геометрическая интерпретация сложения колебаний на языке комплексных амплитуд изображена на рис. 2.3. В треугольнике OAB угол при вершине A равен  $\pi + \varphi_1 - \varphi_2$ . Поэтому по теореме косинусов амплитуда суммарного колебания

$$U_m = \sqrt{U_{m1}^2 + U_{m2}^2 + 2U_{m1}U_{m2} \cos(\varphi_2 - \varphi_1)}. \quad (2.7)$$

**Пример 2.1.** На вход сумматора поступают два гармонических напряжения с параметрами:  $U_{m1} = 7$  В,  $U_{m2} = 9$  В,  $\varphi_1 = 30^\circ$ ,  $\varphi_2 = 60^\circ$ . В соответствии с (2.7) амплитуда выходного сигнала

$$U_m = \sqrt{49 + 81 + 126 \cos 30^\circ} = 15,46 \text{ В.}$$

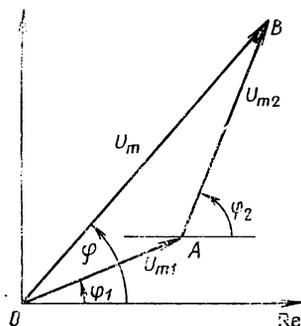


Рис. 2.3. Геометрическая интерпретация сложения гармонических колебаний

Нетрудно показать, что начальная фаза  $\varphi$  результирующего колебания удовлетворяет системе равенств

$$\begin{aligned} U_m \cos \varphi &= U_{m1} \cos \varphi_1 + U_{m2} \cos \varphi_2, \\ U_m \sin \varphi &= U_{m1} \sin \varphi_1 + U_{m2} \sin \varphi_2. \end{aligned} \quad (2.8)$$

Применительно к данным из примера 2.1 правые части (2.8) положительны. Это значит, что  $\cos \varphi > 0$ ,  $\sin \varphi > 0$ . Результирующий вектор  $\dot{U}$  располагается в I-м квадранте; при этом начальная фаза

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{7 \sin 30^\circ + 9 \sin 60^\circ}{7 \cos 30^\circ + 9 \cos 60^\circ} = 46,9^\circ.$$

Формула (2.6) свидетельствует о том, что законы Кирхгофа остаются справедливыми, если вместо мгновенных значений токов и напряжений подставить их комплексные амплитуды.

#### 2.4. КОМПЛЕКСНЫЕ АМПЛИТУДЫ ПРОИЗВОДНОЙ И НЕОПРЕДЕЛЕННОГО ИНТЕГРАЛА

Пусть  $w(t)$  — новое колебание, полученное дифференцированием гармонического колебания вида (2.1):

$$w(t) = \frac{d a}{d t}. \quad (2.9)$$

Несомненно, что функция  $w(t)$  также является гармонической. Чтобы найти ее комплексную амплитуду  $\dot{W}$ , запишем (2.9) так:

$$w(t) = \frac{d}{d t} \operatorname{Re} [\dot{U} \exp(j \omega t)] = \operatorname{Re} [j \omega \dot{U} \exp(j \omega t)].$$

Значит,

$$\dot{W} = j \omega \dot{U}. \quad (2.10)$$

Мнимый множитель  $j = \exp(j\pi/2)$  означает, что аргумент вектора  $\dot{W}$  больше аргумента вектора  $\dot{U}$  на  $\pi/2$  радиан, т. е. колебание  $w(t)$  опережает по фазе колебание  $u(t)$  на  $90^\circ$ , находясь с ним во временной квадратуре (рис. 2.4,а).

Пусть  $f(t)$  — неопределенный интеграл от гармонического колебания  $u(t)$ :

$$\begin{aligned} f(t) &= \int u(t) dt = \int \operatorname{Re} [\dot{U} \exp(j \omega t)] dt = \operatorname{Re} \left[ \int \dot{U} \exp(j \omega t) dt \right] \\ &= \operatorname{Re} \left[ \frac{\dot{U}}{j \omega} \exp(j \omega t) \right]. \end{aligned}$$

Колебание  $f(t)$  является гармоническим с той же частотой  $\omega$ . Его комплексная амплитуда

$$\dot{F} = \dot{U} / (j \omega) \quad (2.11)$$

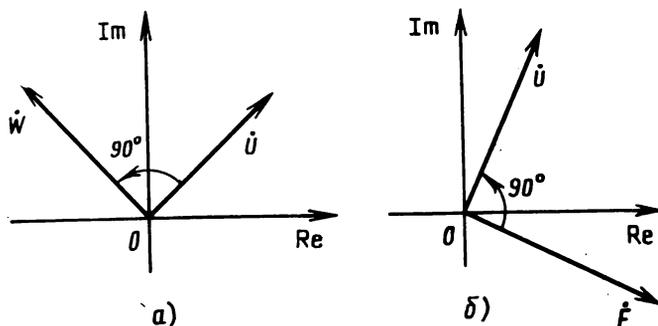


Рис. 2.4. Связь между комплексными амплитудами:  
 а — при дифференцировании; б — при интегрировании гармонического колебания

представляет собой вектор, повернутый на угол  $-\pi/2$  радиан относительно вектора  $\dot{U}$  (рис. 2.4,б). Колебание  $f(t)$  отстает по фазе от колебания  $u(t)$  на угол  $90^\circ$ .

## 2.5. КОМПЛЕКСНОЕ СОПРОТИВЛЕНИЕ И КОМПЛЕКСНАЯ ПРОВОДИМОСТЬ

Пусть имеется двухполюсник, образованный произвольным соединением линейных  $R$ ,  $C$  и  $L$ -элементов. Независимые источники внутри двухполюсника отсутствуют. На зажимах двухполюсника с помощью внешних цепей создано гармоническое напряжение с заданной частотой  $\omega$ . Ток  $i(t)$  через двухполюсник складывается из составляющих, число и характер которых зависят от внутренней конфигурации цепи. Однако всегда этот ток будет гармоническим колебанием с той же самой частотой. Это объясняется тем, что ток и напряжение в каждом элементе либо пропорциональны друг другу ( $R$ -элемент), либо связаны операциями дифференцирования или интегрирования ( $L$  и  $C$ -элементы).

Как и ранее будем считать, что положительные направления напряжения  $u(t)$  и тока  $i(t)$  согласованы между собой.

По определению, отношение комплексной амплитуды приложенного напряжения  $\dot{U}$  к комплексной амплитуде тока  $\dot{I}$  называют комплексным сопротивлением линейного двухполюсника:

$$Z = \dot{U} / \dot{I}. \quad (2.12)$$

Это равенство обобщает закон Ома для произвольного линейного двухполюсника.

Величину обратную  $Z$  называют комплексной проводимостью двухполюсника:

$$Y = 1/Z = \dot{I} / \dot{U}. \quad (2.13)$$

Иногда комплексное сопротивление называют также *полным сопротивлением* или *импедансом* двухполюсника.

В общем случае как  $Z$ , так и  $Y$  зависят от частоты колебаний. В качестве аргументов этих функций принято использовать чисто мнимую переменную  $j\omega$ . Функция  $Z(j\omega)$  или  $Y(j\omega)$  полностью характеризует свойства двухполюсника в режиме гармонических колебаний.

В развернутом виде

$$Z(j\omega) = R(j\omega) + jX(j\omega). \quad (2.14)$$

Величину  $R$  называют *активным сопротивлением*, а  $X$  — *реактивным сопротивлением* двухполюсника.

Аналогично

$$Y(j\omega) = G(j\omega) + jB(j\omega), \quad (2.15)$$

где  $G$  — *активная проводимость*, а  $B$  — *реактивная проводимость* двухполюсной цепи.

Комплексные сопротивление и проводимость связаны друг с другом:

$$Y = \frac{1}{R + jX} = \frac{R - jX}{(R + jX)(R - jX)} = \frac{R - jX}{R^2 + X^2},$$

откуда

$$G = \frac{R}{R^2 + X^2}; \quad B = \frac{-X}{R^2 + X^2}. \quad (2.16)$$

## 2.6. СОПРОТИВЛЕНИЕ И ПРОВОДИМОСТЬ ЭЛЕМЕНТАРНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

**Резистивный элемент.** Здесь мгновенные значения напряжения и тока связаны законом Ома:  $u(t) = Ri(t)$ . Такова же связь и между комплексными амплитудами, поэтому

$$Z_R = R; \quad Y_R = 1/R. \quad (2.17)$$

В гармоническом режиме ток и напряжение на резисторе *изменяются синфазно* (рис. 2.5,а).

**Индуктивный элемент.** Здесь, как известно,  $u = Ldi/dt$ . Воспользовавшись формулой (2.10), находим связь между комплексными амплитудами:  $\dot{U} = j\omega LI$ . Видно, что комплексное сопротивление индуктивного элемента

$$Z_L = jX_L = j\omega L \quad (2.18)$$

является чисто мнимой величиной; если записать

$$Z_L(j\omega) = |Z_L| \exp(j\varphi_L),$$

то модуль сопротивления  $|Z_L| = X_L = \omega L$  пропорционален частоте, а аргумент  $\varphi_L$  постоянен и равен  $\pi/2$ . Последнее означает, что

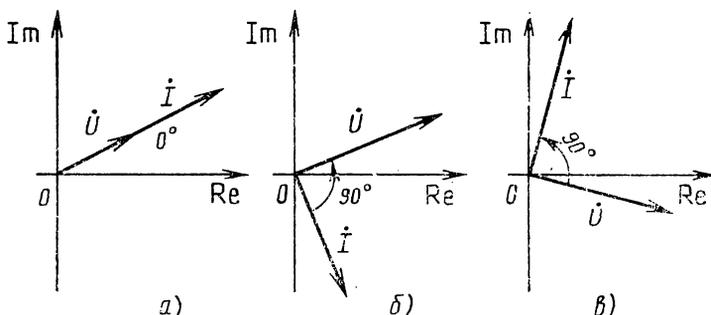


Рис. 2.5. Взаимное положение векторов, отображающих комплексные амплитуды напряжения и тока:  
*а* — в резистивном элементе; *б* — в индуктивном элементе; *в* — в емкостном элементе

напряжение на индуктивном элементе *опережает по фазе ток на  $90^\circ$*  (рис. 2.5,б).

**Емкостный элемент.** Так как здесь  $i = Cdu/dt$ , то по аналогии с предыдущим  $I = j\omega C U$ . Это означает, что комплексная проводимость емкостного элемента

$$Y_C = jB_C = j\omega C, \quad (2.19)$$

откуда комплексное сопротивление

$$Z_C = jX_C = 1/(j\omega C) = -j/(\omega C). \quad (2.20)$$

Так как  $-j = \exp(-j\pi/2)$ , то (2.20) можно записать в виде

$$Z_C = |Z_C| \exp(j\varphi_C).$$

Модуль сопротивления емкостного элемента  $|Z_C| = -X_C = 1/(\omega C)$  обратно пропорционален частоте, в то время как аргумент  $\varphi_C = -\pi/2$  не зависит от частоты. Значит, при любых частотах гармонического воздействия напряжение на емкостном элементе *отстает по фазе от тока на  $90^\circ$*  (рис. 2.5,в).

## 2.7. СОПРОТИВЛЕНИЕ И ПРОВОДИМОСТЬ ПРОСТЕЙШИХ СОЕДИНЕНИЙ ЭЛЕМЕНТОВ

Пусть двухполюсники с комплексными сопротивлениями  $Z_1$  и  $Z_2$  соединены последовательно (рис. 2.6,а). Так как

$$\dot{U} = \dot{U}_1 + \dot{U}_2; \quad I_1 = I_2 = I,$$

то комплексное сопротивление результирующей цепи

$$Z = (\dot{U}_1 + \dot{U}_2)/I = Z_1 + Z_2. \quad (2.21)$$

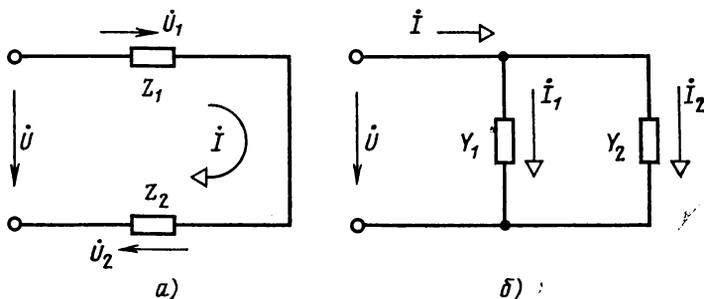


Рис. 2.6. Простейшие соединения элементов цепи:

а — последовательное; б — параллельное

Итак, при последовательном соединении двухполюсников их комплексные сопротивления суммируются. Если имеется  $N$  последовательно соединенных двухполюсников, то, очевидно,

$$Z = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_N. \quad (2.22)$$

Пусть двухполюсники с комплексными проводимостями  $Y_1$  и  $Y_2$  соединены параллельно (рис. 2.6,б). Так как

$$I = I_1 + I_2; \quad \dot{U}_1 = \dot{U}_2 = \dot{U},$$

то комплексная проводимость результирующей цепи

$$Y = (I_1 + I_2) / \dot{U} = Y_1 + Y_2. \quad (2.23)$$

Эта же формула, выраженная через комплексные сопротивления, принимает следующий вид:

$$Z = \frac{Z_1 Z_2}{Z_1 + Z_2}. \quad (2.24)$$

Если двухполюсники с проводимостями  $Y_1, Y_2, \dots, Y_N$  соединены параллельно, то результирующая проводимость цепи

$$Y = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_N. \quad (2.25)$$

## 2.8. РАСЧЕТ ПРОСТЕЙШИХ $RC$ - И $RL$ -ДУХПОЛЮСНИКОВ

На конкретных примерах рассмотрим методы анализа двухполюсных цепей при гармонических внешних воздействиях. Ограничимся цепями достаточно простой структуры, собранными либо из резисторов и конденсаторов ( $RC$ -цепи), либо из резисторов и индуктивных катушек ( $RL$ -цепи).

**Пример 2.2.** Найти комплексное сопротивление  $RC$ -двухполюсника, схема которого изображена на рис. 2.7,а.

В данном случае на основании формулы (2.21)

$$Z = |Z| \exp(j \varphi_Z) = R + 1/(j \omega C) = \frac{1 + j \omega RC}{j \omega C}. \quad (2.26)$$

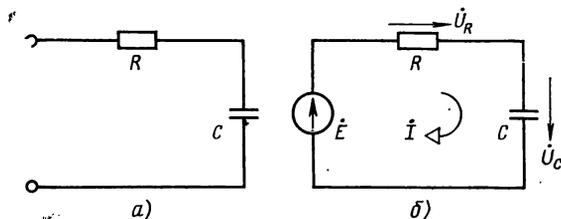


Рис. 2.7. Схемы цепей:  
а — к примеру 2.2; б — к примеру 2.4.

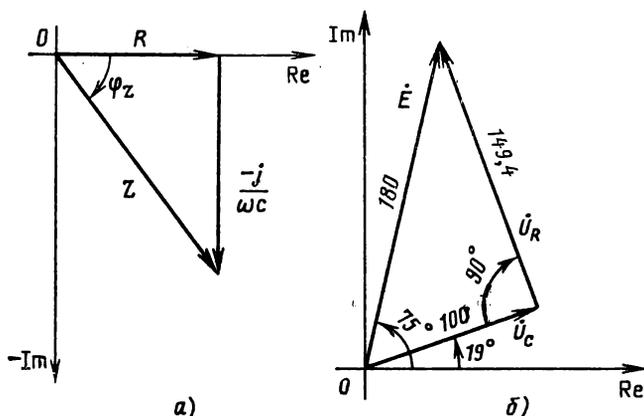


Рис. 2.8. Векторные диаграммы:  
а — к примеру 2.2; б — к примеру 2.4

Сумму двух сопротивлений можно найти графически, складывая соответствующие векторы на комплексной плоскости (рис. 2.8,а). В теории цепей такие чертежи называют *векторными диаграммами*. На основании выражения (2.26) находим, что

$$|Z| = \frac{\sqrt{1 + \omega^2 R^2 C^2}}{\omega C}, \quad (2.27)$$

$$\varphi_Z = -\operatorname{arctg}\left(\frac{1}{\omega RC}\right) = \operatorname{arctg}(\omega RC) - 90^\circ.$$

Из данных формул, во-первых, следует, что при  $\omega \rightarrow 0$  модуль сопротивления  $|Z| \rightarrow \infty$ , так как идеальный конденсатор на постоянном токе эквивалентен разрыву цепи. Если же  $\omega \rightarrow \infty$ , то  $|Z_C| \rightarrow 0$ , так что  $|Z| \rightarrow R$ . На очень высоких частотах данная цепь ведет себя подобно резистору. Во-вторых, на всех частотах величина  $\varphi_Z < 0$ , т. е. напряжение на зажимах последовательной RC-цепи отстает по фазе от тока на угол, зависящий от частоты. Говорят, что сопротивление такой цепи имеет *емкостный характер*.

**Пример 2.3.** Найти значения величин  $|Z|$  и  $\varphi_Z$  для последовательной RC-цепи при следующих исходных данных:  $f = 15$  кГц,  $C = 3,5$  мкФ,  $R = 45$  Ом.

Угловая частота колебаний  $\omega = 2\pi f = 6,283 \cdot 1,5 \cdot 10^3 = 9,425 \cdot 10^3 \text{ с}^{-1}$ . Нетрудно проверить, что произведение  $RC$  имеет физическую размерность времени (с). Значит, произведение  $\omega RC$ , входящее в (2.27), будет безразмерным числом:

$$\omega RC = 9,425 \cdot 10^3 \cdot 45 \cdot 3,5 \cdot 10^{-6} = 1,484.$$

Используя формулы (2.27), находим

$$|Z| = \frac{\sqrt{1 + (1,484)^2}}{9,425 \cdot 10^3 \cdot 3,5 \cdot 10^{-6}} = 54,26 \text{ Ом},$$

$$\varphi_Z = \arctg 1,484 - 90^\circ = -34^\circ, \text{ или } \varphi_Z = -0,593 \text{ рад.}$$

Таким образом, комплексное сопротивление рассматриваемого  $RC$ -двухполюсника на заданной частоте

$$Z = 54,26 \exp(-j 34^\circ) \text{ Ом.}$$

**Пример 2.4.** Последовательная  $RC$ -цепь возбуждается источником гармонического напряжения (рис. 2.7,б), ЭДС которого имеет комплексную амплитуду  $\dot{E} = 180 \exp(j75^\circ)$  мВ. Используя числовые данные из примера 2.3, вычислить комплексные амплитуды тока  $\dot{i}$ , напряжения на резисторе  $\dot{U}_R$  и на конденсаторе  $\dot{U}_C$ , а также найти выражения  $i(t)$ ,  $u_R(t)$  и  $u_C(t)$ , которые описывают соответствующие мгновенные значения.

Комплексная амплитуда тока

$$\dot{i} = \frac{\dot{E}}{Z} = \frac{180}{54,26} \exp[j(75^\circ + 34^\circ)] = 3,32 \exp(j 109^\circ) \text{ мА.}$$

Мгновенные значения тока описываются выражением

$$i(t) = 3,32 \cos(9,425 \cdot 10^3 t + 109^\circ) \text{ мА.}$$

Комплексная амплитуда напряжения на резисторе

$$\dot{U}_R = \dot{i}R = 3,32 \cdot 45 \exp(j 109^\circ) = 149,4 \exp(j 109^\circ) \text{ мВ.}$$

Мгновенные значения этого напряжения изменяются синфазно с мгновенными значениями тока:

$$u_R(t) = 149,4 \cos(9,425 \cdot 10^3 t + 109^\circ) \text{ мВ.}$$

Наконец, комплексная амплитуда напряжения на конденсаторе

$$\dot{U}_C = \frac{\dot{i}}{j\omega C} = \frac{3,32}{9,425 \cdot 10^3 \cdot 3,5 \cdot 10^{-6}} \exp[j(109^\circ - 90^\circ)] = 100 \exp(j 19^\circ) \text{ мВ}$$

имеет фазовый угол, на  $90^\circ$  меньший фазового угла комплексной амплитуды тока. Это означает, что мгновенные значения напряжения на конденсаторе

$$u_C(t) = 100 \cos(9,425 \cdot 10^3 t + 19^\circ) \text{ мВ}$$

отстают по фазе на  $90^\circ$  от мгновенных значений напряжения на резисторе.

Процессы при гармоническом возбуждении  $RC$ -цепи поясняются векторной диаграммой напряжений, которая изображена на рис. 2.8,б.

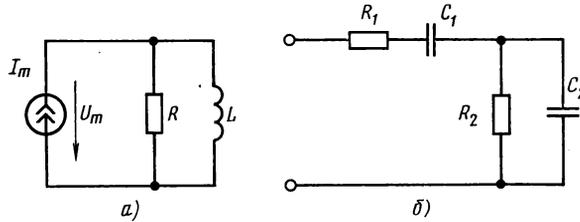


Рис. 2.9. Схемы цепей:

а — к примеру 2.5; б — к примеру 2.6

**Пример 2.5.** *RL*-двухполюсник параллельного типа (рис. 2.9,а) возбуждается источником гармонического тока с частотой  $\omega = 10^5 \text{ с}^{-1}$  и амплитудой  $I_m = 3 \text{ А}$ . Найти амплитуду  $U_m$  возникающего напряжения, если  $R = 5 \text{ Ом}$ ,  $L = 80 \text{ мкГн}$ .

Комплексная проводимость цепи  $Y = 1/R + 1/(j\omega L)$ . Комплексную амплитуду напряжения можно найти по закону Ома:  $\dot{U} = iZ = I/Y$ . Поскольку по условию задачи требуется найти лишь амплитуду напряжения, являющуюся вещественным числом, то достаточно вычислить модуль  $|Y|$  комплексной проводимости и воспользоваться формулой  $U_m = I_m/|Y|$ . Подставляя исходные данные, имеем

$$|Y| = \sqrt{\frac{1}{R^2} + \frac{1}{\omega^2 L^2}} = \sqrt{\frac{1}{25} + \frac{1}{10^{10} \cdot 64 \cdot 10^{-10}}} = 0,236 \text{ См},$$

$$U_m = 3/0,236 = 12,7 \text{ В}.$$

**Пример 2.6.** Получить формулу, описывающую комплексное сопротивление  $Z$  двухполюсника с двумя резисторами и двумя конденсаторами (рис. 2.9,б).

Искомая величина  $Z$  является суммой сопротивлений  $Z_1$  и  $Z_2$  двух более простых цепей, одна из которых образована последовательным, а другая параллельным включением элементов:

$$Z_1 = R_1 + \frac{1}{j\omega C_1} = \frac{1 + j\omega R_1 C_1}{j\omega C_1},$$

$$Z_2 = \frac{R_2/(j\omega C_2)}{R_2 + 1/(j\omega C_2)}.$$

Приводя к общему знаменателю, получаем

$$Z(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 R_1 R_2 C_1 C_2 + j\omega(R_1 C_1 + R_2 C_2 + R_2 C_1)}{j\omega C_1(1 + j\omega R_2 C_2)}. \quad (2.28)$$

Следует заметить, что при  $\omega \rightarrow 0$   $|Z| \rightarrow \infty$ , так как конденсаторы на постоянном токе эквивалентны разрывам цепи. Если же  $\omega \rightarrow \infty$ , то в числителе и знаменателе формулы (2.28) следует сохранить лишь члены, пропорциональные  $\omega^2$ . Сокращая, убеждаемся, что  $Z(j\infty) = R_1$ . Это объясняется тем, что при  $\omega \rightarrow \infty$  конденсаторы эквивалентны коротким замыканиям.

**Пример 2.7.** Найти численное значение комплексного сопротивления  $Z$  цепи, рассмотренной в примере 2.6, полагая, что  $C_1 = 2 \text{ нФ}$ ;  $C_2 = 4 \text{ нФ}$ ;  $R_1 = 3 \text{ кОм}$ ;  $R_2 = 1 \text{ кОм}$ ;  $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$ .

Подставляя исходные данные в (2.28), находим

$$Z = \frac{1 - 10^{12} \cdot 2,4 \cdot 10^{-11} + j 10^6 \cdot 1,2 \cdot 10^{-5}}{j 10^6 \cdot 2 \cdot 10^{-9} (1 + j 10^6 \cdot 4 \cdot 10^{-6})} = \frac{-23 + j 12}{j 2 \cdot 10^{-3} (1 + j 4)} \text{ Ом.} \quad (2.29)$$

Модуль сопротивления двухполюсника

$$|Z| = \frac{\sqrt{23^2 + 12^2}}{2 \cdot 10^{-3} \sqrt{1 + 4^2}} = 3146 \text{ Ом.}$$

Чтобы найти аргумент  $Z$ , следует прежде всего вычислить аргументы числителя и знаменателя в выражении (2.29), обратив внимание на то, что числитель является комплексным числом из 2-го квадранта:

$$\varphi_{\text{числ}} = 90^\circ + \text{arctg}(23/12),$$

$$\varphi_{\text{знам}} = 90^\circ + \text{arctg} 4.$$

Отсюда находим, что  $\varphi_Z = \varphi_{\text{числ}} - \varphi_{\text{знам}} = \text{arctg}(23/12) - \text{arctg} 4 = -13,5^\circ$ .

Итак, на заданной частоте комплексное сопротивление цепи  $Z = 3146 \times \times \exp(-j13,5^\circ)$  Ом. Поскольку  $\varphi_Z < 0$ , то приложенное напряжение отстает по фазе от тока и сопротивление двухполюсника имеет емкостный характер.

## 2.9. МОЩНОСТЬ ГАРМОНИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В ДВУХПОЛЮСНИКЕ

Пусть на зажимах линейного стационарного двухполюсника существует гармоническое напряжение  $u(t) = U_m \cos \omega t$  (начальная фаза для простоты записи полагается равной нулю). При этом в двухполюснике возникает ток  $i(t) = I_m \cos(\omega t + \varphi)$ , положительное направление которого считается согласованным с положительным направлением напряжения. Угол  $\varphi$  зависит от свойств двухполюсника и может быть любым.

Мгновенная мощность электромагнитного процесса в двухполюснике

$$\begin{aligned} p(t) &= u(t) i(t) = U_m I_m \cos \omega t \cdot \cos(\omega t + \varphi) = \\ &= \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi) + \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi \end{aligned} \quad (2.30)$$

в различные моменты времени может быть как положительной, так и отрицательной. Эта мощность положительна, если в рассматриваемый момент времени  $t$  направления тока и напряжения совпадают. Двухполюсник при этом потребляет энергию от внешних цепей. Если же направления тока и напряжения противоположны, то мгновенная мощность отрицательна и поток мощности направлен от двухполюсника к внешним цепям. Сказанное иллюстрируется графиками функций  $u(t)$ ,  $i(t)$  и  $p(t)$ , которые приведены на рис. 2.10 для случая  $\varphi = 60^\circ$ .

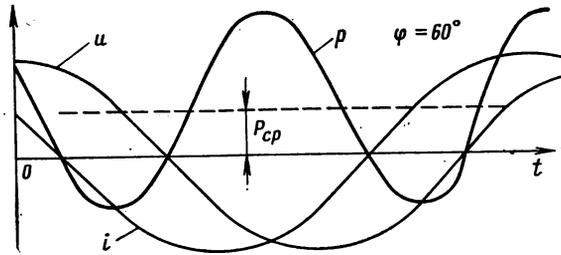


Рис. 2.10. Временные диаграммы напряжения, тока и мгновенной мощности в двухполюснике

Чтобы найти *среднюю мощность*  $P_{\text{ср}}$  колебаний в двухполюснике, следует усреднить функцию  $p(t)$  за период колебаний  $T$ :

$$P_{\text{ср}} = \frac{1}{T} \int_0^T p(t) dt. \quad (2.31)$$

Первое слагаемое в правой части (2.30) является *колеблющейся мощностью*, которая изменяется во времени с удвоенной частотой:

$$p_{\text{кол}}(t) = \frac{U_m I_m}{2} \cos(2\omega t + \varphi). \quad (2.32)$$

Очевидно, что вклад этого слагаемого в среднюю мощность равен нулю, так что

$$P_{\text{ср}} = \frac{U_m I_m}{2} \cos \varphi. \quad (2.33)$$

Если сдвиг фаз между током и напряжением лежит в интервале  $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ , то  $P_{\text{ср}} > 0$  и двухполюсник в среднем потребляет мощность, являясь нагрузкой для внешних цепей. Такой двухполюсник называют *пассивной цепью*.

Если  $\varphi = \pm\pi/2$ , то  $\cos \varphi = 0$  и в соответствии с (2.33)  $P_{\text{ср}} = 0$ . Двухполюсник с такими свойствами является *реактивной цепью*. В течение одного полупериода колебаний реактивная цепь потребляет мощность [ $p(t) > 0$ ], а в течение другого полупериода мощность поступает обратно во внешние цепи [ $p(t) < 0$ ].

Наконец, если выполняется одно из неравенств  $-\pi < \varphi < -\pi/2$  или  $\pi/2 < \varphi < \pi$ , то  $\cos \varphi < 0$  и поэтому  $P_{\text{ср}} < 0$ . Подобный двухполюсник является *активной цепью* и действует подобно генератору, создавая усредненный поток мощности во внешние цепи.

## 2.10. ПОНЯТИЕ КОМПЛЕКСНОЙ МОЩНОСТИ

На основании очевидного свойства комплексных чисел мгновенные значения напряжения  $u(t) = \text{Re}[\dot{U} \exp(j\omega t)]$  и тока  $i(t) =$

$= \operatorname{Re}[I \exp(j\omega t)]$  можно записать следующим образом:

$$u(t) = \frac{1}{2} (\dot{U} e^{j\omega t} + \dot{U}^* e^{-j\omega t}), \quad (2.34)$$

$$i(t) = \frac{1}{2} (\dot{I} e^{j\omega t} + \dot{I}^* e^{-j\omega t}),$$

где значок \* обозначает комплексно-сопряженную величину. Тогда мгновенная мощность  $p(t)$  оказывается связанной с комплексными амплитудами напряжения и тока:

$$\begin{aligned} p(t) = u(t) i(t) &= \frac{1}{4} [\dot{U} \dot{I}^* + \dot{U}^* \dot{I} + \dot{U} \dot{I} e^{j2\omega t} + \dot{U}^* \dot{I}^* e^{-j2\omega t}] = \\ &= \frac{1}{2} [\operatorname{Re}(\dot{U} \dot{I}^*) + \operatorname{Re}(\dot{U} \dot{I} e^{j2\omega t})]. \end{aligned} \quad (2.35)$$

Сравнивая с (2.33), убеждаемся, что не зависящая от времени *активная мощность*

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{U} \dot{I}^*) \quad (2.36)$$

является вещественной частью так называемой *комплексной мощности*

$$S = \frac{1}{2} \dot{U} \dot{I}^* = \frac{1}{2} U_m I_m \exp[j(\varphi_u - \varphi_i)], \quad (2.37)$$

где  $\varphi_u$  и  $\varphi_i$  — аргументы (начальные фазы) комплексных амплитуд напряжения и тока соответственно.

Формально можно ввести также *реактивную мощность* процесса в двухполюснике

$$Q = \frac{1}{2} \operatorname{Im}(\dot{U} \dot{I}^*), \quad (2.38)$$

такую, что  $S = P + jQ$ .

Абсолютное значение величины  $S$  называют *полной мощностью* и измеряют в особых единицах — вольт-амперах (ВА).

### 2.11. ЭФФЕКТИВНЫЕ ЗНАЧЕНИЯ НАПРЯЖЕНИЯ И ТОКА

Пусть двухполюсник представляет собой резистивный элемент с сопротивлением  $R$ . По закону Ома  $i = \dot{U}/R$ ; на основании выражений (2.36) и (2.38) активная мощность

$$P = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \frac{\dot{U} \dot{U}^*}{R} \right) = \frac{U_m^2}{2R},$$

в то время как реактивная мощность  $Q = 0$ . *Эффективным (действующим) значением* гармонического напряжения называют такое

значение постоянного напряжения, при котором в резистивном элементе выделяется такая же мощность. На основании равенства

$$U_m^2 / (2R) = U^2 / R \quad (2.39)$$

получаем, что эффективное значение напряжения

$$U = U_m / \sqrt{2} = 0,707 U_m. \quad (2.40)$$

Различие между амплитудными и действующими значениями напряжения необходимо учитывать на практике. Например, эффективное значение напряжения в сети промышленной частоты 50 Гц составляет 220 В. Амплитуда этого напряжения  $U_m = 220 / 0,707 = 311$  В. Поэтому подключать к зажимам сети конденсатор с предельно допустимым (пробивным) напряжением 250 В нельзя, он неизбежно будет выведен из строя.

Следует иметь в виду, что шкалы большинства стрелочных вольтметров переменного напряжения проградуированы именно в эффективных значениях. Чтобы измерить амплитуду напряжения, показание вольтметра нужно умножить на 1,414.

Аналогично определяют эффективное значение тока  $I = 0,707 I_m$ .

### 2.12. ЛИНЕЙНЫЙ ДВУХПОЛЮСНИК КАК НАГРУЗКА. СОГЛАСОВАНИЕ КОМПЛЕКСНЫХ СОПРОТИВЛЕНИЙ

Пусть генератор гармонических колебаний, состоящий из источника ЭДС с комплексной амплитудой  $\dot{E}$  и некоторого двухполюсника с сопротивлением  $Z_G$ , нагружен на пассивный двухполюсник с комплексным сопротивлением  $Z_H$  (рис. 2.11, а).

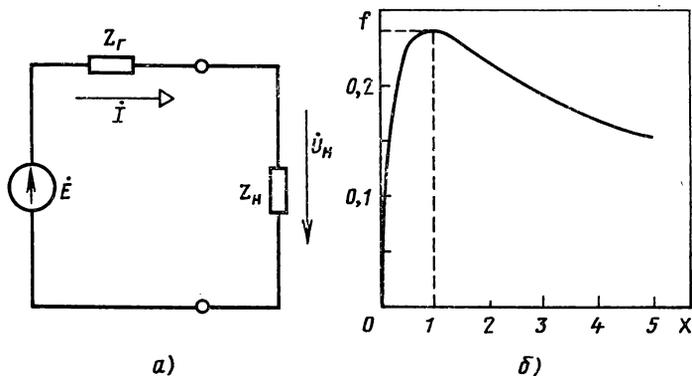


Рис. 2.11. Работа генератора на нагрузку:

а — схема; цепи; б — зависимость рассеиваемой мощности от нормированного сопротивления нагрузки

Найдем среднюю (активную) мощность  $P_{\text{ср.н}}$ , выделяемую в нагрузке. Для этого вычислим комплексные амплитуды тока и напряжения на нагрузке

$$\dot{I} = \frac{\dot{E}}{Z_{\Gamma} + Z_{\text{н}}}; \quad \dot{U}_{\text{н}} = \frac{\dot{E} Z_{\text{н}}}{Z_{\Gamma} + Z_{\text{н}}},$$

откуда комплексная мощность в нагрузке

$$S_{\text{н}} = \frac{1}{2} \dot{U}_{\text{н}} \dot{I}^* = \frac{1}{2} \frac{\dot{E} \dot{E}^* Z_{\text{н}}}{(Z_{\Gamma} + Z_{\text{н}})(Z_{\Gamma} + Z_{\text{н}})^*} = \frac{1}{2} \frac{E_m^2 (R_{\text{н}} + jX_{\text{н}})}{(R_{\Gamma} + R_{\text{н}})^2 + (X_{\Gamma} + X_{\text{н}})^2}. \quad (2.41)$$

Соответствующая средняя мощность

$$P_{\text{ср.н}} = \text{Re } S_{\text{н}} = \frac{1}{2} \frac{E_m^2 R_{\text{н}}}{(R_{\Gamma} + R_{\text{н}})^2 + (X_{\Gamma} + X_{\text{н}})^2}. \quad (2.42)$$

Поставим задачу так подобрать сопротивление  $Z_{\text{н}}$ , чтобы мощность  $P_{\text{ср.н}}$  стала максимально возможной. Так как реактивная составляющая сопротивления может иметь любой знак, то, очевидно, следует потребовать, чтобы реактивные части сопротивлений нагрузки и генератора компенсировали друг друга:

$$X_{\text{н}} = -X_{\Gamma}. \quad (2.43)$$

При таком выборе реактивного сопротивления нагрузки

$$P_{\text{ср.н}} = \frac{1}{2} \frac{E_m^2 R_{\text{н}}}{(R_{\Gamma} + R_{\text{н}})^2}. \quad (2.44)$$

Введем безразмерное отношение сопротивлений  $x = R_{\text{н}}/R_{\Gamma}$  и перепишем (2.44) следующим образом:

$$P_{\text{ср.н}} = \frac{1}{2} \frac{E_m^2}{R_{\Gamma}} \frac{x}{(1+x)^2}. \quad (2.45)$$

На рис. 2.11,б изображен график функции  $f(x) = x/(1+x)^2$ . Видно, что эта функция имеет единственный максимум, равный 0,25 при значении  $x=1$ , т. е. при  $R_{\text{н}}=R_{\Gamma}$ .

Итак, доказано, что максимально возможная средняя мощность выделяется в нагрузке в режиме согласования, когда

$$Z_{\text{н}} = Z_{\Gamma}^* = R_{\Gamma} - jX_{\Gamma}. \quad (2.46)$$

При этом

$$P_{\text{ср.н.макс}} = E_m^2 / (8R_{\Gamma}). \quad (2.47)$$

**Пример 2.8.** Пусть генератор, имеющий амплитуду ЭДС  $E_m = 15$  В и внутреннее сопротивление  $Z_{\Gamma} = 3 - j8$  Ом, подключен к нагрузке с комплексным сопротивлением  $Z_{\text{н}} = 9 - j2$  Ом. Найти среднюю мощность в нагрузке  $P_{\text{ср.н}}$ , а также мощность  $P_{\text{ср.н.макс}}$  в режиме согласования.

По формулам (2.44) и (2.47) вычисляем

$$P_{\text{ср.н}} = \frac{225 \cdot 9}{2(144 + 100)} = 4,15 \text{ Вт},$$

$$P_{\text{ср.н.мах}} = \frac{225}{8 \cdot 3} = 8,37 \text{ Вт}.$$

Таким образом, в данном случае переход к согласованному режиму обеспечивает более чем двухкратное возрастание мощности в нагрузке.

Рассмотрим задачу о КПД системы генератор — двухполюсник. Будем полагать, что условие (2.43) выполнено. Тогда комплексная амплитуда тока  $I = \dot{E} / (R_{\Gamma} + R_{\text{н}})$ . Видно, что ток синфазен с источником ЭДС и поэтому источник развивает только активную мощность со средним значением

$$P_{\text{ср.г}} = - \frac{1}{2} \frac{E_m^2}{R_{\Gamma} + R_{\text{н}}}. \quad (2.48)$$

Отрицательный знак указывает на то, что напряжение на источнике и ток в нем противоположны по знаку и поэтому источник не потребляет, а поставляет энергию в цепь. Используя выражение (2.44), находим, что КПД

$$\eta = P_{\text{ср.н}} / (-P_{\text{ср.г}}) = R_{\text{н}} / (R_{\Gamma} + R_{\text{н}}). \quad (2.49)$$

Можно заметить, что  $\eta \rightarrow 1$  при  $R_{\text{н}} \rightarrow \infty$ . В режиме согласования  $\eta = 0,5$ , так как здесь ровно половина мощности, развиваемой источником, выделяется на внутреннем сопротивлении генератора.

### 2.13. ЦЕПИ С ИНДУКТИВНОЙ СВЯЗЬЮ

Так принято называть цепи, которые содержат индуктивные элементы, связанные общим магнитным потоком.

Рассмотрим катушки 1 и 2, намотанные на одном сердечнике (рис. 2.12,а). Можно указать *одноименные* зажимы каждой катушки, которые обладают таким свойством: магнитные потоки в сердечнике, вызванные токами, которые поступают извне по направлению к одноименным зажимам, складываются в одном направлении. Если в одной из катушек изменить чередование зажимов, то эти магнитные потоки вычитаются. Легко убедиться, что начальные зажимы катушек, помеченные на рисунке значками  $H_1$  и  $H_2$ , являются одноименными.

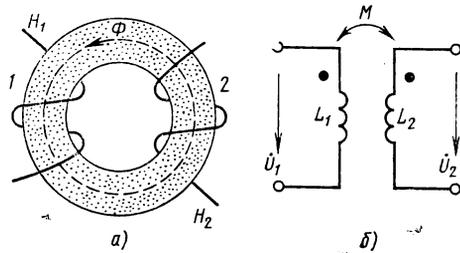


Рис. 2.12. Катушки с индуктивной связью: а — физическая реализация; б — принципиальная схема цепи при согласном включении

На принципиальных схемах одноименные зажимы катушек принято помечать точками. Один из двух возможных способов включения катушек называют *согласным* (рис. 2.12,б). При другом порядке следования зажимов одной из катушек включение называют *встречным*.

Пусть катушки включены согласно. Если в катушке  $L_1$  создан переменный ток  $i_1(t)$ , а зажимы катушки  $L_2$  разомкнуты, то на них возникает индуцированное напряжение

$$u_2(t) = M \frac{di_1}{dt}, \quad (2.50)$$

где  $M$  — коэффициент взаимной индукции, который имеет размерность индуктивности, зависит от числа витков катушек, их взаимного расположения и магнитной проницаемости материала сердечника.

В теории электромагнетизма доказывается, что индукционные явления не зависят от того, какая из катушек возбуждается внешними источниками; если катушки  $L_1$  и  $L_2$  поменять местами, то  $u_1(t) = M di_2/dt$ .

**Последовательное соединение индуктивно-связанных катушек.** Пусть катушки  $L_1$  и  $L_2$  включены последовательно, причем их одноименные зажимы соединены так, как показано на рис. 2.13,а.

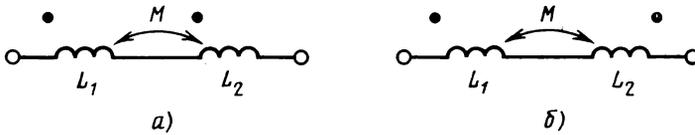


Рис. 2.13. Последовательное соединение связанных индуктивных катушек:

а — согласное включение; б — встречное включение

Общее напряжение выразится при этом следующим образом:

$$u(t) = L_1 \frac{di}{dt} + L_2 \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} + M \frac{di}{dt} = (L_1 + L_2 + 2M) \frac{di}{dt}.$$

Таким образом, общая индуктивность при согласном включении катушек

$$L = L_1 + L_2 + 2M. \quad (2.51)$$

Аналогично, если катушки включены встречно (рис. 2.13,б), то

$$L = L_1 + L_2 - 2M. \quad (2.52)$$

Из математики известно, что сумма любых положительных вещественных чисел  $a$  и  $b$  не меньше их удвоенного среднеквадратического значения:  $a + b \geq 2\sqrt{ab}$ ; знак равенства имеет место при  $a = b$ . Используем это свойство для анализа формул (2.51) и (2.52).

Ясно, что индуктивность  $L$  ни при каких условиях не может стать отрицательной. Поэтому всегда  $M \leq \sqrt{L_1 L_2}$ . Мерой индуктивной связи двух катушек служит безразмерный коэффициент связи

$$k_c = M / \sqrt{L_1 L_2}. \quad (2.53)$$

Значения этого коэффициента лежат в пределах  $0 \leq k_c \leq 1$ . Величина  $k_c$  равна единице при *полной связи*, когда весь магнитный поток, создаваемый одной из катушек, сцеплен со второй катушкой. На основании (2.51) общая индуктивность согласно включенных катушек с полной связью

$$L = L_1 + L_2 + 2 \sqrt{L_1 L_2} = (\sqrt{L_1} + \sqrt{L_2})^2. \quad (2.54)$$

Отсюда следует важный вывод о том, что индуктивность применяемых на практике катушек, которые наматываются достаточно плотно и поэтому имеют пренебрежимо малый поток рассеяния, пропорциональна квадрату числа витков. Действительно, можно считать, что катушка с общим числом витков  $w$  является последовательным соединением двух согласно включенных катушек с числами витков  $w_1$  и  $w_2$ , причем  $w = w_1 + w_2$ . Допустим, что индуктивности этих катушек  $L_1 = a^2 w_1^2$  и  $L_2 = a^2 w_2^2$ , где  $a^2$  — некоторый коэффициент пропорциональности. Тогда равенство (2.54) выполняется тождественно:

$$a^2 w^2 = (a w_1 + a w_2)^2 = a^2 (w_1 + w_2)^2.$$

#### 2.14. ТРАНСФОРМИРУЮЩИЕ СВОЙСТВА ИНДУКТИВНО-СВЯЗАННЫХ ЦЕПЕЙ

Широкое применение в радиоэлектронике цепей с индуктивной связью обусловлено тем, что с их помощью осуществляется преобразование, или, как часто говорят, трансформация уровней комплексных сопротивлений, а также токов и напряжений.

Рассмотрим трансформатор, изображенный на рис. 2.14,а. Здесь катушка  $L_1$ , называемая *первичной обмоткой* трансформатора, подключена к внешним цепям, создающим в ней гармонический ток

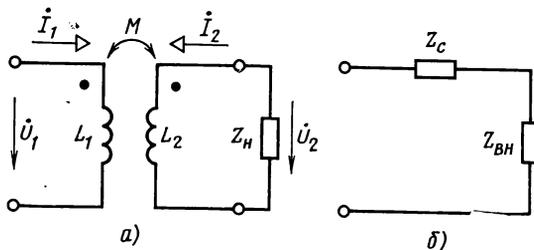


Рис. 2.14. Трансформатор:

а — принципиальная схема; б — к определению понятия вносимого сопротивления

с известной частотой  $\omega$  и комплексной амплитудой  $I_1$ . Вторичная обмотка (катушка  $L_2$ ) замкнута на нагрузку с комплексным сопротивлением  $Z_H$ .

Учитывая, что обмотки включены согласно, на основании 2-го закона Кирхгофа при выбранном положительном направлении токов имеем два уравнения:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= j\omega L_1 I_1 + j\omega M I_2, \\ 0 &= j\omega L_2 I_2 + j\omega M I_1 + Z_H I_2. \end{aligned} \quad (2.55)$$

Из второго уравнения следует, что токи в обмотках связаны равенством

$$I_2 = \frac{-j\omega M}{j\omega L_2 + Z_H} I_1, \quad (2.56)$$

откуда на основании первого уравнения получаем выражение, определяющее процессы в первичной обмотке трансформатора:

$$\dot{U}_1 = \left( j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_H} \right) I_1. \quad (2.57)$$

**Трансформация комплексных сопротивлений.** Из формулы (2.57) следует, что входное сопротивление трансформатора со стороны первичной обмотки (рис. 2.14,б)

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{I_1} = j\omega L_1 + \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_H} \quad (2.58)$$

представляет собой сумму двух сопротивлений: *собственного сопротивления* первичной обмотки  $Z_c = j\omega L_1$  и так называемого *вносимого сопротивления*

$$Z_{вн} = \frac{\omega^2 M^2}{j\omega L_2 + Z_H}, \quad (2.59)$$

которое учитывает влияние контура вторичной обмотки. Ясно, что в общем случае сопротивления  $Z_{вх}$  и  $Z_H$  отличаются друг от друга.

**Пример 2.9.** Пусть известно, что  $\omega = 10^6 \text{ с}^{-1}$ ,  $L_1 = 50 \text{ мкГн}$ ,  $L_2 = 200 \text{ мкГн}$ ,  $M = 80 \text{ мкГн}$  (т. е.  $k_c = 0,8$ ). Нагрузкой является конденсатор емкостью  $C_H = 4 \text{ нФ}$ , имеющий на данной частоте комплексное сопротивление  $Z_H = 1/(j\omega C_H) = -j250 \text{ Ом}$ . Вычислить входное сопротивление трансформатора.

По формуле (2.58) находим

$$Z_{вх} = j50 + \frac{10^{12} \cdot 6,4 \cdot 10^{-9}}{j(200 - 250)} = j178 \text{ Ом}.$$

Таким образом, данный трансформатор, будучи нагружен на емкость, имеет входное сопротивление индуктивного характера.

**Частные случаи.** Пусть трансформатор работает в режиме холостого хода на выходе, т. е. при  $Z_H = \infty$ . Тогда из (2.59) следует, что  $Z_{вн} = 0$  и поэтому  $Z_{вх.хх} = j\omega L_1$ .

Если же на выходе создан режим *короткого замыкания*, т. е.  $Z_H = 0$ , то

$$Z_{\text{вх.кз}} = j\omega L_1 - j\omega M^2/L_2 = j\omega L_1(1 - k_c^2). \quad (2.60)$$

Видно, что здесь входное сопротивление имеет индуктивный характер, причем модуль этого сопротивления всегда меньше модуля сопротивления в режиме холостого хода за счет действия напряжения взаимной индукции, наводимого в первичной обмотке при возникновении тока во вторичной обмотке. При полной связи, когда  $k_c = 1$ ,  $Z_{\text{вх.кз}} = 0$ .

Рассмотрим наконец случай трансформатора с полной связью ( $M^2 = L_1 L_2$ ), индуктивные сопротивления обмоток которого велики по сравнению с модулем комплексного сопротивления нагрузки, в частности,  $\omega L_2 \gg |Z_H|$ . Тогда формулу (2.58) можно переписать так:

$$Z_{\text{вх}} = j\omega L_1 - \frac{j\omega L_1}{1 - jZ_H/(\omega L_2)}.$$

Воспользуемся тем, что при малых  $x$  дробь  $1/(1-x) \approx 1+x$ . Тогда

$$Z_{\text{вх}} \approx j\omega L_1 - j\omega L_1 \left( 1 + j \frac{Z_H}{\omega L_2} \right) = Z_H \frac{L_1}{L_2}. \quad (2.61)$$

Введем коэффициент трансформации устройства

$$k_{\text{тр}} = \omega_2/\omega_1. \quad (2.62)$$

Так как индуктивности катушек пропорциональны квадратам числа витков, то

$$Z_{\text{вх}} \approx Z_H/k_{\text{тр}}^2. \quad (2.63)$$

Например, если  $\omega_1 = 50$ ,  $\omega_2 = 300$ , то  $k_{\text{тр}} = 6$ . Такой трансформатор, нагруженный на резистор  $R_H = 20$  Ом, имеет чисто активное входное сопротивление  $R_{\text{вх}} = 20/36 = 0,56$  Ом.

В теории цепей идеальным трансформатором называют воображаемое устройство, связь в котором является полной, а индуктивности бесконечно велики. Для идеального трансформатора формулы (2.61) и (2.63) становятся точными.

**Трансформация токов и напряжений.** Отношение комплексных амплитуд токов в обмотках устанавливается формулой (2.56):

$$\frac{j_2}{j_1} = \frac{-j\omega M}{j\omega L_2 + Z_H}; \quad (2.64)$$

отрицательный знак означает, что вторичный ток фактически направлен в противоположную сторону по отношению к той, которая показана на рис. 2.14,а.

Если трансформатор по своим параметрам близок к идеальному, то отношение токов перестает зависеть от сопротивления нагрузки:

$$\frac{i_2}{i_1} \approx -\frac{M}{L_2} = -\sqrt{\frac{L_1}{L_2}} = -\frac{1}{k_{тр}}. \quad (2.65)$$

Если трансформатор работает на достаточно высокоомную нагрузку, то влияние тока вторичной обмотки на работу устройства будет пренебрежимо мало. В соответствии с первым уравнением из (2.55)  $i_1 = \dot{U}_1 / (j\omega L_1)$  и поэтому комплексная амплитуда выходного напряжения  $\dot{U}_2 = j\omega M i_1 = (M/L_1) \dot{U}_1$ . Видно, что при полной связи в данном случае

$$\frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \approx \frac{M}{L_1} = \sqrt{\frac{L_2}{L_1}} = k_{тр}. \quad (2.66)$$

Итак, идеальный трансформатор, увеличивая, например, напряжение, во столько же раз понижает ток и наоборот.

### ВОПРОСЫ

1. Как осуществляется переход от комплексных амплитуд гармонических колебаний к мгновенным значениям?
2. Как, зная комплексную амплитуду гармонического сигнала, найти комплексные амплитуды производной и интеграла от этого колебания?
3. Перечислите свойства комплексных сопротивлений индуктивного и емкостного элементов.
4. Как выразить среднюю мощность через комплексные амплитуды тока и напряжения? Дайте определение понятий комплексной и реактивной мощностей.
5. Как формулируется условие согласованного режима двухполюсника?
6. Поясните физический смысл согласного и встречного включения индуктивных катушек.
7. Какой трансформатор называют идеальным? Как преобразуются комплексные сопротивления, напряжения и токи с помощью идеального трансформатора?

## 3. МЕТОДЫ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ

В дальнейшем будем называть *сложными* такие электрические цепи, которые содержат более одного контура. Полный анализ сложной цепи заключается в нахождении токов всех ветвей или, что равноценно, в определении потенциалов всех ее узлов.

Некоторые сложные цепи удается упростить, выполняя, например, эквивалентные преобразования последовательно и параллельно соединенных ветвей, как это описывалось в гл. 2. Однако для

произвольной цепи необходимо применять общие методы, вытекающие из первого и второго законов Кирхгофа.

### 3.1. ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ ЗАКОНОМЕРНОСТИ В СЛОЖНЫХ ЦЕПЯХ

Рассмотрим некоторую сложную цепь, которая содержит  $N_y$  узлов и  $N_v$  ветвей. Электрический режим цепи будет полностью определен, если удастся найти токи во всех ветвях.

Докажем из геометрических соображений, что число независимых уравнений, получаемых на основании законов Кирхгофа [формулы (1.8) и (1.9)], как раз достаточно для решения поставленной задачи.

Для этого заметим, что по первому закону Кирхгофа получается  $N_y$  алгебраических уравнений относительно токов ветвей. При этом каждый ток одновременно входит в два уравнения с разными знаками. Как следствие, сумма всех токов по всем узлам автоматически обращается в нуль. Это дает одно условие связи, налагаемое на токи, так что общее число *независимых уравнений* по первому закону Кирхгофа составляет  $N_y - 1$ .

Уравнения по второму закону Кирхгофа записываются для независимых замкнутых контуров. Докажем основное положение геометрии сложных цепей: число независимых контуров  $N_k$  определяется по формуле

$$N_k = N_v - N_y + 1. \quad (3.1)$$

Доказательство проведем по индукции. Для одноконтурной цепи (рис. 3.1, а), когда  $N_v = 2$  и  $N_y = 2$ , равенство (3.1) очевидно. Если добавить еще один узел (рис. 3.1, б), то число контуров увеличивается *на единицу* за счет добавления *двух* новых ветвей. Очевидно, что формула (3.1) остается справедливой по-прежнему. Добавляя новые узлы и ветви, можно получить любую сложную цепь; общее число независимых уравнений составит при этом  $N_y - 1 + N_v - N_y + 1 = N_v$ , что как раз достаточно для нахождения всех токов в ветвях.

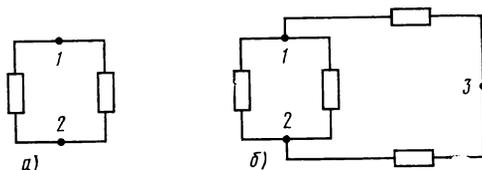


Рис. 3.1. К определению числа независимых уравнений:

а — одноконтурная цепь; б — двухконтурная цепь

**Пример 3.1.** Составить уравнения относительно токов в ветвях для цепи, схема которой изображена на рис. 3.2. Цепь образована резисторами  $R_1 \rightarrow R_5$  и питается источниками ЭДС  $E_1$  и  $E_2$  (здесь и в дальнейшем заглавными буквами обозначаются величины, постоянные во времени).

Зададимся некоторыми произвольными направлениями токов  $I_1 \rightarrow I_5$ , которые на рис. 3.2 указаны стрелками.

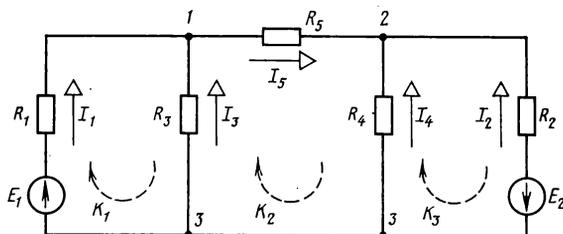


Рис. 3.2. Схема цепи к примеру 3.1

Уравнения для узлов 1 и 2:

$$-I_1 - I_3 + I_5 = 0, \quad -I_5 - I_4 - I_2 = 0. \quad (3.2)$$

Для узла 3 получится уравнение  $I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = 0$ , которое является суммой двух предыдущих уравнений и поэтому должно быть отброшено.

Уравнения для контуров  $K_1$ ,  $K_2$  и  $K_3$  получаются с использованием закона Ома:

$$R_1 I_1 - R_3 I_3 = E_1, \quad R_3 I_3 + R_5 I_5 - R_4 I_4 = 0, \quad R_4 I_4 - R_2 I_2 = E_2. \quad (3.3)$$

Следует тщательно проследить, как знаки напряжений на резисторах согласуются с выбранными направлениями обхода контуров.

Общее число уравнений в системах (3.2) и (3.3) равно числу неизвестных токов.

Обратим внимание на то, что независимые контуры можно выбирать иначе. Например, возможен контур, состоящий из обоих источников ЭДС и трех резисторов  $R_1$ ,  $R_5$ ,  $R_2$ . Естественно, что система (3.3) будет иметь при этом другую, но полностью эквивалентную форму.

Найденные в результате токи  $I_1 - I_5$  могут быть как положительными, так и отрицательными. Знак каждого тока указывает на то, совпадает или нет его истинное направление с тем, которое было использовано при составлении уравнений.

### 3.2. МЕТОД КОНТУРНЫХ ТОКОВ

Число независимых уравнений, описывающих процессы в сложной цепи, можно существенно сократить, воспользовавшись методом контурных токов, предложенным в свое время Максвеллом.

Сущность метода заключается в том, что вместо фактических токов ветвей находят фиктивные *контурные токи*, замыкающиеся в независимых контурах; направления этих токов задают произвольно.

На рис. 3.3,а изображен узел, в котором сходятся три ветви. Контурные токи имеют комплексные амплитуды  $\dot{I}_{k1}$ ,  $\dot{I}_{k2}$ ,  $\dot{I}_{k3}$ . Каждый из этих токов, входя в узел, выходит из него. Поэтому алгебраическая сумма контурных токов в узле всегда равна нулю и первый закон Кирхгофа выполняется автоматически.

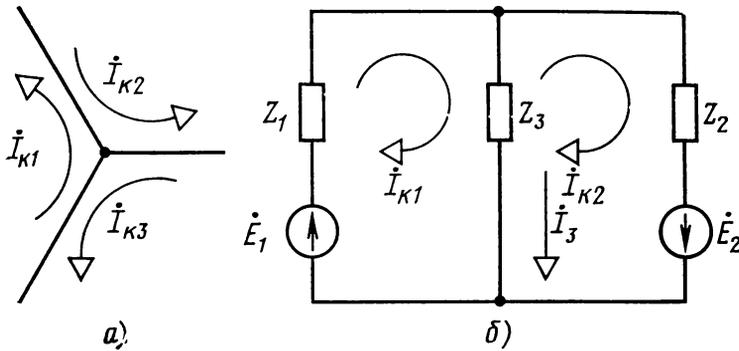


Рис. 3.3. Метод контурных токов:

*a* — суммирование контурных токов в узле; *б* — схема цепи к примеру 3.2

Таким образом, число уравнений, необходимых для полного расчета сложной цепи, равно числу независимых контуров.

**Пример 3.2.** Схема цепи, питаемой источниками гармонических ЭДС с комплексными амплитудами  $\dot{E}_1$  и  $\dot{E}_2$ , представлена на рис. 3.3.б. Найти аналитическое выражение комплексной амплитуды  $\dot{I}_3$  тока в центральной ветви.

Обходя оба контура в направлениях контурных токов  $\dot{I}_{K1}$  и  $\dot{I}_{K2}$ , на основании второго закона Кирхгофа имеем два уравнения

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_3) \dot{I}_{K1} - Z_3 \dot{I}_{K2} &= \dot{E}_1, \\ -Z_3 \dot{I}_{K1} + (Z_2 + Z_3) \dot{I}_{K2} &= \dot{E}_2. \end{aligned} \quad (3.4)$$

Отрицательные знаки слагаемых в левых частях объясняются тем, что при выбранных направлениях контурных токов напряжения, возникающие на элементе  $Z_3$  под действием этих токов, имеют противоположные полярности.

Решая систему (3.4), находим контурные токи

$$\begin{aligned} \dot{I}_{K1} &= \frac{\dot{E}_1(Z_2 + Z_3) + \dot{E}_2 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}, \\ \dot{I}_{K2} &= \frac{\dot{E}_2(Z_1 + Z_3) + \dot{E}_1 Z_3}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}, \end{aligned}$$

откуда

$$\dot{I}_3 = \dot{I}_{K1} - \dot{I}_{K2} = \frac{\dot{E}_1 Z_2 - \dot{E}_2 Z_1}{Z_1 Z_2 + Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3}. \quad (3.5)$$

Интересно отметить, что при  $\dot{E}_1 Z_2 - \dot{E}_2 Z_1 = 0$  ток  $\dot{I}_3 = 0$ . Это объясняется тем, что оба источника по отношению друг к другу включены согласно (с одинаковой полярностью); суммарное напряжение падает на последовательно соединенных элементах  $Z_1$  и  $Z_2$ . Ясно, что если  $\dot{E}_1/\dot{E}_2 = Z_1/Z_2$ , то разность потенциалов на зажимах  $Z_3$  равна нулю и ток в этом элементе отсутствует.

**Общий случай.** Анализ цепи из примера 3.2 убеждает, что отдельные контурные уравнения оказываются связанными наличием ветвей, одновременно принадлежащим двум или более смежным контурам. Поэтому расчет сложной линейной цепи общего вида по методу контурных токов сводится к решению системы  $n$  линейных алгебраических уравнений, где  $n = N_k$  — число независимых контуров.

Действительно, записывая условия электрического равновесия в каждом контуре на основании второго закона Кирхгофа, имеем

$$\begin{aligned} Z_{11}i_{k1} + Z_{12}i_{k2} + \dots + Z_{1n}i_{kn} &= \dot{E}_1, \\ Z_{21}i_{k1} + Z_{22}i_{k2} + \dots + Z_{2n}i_{kn} &= \dot{E}_2, \\ \dots & \dots \dots \dots \dots \dots \dots \dots \\ Z_{n1}i_{k1} + Z_{n2}i_{k2} + \dots + Z_{nn}i_{kn} &= \dot{E}_n. \end{aligned} \quad (3.6)$$

В этих уравнениях  $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_n$  — комплексные амплитуды ЭДС в контурах; знаки ЭДС согласованы с направлениями обходов. Комплексные сопротивления  $Z_{11}, Z_{22}, \dots, Z_{nn}$  представляют собой *собственные сопротивления* контуров, в то время как величины  $Z_{ij}$  — *взаимные сопротивления* между  $i$ -м и  $j$ -м контурами ( $i \neq j$ ).

Знаки взаимных сопротивлений будут *отрицательными*, если токи в смежных контурах ориентированы в одном и том же направлении, скажем, по часовой стрелке как в примере 3.2. Отрицательные знаки указывают, что напряжения, возникающие под действием этих токов на элементе  $Z_{jj}$ , будут иметь противоположную полярность. Если же контурные токи ориентированы в разных направлениях, то величины  $Z_{ij}$  должны учитываться с *положительными знаками*.

Решать систему уравнений (3.6) можно любым способом, например, методом Крамера, согласно которому ток в первом контуре

$$i_{k1} = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} \dot{E}_1 & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ \dot{E}_2 & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \dot{E}_n & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}, \quad (3.7)$$

где

$$\Delta = \begin{vmatrix} Z_{11} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & Z_{22} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n2} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.8)$$

— определитель системы.

Чтобы найти комплексную амплитуду тока  $i_{km}$  в  $m$ -м контуре, вектор-столбец контурных ЭДС ( $\dot{E}_1, \dot{E}_2, \dots, \dot{E}_n$ ) в формуле (3.7) следует переместить на  $m$ -1 позицию вправо.

## 3.3. МЕТОД УЗЛОВЫХ ПОТЕНЦИАЛОВ

Для анализа сложных электрических цепей часто используют также метод узловых потенциалов (узловых напряжений). В качестве независимых переменных здесь принимают потенциалы отдельных узлов. Так как потенциал одного из них можно сделать равным нулю, «заземлив» этот узел, то расчет сводится к нахождению  $N_y - 1$  напряжений, существующих между остальными узлами и «землей».

Проиллюстрируем описанный метод на конкретных примерах.

**Пример 3.3.** Схема цепи, возбуждаемой двумя источниками гармонического тока с комплексными амплитудами  $I_1$  и  $I_2$ , приведена на рис. 3.4,а. Найти комплексные амплитуды  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  напряжений узлов 1 и 2 относительно «заземленного» узла 0.

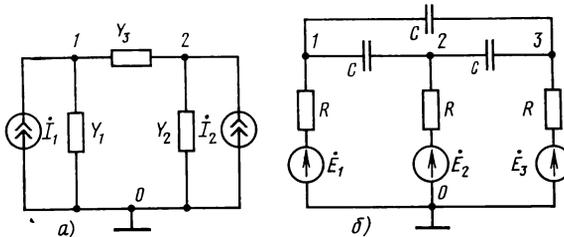


Рис. 3.4. Метод узловых потенциалов:

а — схема цепи к примеру 3.3; б — схема цепи к примеру 3.4

К каждому из узлов 1 и 2 подходят три ветви. На основании первого закона Кирхгофа составим уравнение для узла 1

$$-\dot{I}_1 + Y_1 \dot{U}_1 + Y_3 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) = 0 \quad (3.9)$$

и для узла 2

$$-Y_3 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + Y_2 \dot{U}_2 - \dot{I}_2 = 0. \quad (3.10)$$

Здесь учтено, что ток, входящий в узел, отрицателен, а выходящий из узла — положителен. Кроме того, токи и напряжения согласованы по направлению. Например, если напряжение узла 1 выше напряжения узла 2, то ток в элементе  $Y_3$ , имеющий комплексную амплитуду  $Y_3(\dot{U}_1 - \dot{U}_2)$ , направлен в сторону узла 2 и поэтому берется в уравнении (3.9) с положительным знаком. Понятно, что тот же самый ток в уравнении (3.10) фигурирует с отрицательным знаком.

Равенства (3.9) и (3.10) можно объединить в систему из двух уравнений

$$(Y_1 + Y_3) \dot{U}_1 - Y_3 \dot{U}_2 = \dot{I}_1, \quad -Y_3 \dot{U}_1 + (Y_2 + Y_3) \dot{U}_2 = \dot{I}_2, \quad (3.11)$$

решение которой элементарно:

$$\dot{U}_1 = \frac{(Y_2 + Y_3) \dot{I}_1 + Y_3 \dot{I}_2}{Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3}, \quad \dot{U}_2 = \frac{Y_3 \dot{I}_1 + (Y_1 + Y_3) \dot{I}_2}{Y_1 Y_2 + Y_1 Y_3 + Y_2 Y_3}. \quad (3.12)$$

**Пример 3.4.** По методу узловых потенциалов составить систему уравнений для нахождения комплексных амплитуд напряжений  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$  и  $\dot{U}_3$  в узлах 1—3 цепи, схема которой изображена на рис. 3.4,б. Емкости  $C$  всех трех конденсаторов одинаковы, так же как и сопротивления  $R$  всех трех резисторов. Цепь возбуждается источниками ЭДС с комплексными амплитудами  $\dot{E}_1$ ,  $\dot{E}_2$  и  $\dot{E}_3$ .

При составлении уравнений следует учесть, что напряжение на каждом резисторе равно разности между напряжением узла и значением соответствующей ЭДС. Например, напряжение на крайнем левом резисторе имеет комплексную амплитуду  $\dot{U}_1 - \dot{E}_1$ . Приравнявая нулю алгебраические суммы токов в каждом из узлов 1, 2 и 3, получаем

$$\begin{aligned}(\dot{U}_1 - \dot{E}_1)/R + j\omega C(\dot{U}_1 - \dot{U}_2) + j\omega C(\dot{U}_1 - \dot{U}_3) &= 0, \\j\omega C(\dot{U}_2 - \dot{U}_1) + (\dot{U}_2 - \dot{E}_2)/R + j\omega C(\dot{U}_1 - \dot{U}_3) &= 0, \\j\omega C(\dot{U}_3 - \dot{U}_1) + j\omega C(\dot{U}_3 - \dot{U}_2) + (\dot{U}_3 - \dot{E}_3)/R &= 0.\end{aligned}\quad (3.13)$$

Переносим комплексные амплитуды источников в правые части, приходим к системе алгебраических уравнений

$$\begin{aligned}\left(2 + \frac{1}{j\omega RC}\right)\dot{U}_1 - \dot{U}_2 - \dot{U}_3 &= \frac{\dot{E}_1}{j\omega RC}, \\-\dot{U}_1 + \left(2 + \frac{1}{j\omega RC}\right)\dot{U}_2 - \dot{U}_3 &= \frac{\dot{E}_2}{j\omega RC}, \\-\dot{U}_1 - \dot{U}_2 + \left(2 + \frac{1}{j\omega RC}\right)\dot{U}_3 &= \frac{\dot{E}_3}{j\omega RC},\end{aligned}\quad (3.14)$$

решение которой можно получить любым численным методом, задавшись значением частоты и номиналами элементов цепи.

**Общий случай.** Рассмотрим метод узловых потенциалов в следующей постановке. Пусть отдельные узлы цепи соединены друг с другом пассивными линейными двухполюсниками, проводимости которых обозначены символами  $Y_{ij}$ , где  $i, j$  — номера соединяемых узлов. Кроме того, к каждому узлу может быть подключен идеальный источник тока  $I_i$ , где  $i$  — номер данного узла.

Возьмем конкретно  $k$ -й узел, соединенный проводимостью  $Y_{k0}$  с нулевым («заземленным») узлом, проводимостью  $Y_{k1}$  с 1-м узлом и т. д. Перечисление продолжается вплоть до  $j$ -го узла, который соединен с выделенным узлом проводимостью  $Y_{kj}$ . На основании первого закона Кирхгофа

$$Y_{k0}\dot{U}_k + Y_{k1}(\dot{U}_k - \dot{U}_1) + Y_{k2}(\dot{U}_k - \dot{U}_2) + \dots + Y_{kj}(\dot{U}_k - \dot{U}_j) - I_k = 0.$$

Объединяя подобные члены, это равенство можно записать так:

$$Y_{kk}\dot{U}_k - Y_{k1}\dot{U}_1 - Y_{k2}\dot{U}_2 - \dots - Y_{kj}\dot{U}_j = I_k, \quad (3.15)$$

где величина

$$Y_{kk} = Y_{k0} + Y_{k1} + \dots + Y_{kj},$$

называемая *собственной проводимостью*  $k$ -го узла, представляет собой сумму проводимостей всех ветвей, подходящих к данному

узлу. По аналогии, проводимость  $Y_{ij}$  называют *взаимной проводимостью* ветви между  $i$ -м и  $j$ -м узлами. Взаимные проводимости симметричны, т. е.  $Y_{ij} = Y_{ji}$ .

Формула (3.15) позволяет записать общий вид системы линейных уравнений для цепи, содержащей  $m = N_y - 1$  узлов:

$$\begin{aligned} Y_{11}\dot{U}_1 - Y_{12}\dot{U}_2 - \dots - Y_{1m}\dot{U}_m &= I_1, \\ -Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 - \dots - Y_{2m}\dot{U}_m &= I_2, \\ \dots & \\ -Y_{m1}\dot{U}_1 - Y_{m2}\dot{U}_2 - \dots + Y_{mm}\dot{U}_m &= I_m. \end{aligned} \quad (3.16)$$

Подобная система была получена выше для конкретной цепи из примера 3.3.

Следует отметить, что метод узловых потенциалов имеет существенное преимущество по сравнению с методом контурных токов, состоящее в том, что здесь не требуется предварительно искать систему независимых контуров. Это обстоятельство упрощает программную реализацию данного метода.

### 3.4. ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

Процедуру анализа сложных цепей в ряде случаев можно существенно сократить, заменяя одни конфигурации элементов другими, либо более простыми, либо более удобными для расчетов. Структурные преобразования цепи, при которых все токи и напряжения остаются неизменными, принято называть *эквивалентными преобразованиями*. К их числу относится такая элементарная операция как замена группы последовательно включенных двухполюсников одним элементом с сопротивлением, равным сумме сопротивлений элементов группы.

При расчетах радиотехнических устройств часто приходится выполнять и более сложные эквивалентные преобразования, ряд из которых изучается ниже.

**Эквивалентные преобразования Т- и П-образных пассивных цепей.** Рассмотрим два линейных пассивных трехполюсника, изоб-

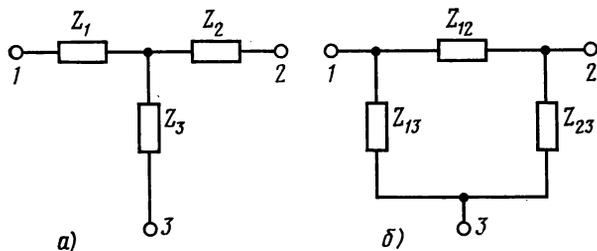


Рис. 3.5. Эквивалентные преобразования пассивных цепей:

$a$  — Т-образная цепь;  $b$  — П-образная цепь

раженных на рис. 3.5. Трехполюсник из элементов  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$  (рис. 3.5,а) — это так называемая Т-образная цепь («звезда»); трехполюсник из элементов  $Z_{12}$ ,  $Z_{13}$  и  $Z_{23}$  (рис. 3.5,б) представляет собой П-образную цепь («треугольник»).

Найдем формулы, устанавливающие эквивалентность этих двух цепей, понимаемую как одинаковость комплексных сопротивлений между любой парой из трех доступных зажимов. Например, сопротивление между зажимами 1 и 2 в схеме на рис. 3.5,а, равное  $Z_1 + Z_2$ , должно быть равно сопротивлению в схеме на рис. 3.5,б, которое образовано элементом  $Z_{12}$  и параллельно подключенной последовательной цепочкой из  $Z_{13}$  и  $Z_{23}$ . Таким образом, цепи будут эквивалентными, если выполняются равенства

$$\begin{aligned} Z_1 + Z_2 &= \frac{Z_{12}(Z_{13} + Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}, \\ Z_1 + Z_3 &= \frac{Z_{13}(Z_{12} + Z_{23})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}, \\ Z_2 + Z_3 &= \frac{Z_{23}(Z_{12} + Z_{13})}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Разрешив эти уравнения относительно  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$ , находим

$$\begin{aligned} Z_1 &= \frac{Z_{12} Z_{13}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}, \\ Z_2 &= \frac{Z_{12} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}, \\ Z_3 &= \frac{Z_{13} Z_{23}}{Z_{12} + Z_{13} + Z_{23}}. \end{aligned} \quad (3.18)$$

Если же, наоборот, разрешить (3.17) относительно сопротивлений  $Z_{12}$ ,  $Z_{13}$  и  $Z_{23}$ , то получаем следующие формулы эквивалентной связи:

$$\begin{aligned} Z_{12} &= Z_1 + Z_2 + (Z_1 Z_2 / Z_3), \\ Z_{13} &= Z_1 + Z_3 + (Z_1 Z_3 / Z_2), \\ Z_{23} &= Z_2 + Z_3 + (Z_2 Z_3 / Z_1). \end{aligned} \quad (3.19)$$

В теории цепей часто говорят, что формулы (3.18) и (3.19) определяют эквивалентное преобразование «звезда — треугольник».

Легко проверить, что если, например, в Т-образной цепи  $Z_1 = Z_2 = Z_3 = R$ , то эквивалентная П-образная цепь имеет параметры  $Z_{12} = Z_{13} = Z_{23} = 3R$ .

**Эквивалентные преобразования активных двухполюсников.** Моделью реального источника, часто используемой в теории цепей, служит активный двухполюсник, который образован последовательным соединением идеального источника напряжения с комплексной амплитудой  $\dot{E}$  и некоторого внутреннего сопротивления

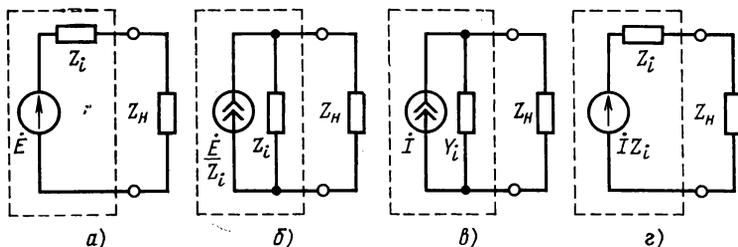


Рис. 3.6. Эквивалентные преобразования активных двухполюсников:

*a* — исходная цепь с источником напряжения; *б* — эквивалентная ей цепь с источником тока; *в* — исходная цепь с источником тока; *г* — эквивалентная ей цепь с источником напряжения

с импедансом  $Z_i$ . На рис. 3.6,*a* эти два источника выделены пунктирной рамкой.

Пусть реальный источник подключен к нагрузке с комплексным сопротивлением  $Z_n$ . Ток в цепи  $I = \dot{E} / (Z_i + Z_n)$ , откуда комплексная амплитуда напряжения на нагрузке

$$\dot{U}_n = \frac{\dot{E} Z_n}{Z_i + Z_n}. \quad (3.20)$$

Разделив и умножив числитель на  $Z_i$ , получим

$$\dot{U}_n = \frac{(\dot{E}/Z_i) Z_n Z_i}{Z_i + Z_n}. \quad (3.21)$$

Можно заметить, что величина  $\dot{E}/Z_i$  представляет собой ток короткого замыкания, возникающий в данной цепи при  $Z_n = 0$ . Далее следует учесть, что выражение  $Z_n Z_i / (Z_n + Z_i)$  описывает сопротивление элементов  $Z_i$  и  $Z_n$ , соединенных параллельно. Отсюда приходим к выводу, что исходную активную цепь можно эквивалентно заменить двухполюсником, который содержит источник тока с комплексной амплитудой  $I = \dot{E}/Z_i$ ; элемент  $Z_i$ , ранее включавшийся последовательно с источником ЭДС, теперь присоединен параллельно источнику тока (рис. 3.6,*б*).

Такое же эквивалентное преобразование можно выполнить, взяв за исходную цепь активный двухполюсник с источником тока  $I$  и некоторой внутренней проводимостью  $Y_i$  (рис. 3.6,*в*). Если ввести в рассмотрение внутреннее сопротивление источника  $Z_i = 1/Y_i$ , то комплексную амплитуду напряжения на нагрузке можно выразить так:

$$\dot{U}_n = \frac{I}{(1/Z_i) + (1/Z_n)} = \frac{I Z_i Z_n}{Z_i + Z_n}. \quad (3.22)$$

Данная формула по своей структуре совпадает с (3.20) и, следовательно, возможна эквивалентная замена исходной цепи другой цепью с источником напряжения (рис. 3.6,*г*). Комплексная амплитуда этого источника будет равна  $I Z_i = I/Y_i$ , т. е. напряжению хо-

лостого хода в схеме на рис. 3.6,в, наблюдаемому на внешних зажимах при  $Z_H = \infty$ . Последовательно с источником напряжения включается элемент с сопротивлением  $Z_i$ , который в исходной цепи был присоединен параллельно источнику тока.

**Теоремы об эквивалентных источниках.** Имеется возможность эквивалентного упрощения любой сколь угодно сложной линейной цепи с двумя доступными зажимами.

**Теорема Тевенина.** Формулировка ее такова: произвольный линейный двухполюсник, содержащий источники тока и (или) напряжения, может быть заменен активным двухполюсником, состоящим из одного источника ЭДС  $\dot{E}$  и последовательно включенного внутреннего сопротивления  $Z_i$ . Значение  $\dot{E}$  численно совпадает с напряжением холостого хода исходного двухполюсника. Сопротивление  $Z_i$  равно входному сопротивлению двухполюсника при отсутствии источников, т. е. при замене источников ЭДС идеальными проводниками и разрыве тех ветвей, которые содержат источники тока.

Доказательство основано на последовательности мысленных экспериментов, показанных на рис. 3.7,а—е.

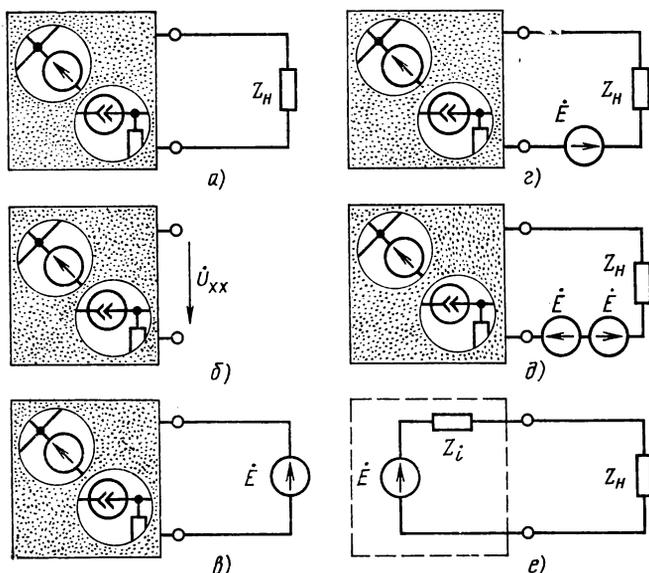


Рис. 3.7. К доказательству теоремы Тевенина

1. Подключаем к зажимам активного двухполюсника нагрузку с сопротивлением  $Z_H$ . В цепи устанавливается некоторый стационарный режим (а).

2. Разрываем цепь нагрузки (б). На выходных зажимах воз-

никает напряжение холостого хода с комплексной амплитудой  $\dot{U}_{xx}$ .

3. Подключаем на выход устройства источник напряжения с ЭДС  $\dot{E} = \dot{U}_{xx}$  (в). При указанной на рисунке полярности источника его ЭДС компенсируется напряжением холостого хода, и ток на выходе равен нулю.

4. Добавляем в выходную цепь сопротивление нагрузки (г). Ток по-прежнему равен нулю.

5. Включаем на выход еще один источник напряжения с равной и противоположно направленной ЭДС (д). В цепи вновь устанавливается режим, отвечающий конфигурации (а). Поскольку цепь линейна и подчиняется принципу суперпозиции, возникший ток есть сумма двух токов. Один из них возбужден всеми источниками, которые присутствуют в конфигурации (г). Другой ток возникает под действием источника, добавленного в конфигурацию (д). Но первый из этих токов *равен нулю* и поэтому из цепи можно исключить все относящиеся к нему источники. В результате приходим к эквивалентной схеме (е), отвечающей формулировке теоремы Тевенина.

Теорема Нортонa. Согласно этой теореме активный линейный двухполюсник общего вида может быть эквивалентно заменен цепью, состоящей из параллельного соединения идеального источника тока  $\dot{I}$  и некоторой внутренней проводимости  $Y_i$ . Ток  $\dot{I}$  равен току короткого замыкания на выходных зажимах исходной цепи; проводимость  $Y_i$  совпадает с проводимостью, измеренной на внешних зажимах при замене всех внутренних источников ЭДС идеальными проводниками, а всех внутренних источников тока — разрывами.

Доказательство этой теоремы основано на теореме Тевенина и эквивалентном преобразовании двухполюсника с источником напряжения в цепь с источником тока (см. рис. 3.6, а, б).

Теоремы Тевенина и Нортонa часто используют в практике анализа цепей для упрощения принципиальных схем устройств.

**Пример 3.5.** С помощью теоремы Тевенина найти параметры эквивалентной схемы активного двухполюсника, изображенного на рис. 3.8, а. Дано:  $I = 20$  мА,  $\dot{E} = 60 \exp(j30^\circ)$  В,  $L = 40$  мкГн,  $f = 20$  МГц,  $R = 3$  кОм.

Чтобы найти напряжение  $\dot{U}_{xx}$ , воспользуемся уравнением по первому закону Кирхгофа для верхнего узла цепи

$$\frac{\dot{U}_{xx} - \dot{E}}{R} + \frac{\dot{U}_{xx}}{j\omega L} - \dot{I} = 0,$$

откуда

$$\dot{U}_{xx} = \frac{j\omega L(R\dot{I} + \dot{E})}{R + j\omega L}.$$

Подставив числовые данные, получим

$$\dot{U}_{xx} = \frac{j5,03 [(1 + \exp(j30^\circ)) \cdot 60]}{3 + j5,03} = \frac{j301,8 \cdot 1,93 \exp(j15^\circ)}{5,86 \exp(j59^\circ)} = 100 \exp(j46^\circ) \text{ В.}$$

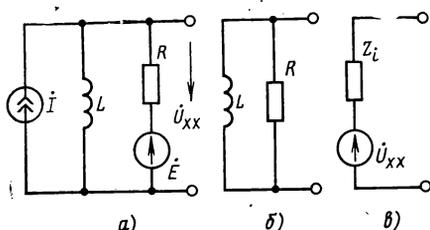


Рис. 3.8. Нахождение эквивалентной схемы активного двухполюсника:  
 а — исходная цепь; б — цепь без источников;  
 в — эквивалентная схема

Чтобы определить внутреннее сопротивление эквивалентного двухполюсника, следует рассмотреть цепь без источников, представленную на рис. 3.8,б и имеющую сопротивление

$$Z_i = \frac{j\omega LR}{R + j\omega L} = \frac{15 \cdot 10^3}{3 + j5,03} = \frac{j15 \cdot 10^3 (3 - j5,03)}{34,3} = 2,2 \cdot 10^3 + j1,31 \cdot 10^3 \text{ Ом.}$$

Схема эквивалентного источника представлена на рис. 3.8,в.

**Теорема взаимности.** Линейным пассивным цепям присуще важное свойство, устанавливаемое теоремой взаимности Гельмгольца: если некоторый источник ЭДС, находящийся в составе контура 1 цепи, вызывает в контуре 2 определенный ток, то этот же источник, перенесенный в контур 2, вызывает в контуре 1 такой же ток.

Доказательство проведем по методу контурных токов. Пусть в контур 1 включен источник ЭДС с комплексной амплитудой  $\dot{E}$ , а во всех других контурах источники отсутствуют. Тогда в соответствии с формулой вида (3.7) комплексная амплитуда тока во втором контуре

$$\dot{I}_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} Z_{11} & \dot{E} & Z_{12} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{21} & 0 & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & 0 & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix} = - \frac{\dot{E}}{\Delta} \begin{vmatrix} Z_{21} & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ Z_{31} & Z_{33} & \dots & Z_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n1} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix} \quad (3.23)$$

(отрицательный знак связан с тем, что алгебраическое дополнение здесь относится к элементу, стоящему на пересечении первой строки и второго столбца; сумма номеров строки и столбца нечетна).

Если же источник  $\dot{E}$  переместить в контур 2, то ток в контуре 1 будет иметь комплексную амплитуду

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} 0 & Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1n} \\ \dot{E} & Z_{22} & Z_{23} & \dots & Z_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix} = - \frac{\dot{E}}{\Delta} \begin{vmatrix} Z_{12} & Z_{13} & \dots & Z_{1n} \\ Z_{32} & Z_{33} & \dots & Z_{3n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ Z_{n2} & Z_{n3} & \dots & Z_{nn} \end{vmatrix}. \quad (3.24)$$

Теперь примем во внимание, что взаимные сопротивления по определению симметричны относительно перестановки индексов:

$Z_{ij}=Z_{ji}$ . Поэтому столбцы определителя в (3.23) совпадают со строками определителя в (3.24), что обуславливает равенство этих определителей. В результате  $I_2=I_1$ , что и требовалось доказать.

Следует иметь в виду, что сложные радиотехнические цепи, содержащие управляемые источники, как правило, не подчиняются принципу взаимности. Действительно, подав на вход транзисторного усилителя некоторое напряжение, мы наблюдаем на выходе усиленный сигнал. Однако режим, при котором вход и выход усилителя меняются местами, не является рабочим режимом усилителя.

### 3.5. ТРЕХФАЗНЫЕ ЦЕПИ

В электроэнергетике повсеместное применение получили трехфазные цепи. Так принято называть цепи переменного тока, состоящие из трех симметричных частей, которые называются *фазами* (не путать с понятием фазы гармонического колебания) и обозначаются буквами *A*, *B* и *C*. Каждая фаза питается отдельным источником напряжения. Комплексные амплитуды этих источников имеют одинаковые модули и аргументы, отличающиеся на  $120^\circ$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_A &= U; & \dot{U}_B &= U \exp(-j 120^\circ); \\ \dot{U}_C &= U \exp(-j 240^\circ) = U \exp(j 120^\circ) \end{aligned} \quad (3.25)$$

(в настоящем параграфе всюду речь идет о действующих значениях напряжений и токов).

Векторная диаграмма системы напряжений в трехфазной цепи изображена на рис. 3.9,а.

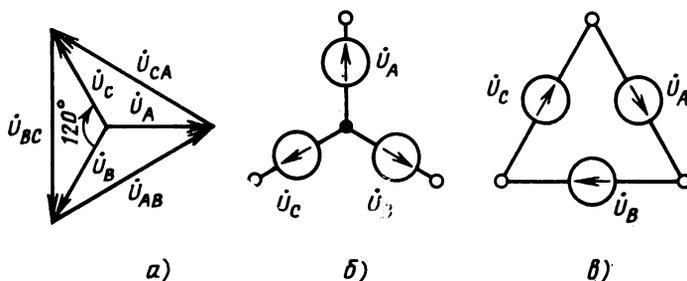


Рис. 3.9. Трехфазная система напряжений:

а — векторная диаграмма; б — соединение «звездой»; в — соединение «треугольником»

Элементы трехфазной цепи можно соединять между собой двумя способами. При первом способе, который называется «звезда» (рис. 3.9,б), три однополярных зажима источников соединяются вместе. Три других зажима образуют при этом выводы фаз *A*, *B* и *C*. Действующие значения напряжений между выводами фаз и

общей точкой называют *фазными напряжениями*  $U_\phi$ . В симметричной трехфазной системе все фазные напряжения одинаковы:  $U_\phi = U$ . Между выводами фаз существуют напряжения с комплексными амплитудами (см. рис. 3.9,а):

$$\dot{U}_{AB} = \dot{U}_A - \dot{U}_B; \quad \dot{U}_{BC} = \dot{U}_B - \dot{U}_C; \quad \dot{U}_{CA} = \dot{U}_C - \dot{U}_A. \quad (3.26)$$

Эти три напряжения также образуют трехфазную систему, так как взаимный сдвиг фаз между ними составляет  $120^\circ$ . Действующие значения напряжений между выводами фаз в трехфазной цепи с общей точкой называют *линейными напряжениями*  $U_\pi$ . Можно проверить, что

$$U_\pi = 2 U_\phi \cos 30^\circ = \sqrt{3} U_\phi. \quad (3.27)$$

В практике электроснабжения получили распространение трехфазные системы 660/380, 380/220 и 220/127. Здесь числитель — линейное напряжение, знаменатель — фазное напряжение (В).

При другом способе соединения источников, называемом «треугольник» (рис. 3.9,б), фазные источники включают последовательно. Ток в замкнутом контуре не возникает, поскольку  $\dot{U}_A + \dot{U}_B + \dot{U}_C = 0$ . Физически это означает, что три источника в каждый момент времени компенсируют друг друга. Действительно, легко проверить, что

$$U \cos \omega t + U \cos (\omega t - 2\pi/3) + U \cos (\omega t - 4\pi/3) = 0.$$

**Расчет трехфазных цепей.** Для анализа трехфазных систем пригоден любой метод расчета сложных цепей из числа описанных ранее.

На рис. 3.10,а изображена трехфазная цепь, которая содержит три гармонических источника, включенных по схеме «звезда», и

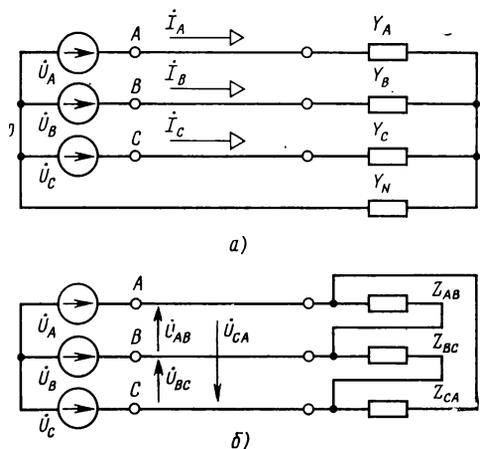


Рис. 3.10. Нагруженные трехфазные цепи:

а — нагрузка включена по схеме «звезда» с нейтралью; б — нагрузка включена по схеме «треугольник»

три фазных нагрузки с комплексными проводимостями  $Y_A$ ,  $Y_B$  и  $Y_C$ . Цепь содержит ветвь, называемую *нейтральным проводом*, которая имеет проводимость  $Y_N$ .

Считая, что потенциал узла  $O$  равен нулю, запишем уравнение, устанавливающее нулевое значение суммы токов в узле  $I$ :

$$Y_A(\dot{U}_1 - \dot{U}_A) + Y_B(\dot{U}_1 - \dot{U}_B) + Y_C(\dot{U}_1 - \dot{U}_C) + Y_N \dot{U}_1 = 0. \quad (3.28)$$

Отсюда находим комплексную амплитуду напряжения узла  $I$

$$\dot{U}_1 = \frac{Y_A \dot{U}_A + Y_B \dot{U}_B + Y_C \dot{U}_C}{Y_A + Y_B + Y_C + Y_N}. \quad (3.29)$$

Эта формула полностью решает задачу анализа рассматриваемой цепи, так как на основании ее токи фаз имеют комплексные амплитуды

$$\begin{aligned} I_A &= Y_A(\dot{U}_A - \dot{U}_1), \\ I_B &= Y_B(\dot{U}_B - \dot{U}_1), \\ I_C &= Y_C(\dot{U}_C - \dot{U}_1). \end{aligned} \quad (3.30)$$

Следует заметить, что при симметричной нагрузке, когда  $Y_A = Y_B = Y_C$ , напряжение  $\dot{U}_1 = 0$  и ток в нейтральном проводе отсутствует. Если же проводимости фаз различны, то возникает *несимметричный режим* работы трехфазной системы; напряжение  $\dot{U}_1 \neq 0$ , в нейтрали появляется некоторый ток, а токи фаз становятся различными по амплитуде. При этом нагрузка на фазный генератор зависит не только от проводимости данной фазы, но и от проводимостей двух других фаз. Чтобы сделать режим работы трехфазной системы более устойчивым, стремятся предельно увеличить проводимость  $Y_N$ . При этом, как нетрудно заметить на основании (3.29), напряжение  $\dot{U}_1 \rightarrow 0$  независимо от соотношения проводимостей фаз.

На рис. 3.10,б изображена схема еще одной трехфазной цепи, в которой нагрузка, состоящая из комплексных сопротивлений  $Z_{AB}$ ,  $Z_{BC}$  и  $Z_{CA}$ , включена «треугольником». Нейтральный провод здесь отсутствует.

Если известны комплексные амплитуды линейных напряжений  $\dot{U}_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}$  и  $\dot{U}_{CA}$ , то токи в двухполюсниках нагрузки будут равны соответственно  $\dot{U}_{AB}/Z_{AB}$ ,  $\dot{U}_{BC}/Z_{BC}$  и  $\dot{U}_{CA}/Z_{CA}$ . Комплексные амплитуды токов в фазах  $A$ ,  $B$  и  $C$  найдутся как разности комплексных амплитуд токов в сторонах «треугольника», например,  $I_A = (\dot{U}_{AB}/Z_{AB}) - (\dot{U}_{CA}/Z_{CA})$  и т. д.

Отметим в заключение, что основная причина широкого распространения трехфазных систем заключается в следующем: подав систему трехфазных токов в три обмотки, оси которых размещаются в пространстве со сдвигом на  $120^\circ$ , мы получаем *вращающееся магнитное поле*. Это позволяет создавать простые и надежные электродвигатели переменного тока.

### В О П Р О С Ы

1. Как найти число независимых контуров цепи, если известны число ветвей и число узлов?
2. Поясните принципы методов контурных токов и узловых потенциалов.
3. Какие преобразования схем цепей называют эквивалентными преобразованиями?
4. Приведите формулировки теорем Тевенина и Нортона.
5. Как связаны между собой фазные и линейные напряжения в трехфазной системе?
6. Какие явления происходят в трехфазной системе при несимметричном режиме? Почему целесообразно добиваться высокой проводимости цепи нейтрали?

## 4. ТЕОРИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Ранее в качестве структурных элементов электрической цепи рассматривались, в основном, пассивные и активные двухполюсники. При анализе радиотехнических устройств обработки сигналов часто бывает удобным вводить более сложные структурные элементы, к которым относятся, прежде всего, четырехполюсники.

### 4.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ. МАТРИЧНОЕ ОПИСАНИЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

По определению, *четыреполюсником* называют элемент цепи, имеющий две пары доступных зажимов. Внутреннее устройство четырехполюсника может быть любым. Поэтому иногда говорят, что данный элемент цепи представляет собой «черный ящик». Требуется лишь, чтобы все токи и напряжения, существующие внутри четырехполюсника, удовлетворяли условию квазистационарности.

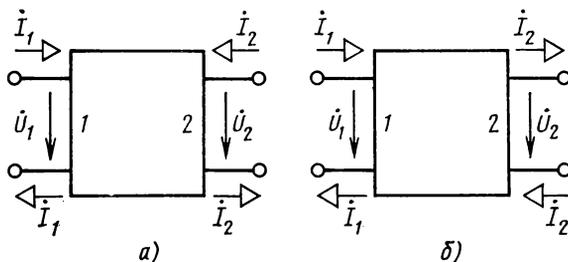


Рис. 4.1. Четыреполюсник как «черный ящик»:

а — положительные направления токов на входе и на выходе противоположны; б — токи на входе и выходе направлены в одну сторону

Выделенные пары зажимов, которые на рис. 4.1 обозначены цифрами 1 и 2, будем в дальнейшем называть *портами*. При этом один из портов, например, 1 является *входом* четырехполюсника, который подключается к внешнему источнику колебаний. Другой порт, например, 2 *служит выходом* четырехполюсника; к его зажимам подключается нагрузка.

Электрическое состояние линейного четырехполюсника задается комплексными амплитудами напряжений  $\dot{U}_1$  и  $\dot{U}_2$  и токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ . В зависимости от особенностей решаемой задачи положительные направления токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  выбираются одним из способов, показанных на рис. 4.1, а, б.

Из четырех указанных величин любые две могут рассматриваться как независимые. Тогда оставшиеся величины связаны системой двух линейных алгебраических уравнений. Конкретный выбор независимых переменных приводит к различным системам параметров четырехполюсника. Легко проверить, что всего возможно шесть таких систем (число сочетаний из четырех по два). На практике чаще всего применяют системы, описанные ниже.

**Система Z-параметров.** Здесь независимыми переменными служат комплексные амплитуды  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$ , так что уравнения связи приобретают вид

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 &= Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2.\end{aligned}\quad (4.1)$$

Коэффициенты уравнений (4.1) образуют Z-матрицу четырехполюсника, имеющую размер  $2 \times 2$ :

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} \\ Z_{21} & Z_{22} \end{bmatrix}.\quad (4.2)$$

Четыре элемента этой матрицы являются в общем случае комплексными величинами, зависящими от частоты. Матрица  $\mathbf{Z}$  служит полной математической моделью линейного стационарного четырехполюсника.

Элементы Z-матрицы имеют физическую размерность сопротивления. Их можно найти экспериментально, так как на основании уравнений (4.1)

$$Z_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad \text{— входное сопротивление в режиме холостого хода на выходе;}$$

$$Z_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0} \quad \text{— взаимное сопротивление обратной передачи (по направлению от порта 2 к порту 1) при разомкнутых зажимах порта 1;}$$

$$Z_{21} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{I}_2=0} \quad \text{— взаимное сопротивление прямой передачи при разомкнутых зажимах порта 2;}$$

$Z_{22} = \left. \frac{\dot{U}_2}{\dot{I}_2} \right|_{\dot{I}_1=0}$  — выходное сопротивление в режиме холостого хода на входе.

**Система Y-параметров.** Получается в том случае, когда независимыми переменными выбраны напряжения на входе и выходе. При этом состояние четырехполюсника определяется двумя линейными алгебраическими уравнениями

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2, \\ I_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2. \end{aligned} \quad (4.3)$$

Матрица из четырех комплексных коэффициентов

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_{11} & Y_{12} \\ Y_{21} & Y_{22} \end{bmatrix} \quad (4.4)$$

называется Y-матрицей четырехполюсника. Элементы этой матрицы имеют размерность проводимости. Их можно найти таким же образом, как это описывалось выше применительно к Z-матрице. Например,

$Y_{11} = \left. \frac{\dot{I}_1}{\dot{U}_1} \right|_{\dot{U}_2=0}$  — входная проводимость в режиме короткого замыкания на выходе.

**Система H-параметров.** Здесь независимыми переменными являются  $I_1$  и  $\dot{U}_2$ , а функциями  $\dot{U}_1$  и  $I_2$ :

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= H_{11}I_1 + H_{12}\dot{U}_2, \\ I_2 &= H_{21}I_1 + H_{22}\dot{U}_2. \end{aligned} \quad (4.5)$$

Матрицу

$$\mathbf{H} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{21} & H_{22} \end{bmatrix} \quad (4.6)$$

называют H-матрицей линейного четырехполюсника. Физическая интерпретация элементов этой матрицы такова:

$H_{11} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0}$  — входное сопротивление в режиме короткого замыкания на выходе;

$H_{12} = \left. \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \right|_{\dot{I}_1=0}$  — безразмерный коэффициент передачи напряжения в обратном направлении (от порта 2 к порту 1) в режиме холостого хода на порте 1;

$H_{21} = \left. \frac{\dot{I}_2}{\dot{I}_1} \right|_{\dot{U}_2=0}$  — безразмерный коэффициент передачи тока в прямом направлении при коротком замыкании выходных зажимов;

$H_{22} = \frac{i_2}{\dot{U}_2} \Big|_{i_1=0}$  — выходная проводимость при разомкнутом входе.

**Система А-параметров.** Отличается тем, что в качестве независимых переменных принимаются комплексные амплитуды напряжения и тока в порте 2:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}i_2, \\ i_1 &= A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}i_2. \end{aligned} \quad (4.7)$$

Из системы (4.7) видно, что

$A_{11} = \frac{\dot{U}_1}{\dot{U}_2} \Big|_{i_2=0} = 1 / \left( \frac{\dot{U}_2}{\dot{U}_1} \right) \Big|_{i_2=0}$  — величина, обратная коэффициенту передачи напряжения от порта 1 к порту 2 в режиме холостого хода на выходе;

$A_{12} = \frac{\dot{U}_1}{i_2} \Big|_{\dot{U}_2=0} = 1 / \left( \frac{i_2}{\dot{U}_1} \right) \Big|_{\dot{U}_2=0}$  — величина с размерностью сопротивления, обратная взаимной проводимости между портами 2 и 1 в режиме короткого замыкания на выходе;

$A_{21} = \frac{i_1}{\dot{U}_2} \Big|_{i_2=0} = 1 / \left( \frac{\dot{U}_2}{i_1} \right) \Big|_{i_2=0}$  — величина, обратная взаимному сопротивлению между портами 2 и 1 в режиме холостого хода на выходе;

$A_{22} = \frac{i_1}{i_2} \Big|_{\dot{U}_2=0} = 1 / \left( \frac{i_2}{i_1} \right) \Big|_{\dot{U}_2=0}$  — величина, обратная коэффициенту передачи тока от порта 1 к порту 2 в режиме короткого замыкания на выходе.

**Эквивалентные схемы четырехполюсников.** Располагая той или иной матрицей четырехполюсника, на основании соответствующей системы уравнений можно изобразить так называемую *эквивалентную схему* данного элемента цепи. В качестве примера на рис. 4.2 даны две такие схемы применительно к системе Z-параметров (а) и Y-параметров (б).

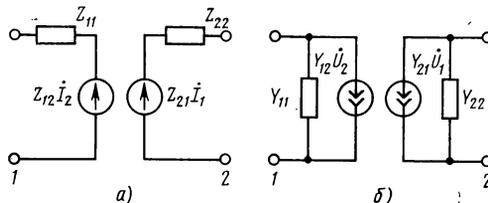


Рис. 4.2. Эквивалентные схемы четырехполюсников: а — в системе Z-параметров; б — в системе Y-параметров

Каждая эквивалентная схема содержит два пассивных двухполюсника, которые включены или последовательно (*а*), или параллельно (*б*). Кроме того, в схеме имеется или два зависимых источника напряжения (*а*), или два зависимых источника тока (*б*). Эти источники учитывают взаимную связь между входом и выходом. В схемах на рис. 4.2 положительные направления токов и напряжений приняты такими, как это представлено на рис. 4.1, *а*.

Наличие в эквивалентных схемах зависимых источников отнюдь не свидетельствует о том, что эти цепи являются активными. Вопрос о свойствах активных четырехполюсников будет изучен позднее.

**Матрицы взаимных четырехполюсников.** Ранее было показано, что пассивные цепи, образованные *R*, *C* и *L*-элементами, являются взаимными системами. Это свойство присуще и соответствующим четырехполюсникам.

Рассмотрим взаимный четырехполюсник с короткозамкнутым портом 2; к зажимам порта 1 подключен источник ЭДС с напряжением  $\dot{U}_0$ . Используя второе уравнение из системы (4.1), получаем, что в данном случае

$$0 = Z_{21}I_1 + Z_{22}I_2, \quad (4.8)$$

откуда

$$I_2 = -(Z_{21}/Z_{22})I_1. \quad (4.9)$$

В соответствии с первым уравнением из (4.1)

$$\dot{U}_0 = (Z_{11} - Z_{21}Z_{12}/Z_{22})I_1 = (\Delta_Z/Z_{22})I_1, \quad (4.10)$$

где  $\Delta_Z = Z_{11}Z_{22} - Z_{21}Z_{12}$  — определитель *Z*-матрицы четырехполюсника.

Объединив (4.9) и (4.10), находим связь между током в выходном порте и напряжением на входе:

$$I_2 = -\dot{U}_0 Z_{21}/\Delta_Z. \quad (4.11)$$

Аналогичным образом, разместив источник ЭДС с комплексной амплитудой напряжения  $\dot{U}_0$  на зажимах порта 2 и замкнув накоротко зажимы порта 1, находим, что

$$I_1 = -\dot{U}_0 Z_{12}/\Delta_Z. \quad (4.12)$$

По принципу взаимности, комплексные амплитуды токов, определяемых формулами (4.11) и (4.12), должны быть равны. Это возможно лишь в том случае, если

$$Z_{12} = Z_{21}. \quad (4.13)$$

Итак, *Z*-матрица взаимного четырехполюсника симметрична относительно главной диагонали.

Несколько по-иному формулируется условие взаимности четырехполюсника, описанного системой А-параметров. Подключив источник  $\dot{U}_0$  к порту 1 и замкнув накоротко зажимы порта 2, на основании (4.7) находим комплексную амплитуду тока

$$\dot{I}_2 = \dot{U}_0 / A_{12}. \quad (4.14)$$

Если же источник  $\dot{U}_0$  подключить к порту 2, а на зажимах порта 1 создать короткое замыкание ( $\dot{U}_1 = 0$ ), то из уравнения

$$0 = A_{11}\dot{U}_0 + A_{12}\dot{I}_2$$

следует, что в цепи порта 2 возникает ток с комплексной амплитудой

$$\dot{I}_2 = -A_{11}\dot{U}_0 / A_{12}. \quad (4.15)$$

Тогда, обратившись ко второму уравнению из системы (4.7), находим комплексную амплитуду тока в цепи порта 1

$$\dot{I}_1 = (A_{21} - A_{11}A_{22}/A_{12})\dot{U}_0 = (A_{21}A_{12} - A_{11}A_{22})\dot{U}_0 / A_{12}. \quad (4.16)$$

При использовании А-матриц в качестве положительных направлений токов выбирают те, которые изображены на рис. 4.1,б. Поэтому если в первом из описанных здесь мысленных экспериментов ток на основании (4.14) имеет положительный знак, то это означает, что соответствующая этому току стрелка направлена от верхнего зажима к нижнему. По принципу взаимности таким же должен быть ток в цепи порта 1, наблюдаемый во втором мысленном эксперименте. Но, поскольку при введении А-параметров стрелка тока  $\dot{I}_1$  направлена от нижнего зажима к верхнему, то должно выполняться равенство  $\dot{I}_1 = -\dot{I}_2$ , что на основании (4.14) и (4.16) возможно лишь при условии

$$A_{11}A_{22} - A_{21}A_{12} = \Delta_A = 1. \quad (4.17)$$

Таким образом, четыре элемента матрицы взаимного четырехполюсника связаны одним дополнительным условием. Тем самым число независимых элементов матрицы сокращается до трех.

**Связь между различными матрицами четырехполюсников.** Зная одну из матриц четырехполюсника, например Z, Y или A, можно получить любую другую матрицу. Покажем это на конкретных примерах.

Пусть дана система уравнений

$$\dot{U}_1 = Z_{11}\dot{I}_1 + Z_{12}\dot{I}_2,$$

$$\dot{U}_2 = Z_{21}\dot{I}_1 + Z_{22}\dot{I}_2,$$

коэффициентами которой служат элементы Z-матрицы. Данную систему можно решить относительно  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  с помощью формул Крамера:

$$\dot{I}_1 = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{vmatrix} \dot{U}_1 & Z_{12} \\ \dot{U}_2 & Z_{22} \end{vmatrix}; \quad \dot{I}_2 = \frac{1}{\Delta_Z} \begin{vmatrix} Z_{11} & \dot{U}_1 \\ Z_{21} & \dot{U}_2 \end{vmatrix}.$$

Раскрывая эти выражения, получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2, \\ I_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} Y_{11} &= Z_{22}/\Delta_Z, \quad Y_{12} = -Z_{12}/\Delta_Z, \\ Y_{21} &= -Z_{21}/\Delta_Z, \quad Y_{22} = Z_{11}/\Delta_Z. \end{aligned} \quad (4.18)$$

Выражения (4.18) представляют собой *формулы перехода* между элементами  $Z$ -матрицы и  $Y$ -матрицы четырехполюсника.

В качестве второго примера рассмотрим связь между  $Y$ - и  $A$ -матрицами. При этом учтем, что в системе  $Y$ -параметров положительные направления токов принято обозначать стрелками так, как это показано на рис. 4.1,а. Для  $A$ -параметров положительное направление тока  $I_2$  изменяется на противоположное (рис. 4.1,б). Поэтому уравнения четырехполюсника в системе  $Y$ -параметров должны быть записаны так:

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2, \\ -I_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2. \end{aligned} \quad (4.19)$$

Чтобы перейти к  $A$ -параметрам, данную систему следует преобразовать в два уравнения относительно  $\dot{U}_1$  и  $I_1$ . Разрешив эту систему, получим уравнения состояния цепи в форме (4.7).

Из первого уравнения (4.19)

$$-Y_{12}\dot{U}_2 = Y_{11}\dot{U}_1 - I_1, \quad (4.20)$$

откуда

$$\dot{U}_2 = (I_1 - Y_{11}\dot{U}_1)/Y_{12}. \quad (4.21)$$

Подставив (4.21) во второе уравнение системы (4.19), находим, что

$$-I_2 = (Y_{21} - Y_{22}Y_{11}/Y_{12})\dot{U}_1 + (Y_{22}/Y_{12})I_1. \quad (4.22)$$

Равенства (4.20) и (4.22) образуют требуемую систему уравнений с определителем

$$\Delta = Y_{11}Y_{22}/Y_{12} + Y_{21} - Y_{22}Y_{11}/Y_{12} = Y_{21}.$$

Решения данной системы:

$$\dot{U}_1 = \frac{1}{Y_{21}} \begin{vmatrix} -Y_{12}\dot{U}_2 & -I_1 \\ -I_2 & Y_{22}/Y_{12} \end{vmatrix} = (-Y_{22}\dot{U}_2 - I_2)/Y_{21}, \quad (4.23)$$

$$\begin{aligned} I_1 &= \frac{1}{Y_{21}} \begin{vmatrix} Y_{11} & -Y_{12}\dot{U}_2 \\ Y_{21} - Y_{22}Y_{11}/Y_{12} & -I_2 \end{vmatrix} = \\ &= (-\Delta_Y\dot{U}_2 - Y_{11}I_2)/Y_{21}. \end{aligned} \quad (4.24)$$

На основании (4.23) и (4.24) получаем формулы перехода от  $Y$ -параметров к  $A$ -параметрам

$$\begin{aligned} A_{11} &= -Y_{22}/Y_{21}, & A_{12} &= -1/Y_{21}, \\ A_{21} &= -\Delta_Y/Y_{21}, & A_{22} &= -Y_{11}/Y_{21}. \end{aligned} \quad (4.25)$$

**Составные четырехполюсники и их матрицы.** Два двухполюсника можно соединить или последовательно, или параллельно. Число способов, которыми соединяют между собой два четырехполюсника, значительно больше.

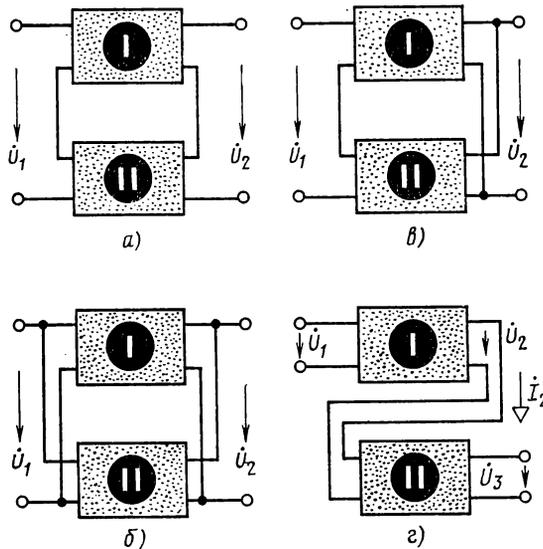


Рис. 4.3. Некоторые способы соединения двух четырехполюсников: а — последовательное соединение; б — параллельное соединение; в — последовательное соединение на входе и параллельное на выходе; г — каскадное соединение

На рис. 4.3, а—г изображены схемы составных четырехполюсников, образованных четырехполюсниками I и II.

В случае (а) одноименные порты четырехполюсников соединены последовательно. Так как  $\dot{U}_1 = \dot{U}_{I1} + \dot{U}_{II1}$ , а в каждом порте один и тот же ток протекает по обоим четырехполюсникам, то уравнения состояния данной цепи имеют вид

$$\begin{cases} \dot{U}_1 = (Z_{I11} + Z_{II11}) \dot{I}_1 + (Z_{I12} + Z_{II12}) \dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 = (Z_{I21} + Z_{II21}) \dot{I}_1 + (Z_{I22} + Z_{II22}) \dot{I}_2. \end{cases} \quad (4.26)$$

Отсюда видно, что при последовательном соединении четырехполюсников их  $Z$ -матрицы суммируются:

$$\mathbf{Z} = \mathbf{Z}_I + \mathbf{Z}_{II}. \quad (4.27)$$

Аналогичным образом доказывается, что составной четырехполюсник, полученный параллельным соединением элементов I и II [случай (б)] имеет Y-матрицу, равную сумме соответствующих матриц:

$$Y = Y_I + Y_{II}. \quad (4.28)$$

Если же элементы I и II со стороны порта 1 соединены последовательно, а со стороны порта 2 параллельно [случай (в)], то H-матрица составного четырехполюсника

$$H = H_I + H_{II}. \quad (4.29)$$

На рис. 4.3,г приведена схема *каскадного соединения* четырехполюсников I и II, играющих роль *звеньев* или *ступеней*. Такой способ соединения весьма распространен в радиотехнических устройствах, например, при создании усилителей. Здесь напряжение и ток на выходе предыдущего звена служат соответственно входным напряжением и входным током для последующего звена.

Расчет каскадных схем удобно проводить с помощью A-матриц их звеньев. Действительно, здесь

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{I\ 11} \dot{U}_2 + A_{I\ 12} \dot{I}_2, \\ \dot{I}_1 &= A_{I\ 21} \dot{U}_2 + A_{I\ 22} \dot{I}_2. \end{aligned} \quad (4.30)$$

Но, в свою очередь,

$$\begin{aligned} \dot{U}_2 &= A_{II\ 11} \dot{U}_3 + A_{II\ 12} \dot{I}_3, \\ \dot{I}_2 &= A_{II\ 21} \dot{U}_3 + A_{II\ 22} \dot{I}_3. \end{aligned} \quad (4.31)$$

Подставляя (4.31) в (4.30) и приводя подобные члены, получаем описание составного четырехполюсника в системе A-параметров

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= A_{11} \dot{U}_3 + A_{12} \dot{I}_3, \\ \dot{I}_1 &= A_{21} \dot{U}_3 + A_{22} \dot{I}_3, \end{aligned} \quad (4.32)$$

где

$$\begin{aligned} A_{11} &= A_{I\ 11} A_{II\ 11} + A_{I\ 12} A_{II\ 21}, \\ A_{12} &= A_{I\ 11} A_{II\ 12} + A_{I\ 12} A_{II\ 22}, \\ A_{21} &= A_{I\ 21} A_{II\ 11} + A_{I\ 22} A_{II\ 21}, \\ A_{22} &= A_{I\ 21} A_{II\ 12} + A_{I\ 22} A_{II\ 22}. \end{aligned} \quad (4.33)$$

Как известно из курса математики, формулы вида (4.33) описывают произведение матриц отдельных звеньев, выполняемое по алгоритму «сумма произведений элементов строки первого сомножителя на элементы столбца второго сомножителя»:

$$A = A_I A_{II}. \quad (4.34)$$

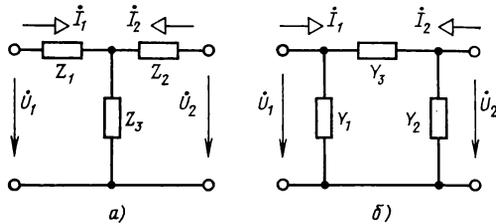


Рис. 4.4. Схемы некоторых четырехполюсников:  
а — Т-образная схема; б — П-образная схема

Следует отметить, что матричное умножение некоммутативно. Поэтому, если изменить порядок включения ступеней, то в общем случае  $A_I A_{II} \neq A_{II} A_I$ .

**Матрицы некоторых четырехполюсников.** На рис. 4.4,а приведена схема Т-образного четырехполюсника, который образован тремя двухполюсниками  $Z_1$ ,  $Z_2$  и  $Z_3$ . Чтобы получить Z-матрицу этой цепи, запишем уравнения по второму закону Кирхгофа, выполняя обход элементов  $Z_1$  и  $Z_3$  со стороны порта 1 и элементов  $Z_2$  и  $Z_3$  со стороны порта 2:

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= Z_1 \dot{I}_1 + Z_3 (\dot{I}_1 + \dot{I}_2), \\ \dot{U}_2 &= Z_2 \dot{I}_2 + Z_3 (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{U}_1 &= (Z_1 + Z_3) \dot{I}_1 + Z_3 \dot{I}_2, \\ \dot{U}_2 &= Z_3 \dot{I}_1 + (Z_2 + Z_3) \dot{I}_2. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Значит,

$$Z = \begin{bmatrix} Z_1 + Z_3 & Z_3 \\ Z_3 & Z_2 + Z_3 \end{bmatrix}. \quad (4.36)$$

Если  $Z_1 = Z_2 = 0$ , то определитель этой матрицы  $\Delta_Z = 0$  и поэтому система (4.35) не имеет единственного решения. Говорят, что Z-матрица такого четырехполюсника не существует.

На рис. 4.4,б изображена схема П-образного четырехполюсника, в состав которого входят линейные двухполюсники с комплексными проводимостями  $Y_1$ ,  $Y_2$  и  $Y_3$ . Найдем Y-матрицу данной цепи. Для этого запишем два уравнения по первому закону Кирхгофа, которые устанавливают правила распределения токов  $\dot{I}_1$  и  $\dot{I}_2$  в обоих портах:

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= Y_1 \dot{U}_1 + Y_3 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2), \\ \dot{I}_2 &= Y_2 \dot{U}_2 - Y_3 (\dot{U}_1 - \dot{U}_2) \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} \dot{I}_1 &= (Y_1 + Y_3) \dot{U}_1 - Y_3 \dot{U}_2, \\ \dot{I}_2 &= -Y_3 \dot{U}_1 + (Y_2 + Y_3) \dot{U}_2. \end{aligned} \quad (4.37)$$

Отсюда

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_3 & -Y_3 \\ -Y_3 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}. \quad (4.38)$$

Как и в предыдущем случае,  $\mathbf{Y}$ -матрица такой цепи не существует, если  $Y_1 = Y_2 = 0$ .

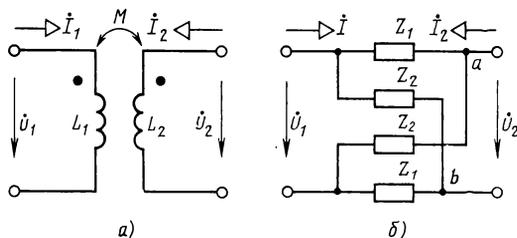


Рис. 4.5. Схемы некоторых четырехполюсников: а — трансформатор без потерь; б — симметричная X-образная цепь

Легко убедиться, что уравнения электрического равновесия трансформатора без потерь (рис. 4.5,а) имеют вид

$$\dot{U}_1 = Z_1 \dot{I}_1 + Z_M \dot{I}_2,$$

$$\dot{U}_2 = Z_M \dot{I}_1 + Z_2 \dot{I}_2,$$

где  $Z_1 = j\omega L_1$ ,  $Z_2 = j\omega L_2$ ,  $Z_M = j\omega M$ .

Отсюда получается  $\mathbf{Z}$ -матрица трансформатора

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} Z_1 & Z_M \\ Z_M & Z_2 \end{bmatrix}. \quad (4.39)$$

Наконец, рассмотрим так называемую симметричную X-образную (мостовую) схему, представленную на рис. 4.5,б. Для вычисления элементов ее  $\mathbf{Z}$ -матрицы будем считать, что порт 2 находится в режиме холостого хода. Видно, что ток  $\dot{I}_1$  в порте 1 есть сумма двух одинаковых токов в цепях, образованных последовательным соединением элементов  $Z_1$  и  $Z_2$ :

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_1}{(Z_1 + Z_2)/2} = \frac{2\dot{U}_1}{Z_1 + Z_2}. \quad (4.40)$$

Поэтому, согласно определению,

$$Z_{11} = \dot{U}_1 / \dot{I}_1 = (Z_1 + Z_2)/2. \quad (4.41)$$

Чтобы найти параметр  $Z_{21}$ , требуется прежде всего определить комплексную амплитуду напряжения  $\dot{U}_2$  в режиме холостого хода. Для этого следует заметить, что потенциалы узлов  $a$  и  $b$  оп-

ределяются сопротивлениями  $Z_1$  и  $Z_2$ , которые образуют два делителя напряжения:

$$\dot{U}_a = \frac{Z_2 \dot{U}_1}{Z_1 + Z_2}, \quad \dot{U}_b = \frac{Z_1 \dot{U}_1}{Z_1 + Z_2}.$$

Тогда

$$\dot{U}_2 = \dot{U}_a - \dot{U}_b = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_1 + Z_2} \dot{U}_1,$$

откуда, используя (4.40), получаем

$$Z_{21} = \dot{U}_2 / \dot{I}_1 = (Z_2 - Z_1) / 2. \quad (4.42)$$

Приняв во внимание симметрию данной цепи, находим окончательно

$$\mathbf{Z} = \begin{bmatrix} (Z_1 + Z_2)/2 & (Z_2 - Z_1)/2 \\ (Z_2 - Z_1)/2 & (Z_1 + Z_2)/2 \end{bmatrix}. \quad (4.43)$$

Аналогичным образом можно вычислить  $Z$ -матрицу мостовой цепи с произвольными сопротивлениями двухполюсников.

#### 4.2. СВОЙСТВА НАГРУЖЕННЫХ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

На рис. 4.6 изображена схема, содержащая четырехполюсник, к выходному порту 2 которого подключен пассивный двухполюсник нагрузки с комплексным сопротивлением  $Z_H$ . Входной порт 1 возбуждается источником гармонической ЭДС с комплексной амплитудой  $\dot{U}_1$ . Изучим процессы в данной цепи, используя формализм матричного описания.

**Функции цепи.** Так принято называть ряд числовых характеристик нагруженного четырехполюсника, которые определяются соотношениями между комплексными амплитудами  $\dot{U}_1$ ,  $\dot{U}_2$ ,  $I_1$  и  $I_2$ . Перечислим некоторые из них.

Коэффициент передачи тока — безразмерное комплексное число  $K_I = I_2 / I_1$ .

Коэффициент передачи напряжения — безразмерное комплексное число  $K_U = \dot{U}_2 / \dot{U}_1$ .

Комплексное входное сопротивление  $Z_{вх} = \dot{U}_1 / I_1$ .

Комплексное взаимное сопротивление передачи и  $Z_{вз.пр} = \dot{U}_2 / I_1$ .

Подчеркнем, что все эти параметры определяются при заданной нагрузке на зажимах порта 2. Если использовать те направления тока и напряжения, которые на рис. 4.6 приняты за положительные, то

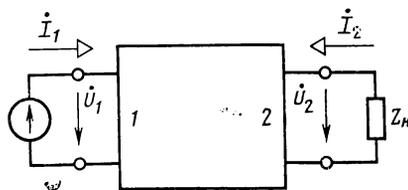


Рис. 4.6. Нагруженный четырехполюсник

$$\dot{U}_2 = -Z_H I_2. \quad (4.44)$$

Комплексное выходное сопротивление  $Z_{\text{вых}} = \dot{U}_2 / I_2$ , определяемое при условии, что порт 1 нагружен на внутреннее сопротивление генератора  $Z_G$ ; ЭДС источника на входе отсутствует.

**Расчет режима в системе Z-параметров.** Получим формулы для определения функций цепи в случае, когда математической моделью четырехполюсника служит его Z-матрица.

Подставив равенство (4.44) в систему (4.1), перепишем ее так:

$$\begin{aligned} Z_{11} I_1 + Z_{12} I_2 &= \dot{U}_1, \\ Z_{21} I_1 + (Z_{22} + Z_H) I_2 &= 0. \end{aligned} \quad (4.45)$$

Решения этих уравнений относительно  $I_1$  и  $I_2$  имеют вид

$$I_1 = \frac{\dot{U}_1 (Z_{22} + Z_H)}{\Delta_Z + Z_{11} Z_H}, \quad (4.46)$$

$$I_2 = \frac{-\dot{U}_1 Z_{21}}{\Delta_Z + Z_{11} Z_H}. \quad (4.47)$$

Отсюда находим коэффициент передачи тока

$$K_I = -\frac{Z_{21}}{Z_{22} + Z_H}. \quad (4.48)$$

Чтобы вычислить коэффициент передачи напряжения, следует объединить (4.44) и (4.47):

$$\dot{U}_2 = -Z_H I_2 = \frac{\dot{U}_1 Z_H Z_{21}}{\Delta_Z + Z_{11} Z_H},$$

откуда

$$K_U = \frac{Z_H Z_{21}}{\Delta_Z + Z_{11} Z_H}. \quad (4.49)$$

Используя выражение (4.46), получаем формулу для расчета входного сопротивления нагруженного четырехполюсника

$$Z_{\text{вх}} = \frac{\dot{U}_1}{I_1} = \frac{\Delta_Z + Z_{11} Z_H}{Z_{22} + Z_H}. \quad (4.50)$$

По аналогии, выходное сопротивление

$$Z_{\text{вых}} = \frac{\Delta_Z + Z_{22} Z_G}{Z_{11} + Z_G}. \quad (4.51)$$

**Пример 4.1.** В T-образном четырехполюснике (рис. 4.4,а) элементы  $Z_1$  и  $Z_2$  представляют собой катушки с одинаковыми индуктивностями  $L=80$  мкГн. Элементом  $Z_3$  служит конденсатор емкостью  $C=3$  нФ. Чисто резистивная нагрузка цепи имеет сопротивление  $R_H=600$  Ом. Найти численные значения функций цепи  $K_I$ ,  $K_U$  и  $Z_{\text{вх}}$  при частоте источника на входе  $f=0,4$  МГц.

Вычисляем сопротивления элементов, образующих четырехполюсник:  $Z_1 = Z_2 = j\omega L = j201 \text{ Ом}$ ;  $Z_3 = 1/(j\omega C) = -j133 \text{ Ом}$ .

В соответствии с (4.36)  $Z$ -матрица четырехполюсника

$$Z = \begin{bmatrix} j68 & -j133 \\ -j133 & j68 \end{bmatrix};$$

определитель матрицы  $\Delta_z = -68^2 + 133^2 = 13065$ .

По формуле (4.48)

$$K_I = \frac{j133}{600 + j68} = \frac{j133(600 - j68)}{600^2 + 68^2} = 0,025 + j0,219 = 0,22 \exp(j83,5^\circ).$$

Таким образом, ток в нагрузке по амплитуде примерно в пять раз меньше чем на входе; выходной ток опережает по фазе входной ток на угол, близкий к  $90^\circ$ .

В соответствии с (4.49) коэффициент передачи напряжения

$$K_U = \frac{-j600 \cdot 133}{13065 + j68 \cdot 600} = \frac{-j79800}{42840 \exp(j72,2^\circ)} = 1,863 \exp(-j162,2^\circ).$$

Амплитуда напряжения на выходе почти в два раза больше чем на входе.

Используя (4.50), находим входное сопротивление цепи

$$Z_{вх} = \frac{42840 \exp(j72,2^\circ)}{600 + j68} = 71 \exp(j65,7^\circ) \text{ Ом}.$$

**Функции цепи в системе А-параметров.** Приведем для справок формулы, позволяющие находить величины  $K_I$ ,  $K_U$ ,  $Z_{вх}$  и  $Z_{вых}$  по известным элементам А-матрицы четырехполюсника:

$$K_I = \frac{1}{A_{21} Z_H + A_{22}}, \quad (4.52)$$

$$K_U = \frac{Z_H}{A_{11} Z_H + A_{12}}, \quad (4.53)$$

$$Z_{вх} = \frac{A_{11} Z_H + A_{12}}{A_{21} Z_H + A_{22}}, \quad (4.54)$$

$$Z_{вых} = \frac{A_{22} Z_r + A_{12}}{A_{21} Z_r + A_{11}}. \quad (4.55)$$

**Пример 4.2.** На рис. 4.7, а, б изображены схемы однозвенного (а) и двухзвенного (б) RC-фильтров. Параметры цепей:  $R=2 \text{ кОм}$ ,  $C=5 \text{ нФ}$ ,  $R_H=15 \text{ кОм}$ .

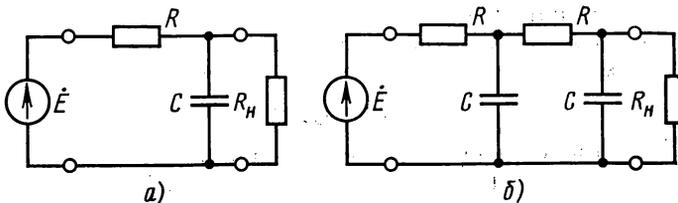


Рис. 4.7. Схемы RC-фильтров:  
а — однозвенного; б — двухзвенного

Частота входного сигнала  $\omega = 3 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ . Найти и сравнить коэффициенты передачи напряжения обоих фильтров.

А-матрицу однозвенного RC-фильтра легко найти, проведя мысленно опыты короткого замыкания и холостого хода:

$$A = \begin{bmatrix} 1 + j\omega RC & R \\ j\omega C & 1 \end{bmatrix}.$$

Подставив числовые значения параметров, находим, что

$$A = \begin{bmatrix} 1 + j0,3 & 2 \cdot 10^3 \\ j1,5 \cdot 10^{-4} & 1 \end{bmatrix}.$$

По формуле (4.53)

$$K_U = \frac{15 \cdot 10^3}{17 \cdot 10^3 + j4,5 \cdot 10^3} = \frac{15}{17,58 \exp(j14,8^\circ)} = 0,85 \exp(-j14,8^\circ).$$

Для двухзвенного фильтра А-матрица получится путем возведения в квадрат А-матрицы однозвенного фильтра; элементы первой строки

$$A_{11} = 1 - \omega^2 R^2 C^2 + j3\omega RC = 0,91 + j0,9,$$

$$A_{12} = 2R + j\omega R^2 C = 4 \cdot 10^3 + j6 \cdot 10^2.$$

Тогда

$$K_U = \frac{15 \cdot 10^3}{17,65 \cdot 10^3 + j14,1 \cdot 10^3} = \frac{15}{22,6 \exp(j38,6^\circ)} = 0,66 \exp(-j38,6^\circ).$$

Итак, при заданной частоте амплитуда сигнала на выходе двухзвенного фильтра в 1,3 раза меньше, чем на выходе однозвенного устройства. Двухзвенный фильтр является более инерционным устройством и вносит поэтому больший фазовый сдвиг в сторону запаздывания.

### 4.3. АКТИВНЫЕ И НЕВЗАИМНЫЕ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКИ

В радиотехнике широко используются активные звенья, например, усилители. Такие элементы преобразуют энергию вспомогательных источников в энергию полезного сигнала.

Будем рассматривать *неавтономные* активные четырехполюсники, которые не содержат внутри себя неуправляемых источников (генераторов). В состав неавтономных четырехполюсников входят либо управляемые (зависимые) источники, либо резистивные двухполюсники с отрицательным активным сопротивлением.

Рассмотрим нагруженный четырехполюсник (рис. 4.6). По определению, такой четырехполюсник является активным, если сумма средних мощностей в обоих портах отрицательна:

$$P_{ср1} + P_{ср2} < 0.$$

Это неравенство означает, что поток мощности направлен из четырехполюсника во внешние цепи. Подчеркнем, что эта мощность в равной мере может направляться как в нагрузку, так и в генератор. В последнем случае говорят, что активный четырехполюсник

осуществляет *регенерацию* источника сигнала, подключенного ко входному порту.

Получим условия, которым должны удовлетворять элементы матрицы сопротивлений активного четырехполюсника. Для этого возьмем систему уравнений (4.1), умножим первое уравнение на  $\dot{I}_1^*$ , второе уравнение на  $\dot{I}_2^*$ , а затем результаты сложим:

$$\dot{U}_1 \dot{I}_1^* + \dot{U}_2 \dot{I}_2^* = Z_{11} \dot{I}_1^* \dot{I}_1 + Z_{12} \dot{I}_1^* \dot{I}_2 + Z_{21} \dot{I}_1^* \dot{I}_2 + Z_{22} \dot{I}_2^* \dot{I}_2. \quad (4.56)$$

В соответствии с (4.48)

$$\dot{I}_2 = -\frac{j_1 Z_{21}}{Z_{22} + Z_H},$$

поэтому

$$\dot{I}_2 \dot{I}_2^* = \frac{j_1 \dot{I}_1^* Z_{21} Z_{21}^*}{(Z_{22} + Z_H)(Z_{22}^* + Z_H^*)} = \frac{j_1 \dot{I}_1^* |Z_{21}|^2}{|Z_{22} + Z_H|^2}, \quad (4.57)$$

$$\dot{I}_1 \dot{I}_2^* = \frac{-j_1 \dot{I}_1^* Z_{21}^*}{Z_{22}^* + Z_H^*}, \quad (4.58)$$

$$\dot{I}_1^* \dot{I}_2 = \frac{-j_1 \dot{I}_1^* Z_{21}}{Z_{22} + Z_H}. \quad (4.59)$$

Сумма средних мощностей в обоих портах

$$P_{cp1} + P_{cp2} = \frac{1}{2} \operatorname{Re}(\dot{U}_1 \dot{I}_1^* + \dot{U}_2 \dot{I}_2^*).$$

Воспользовавшись формулами (4.56)–(4.59), приходим к следующему условию, которое обеспечивает активный характер четырехполюсника:

$$\operatorname{Re} \left[ Z_{11} - \frac{Z_{12} Z_{21} (Z_H^* + Z_{22}^*) + |Z_{21}|^2 Z_H}{|Z_{22} + Z_H|^2} \right] < 0. \quad (4.60)$$

В ряде случаев исследование активности четырехполюсника удастся выполнить на основе принципиальной схемы цепи. Рассмотрим, например, четырехполюсник, имеющий активное входное сопротивление  $R_{вх}$  и внутреннее сопротивление  $R_i$  (рис. 4.8, а).

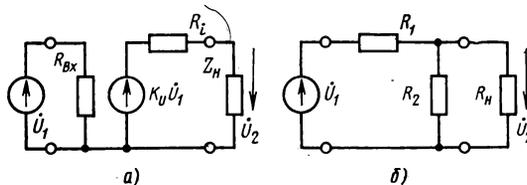


Рис. 4.8. Активные цепи:

а — схема с управляемым источником напряжения; б — схема с отрицательным сопротивлением ..

Цепь содержит идеальный управляемый источник типа ИНУН с вещественным коэффициентом передачи напряжения  $K_U$ , нагрузкой служит пассивный двухполюсник, имеющий импеданс  $Z_H = R_H + jX_H$ .

Входная цепь потребляет от источника среднюю мощность

$$P_{\text{ср1}} = U_{m1}^2 / (2R_{\text{вх}}). \quad (4.61)$$

Комплексная амплитуда тока в нагрузке

$$I_2 = \frac{K_U \dot{U}_1}{(R_i + R_H) + jX_H};$$

выходное напряжение

$$\dot{U}_2 = \frac{K_U \dot{U}_1 (R_H + jX_H)}{(R_i + R_H) + jX_H};$$

средняя мощность, выделяемая в нагрузке,

$$P_{\text{ср2}} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (\dot{U}_2^* I_2) = \frac{K_U^2 U_{m1}^2 R_H}{2 [(R_i + R_H)^2 + X_H^2]}. \quad (4.62)$$

Четырехполюсник будет активным, если  $P_{\text{ср2}} > P_{\text{ср1}}$ , т. е. при условии, что

$$K_U > \frac{|R_i + Z_H|}{\sqrt{R_H R_{\text{вх}}}}. \quad (4.63)$$

Схема другого четырехполюсника, который при определенных условиях может стать активным, изображена на рис. 4.8,б. Здесь элементы  $R_1$  и  $R_2$  образуют резистивный делитель напряжения; сопротивление  $R_1 > 0$ , а сопротивление  $R_2 = -R_0 < 0$ .

Средняя мощность в порте 1, поступающая от источника в четырехполюсник,

$$P_{\text{ср1}} = \frac{U_{m1}^2 (R_H - R_0)}{2 [-R_1 R_0 + R_H (R_1 - R_0)]} \quad (4.64)$$

в зависимости от выбора параметров  $R_0$  и  $R_1$  может быть как положительной, так и отрицательной.

Комплексная амплитуда выходного напряжения

$$\dot{U}_2 = \frac{\dot{U}_1 R_2 R_H / (R_2 + R_H)}{R_1 + R_2 R_H / (R_2 + R_H)} = \frac{-\dot{U}_1 R_0 R_H}{-R_1 R_0 + R_H (R_1 - R_0)}.$$

Мощность, рассеиваемая в резисторе  $R_H$ , всегда положительна:

$$P_{\text{ср2}} = \frac{U_{m2}^2}{2R_H} = \frac{U_{m1}^2 R_0^2 R_H}{2 [-R_1 R_0 + R_H (R_1 - R_0)]^2}. \quad (4.65)$$

Это означает, что по отношению к нагрузке четырехполюсник служит источником, т. е. активная мощность его отрицательна:  $P =$

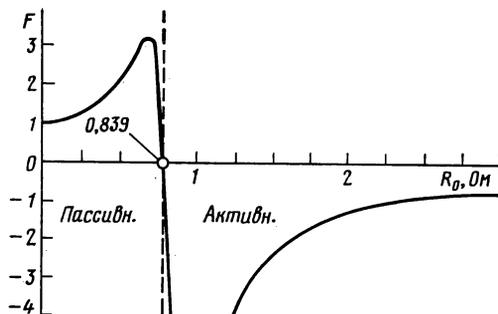


Рис. 4.9. Зависимость режима работы четырехполюсника от значения модуля отрицательного сопротивления

$= -P_{\text{ср2}}$ . Объединяя (4.64) и (4.65), находим условие, при котором четырехполюсник будет активным:

$$\frac{R_{\text{H}} - R_0}{-R_1 R_0 + R_{\text{H}}(R_1 - R_0)} - \frac{R_0^2 R_{\text{H}}}{[-R_1 R_0 + R_{\text{H}}(R_1 - R_0)]^2} < 0. \quad (4.66)$$

На рис. 4.9 изображен график функции  $F(R_0)$  — левой части неравенства (4.66) при фиксированных значениях  $R_1 = 1$  Ом и  $R_{\text{H}} = 10$  Ом. Можно видеть, что в полубесконечном интервале  $0,839 < R_0 < \infty$  данная цепь активна.

**Невзаимные четырехполюсники.** Используя управляемые источники тока или напряжения, можно создавать невзаимные четырехполюсники, имеющие ряд ценных в практическом отношении свойств.

В качестве примера на рис. 4.10,а изображена схема *гиратора*, который образован двумя идеальными источниками тока, управляемыми напряжением (ИТУН). Единственным параметром такого источника служит крутизна  $S$  с размерностью проводимости. Источник 2 отличается от источника 1 тем, что инвертирует, т. е. изменяет на противоположный знак выходного колебания.

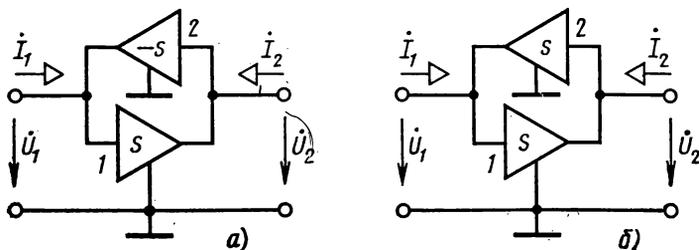


Рис. 4.10. Некоторые невзаимные четырехполюсники:

а — гиратор; б — инвертор сопротивления

Источник 1 создает в выходном порте ток  $I_2 = S\dot{U}_1$ , в то время как ток во входном порте, создаваемый источником 2, определяется выходным напряжением:  $I_1 = -S\dot{U}_2$ . Таким образом, Y-матрица гиратора имеет вид

$$\mathbf{Y} = \begin{bmatrix} 0 & -S \\ S & 0 \end{bmatrix}.$$

Поскольку  $Y_{12} \neq Y_{21}$ , то гиратор невязимен.

Пусть порт 2 гиратора нагружен на импеданс  $Z_H$ , т. е.  $\dot{U}_2 = -Z_H I_2$ . Это означает, что  $\dot{U}_2 = -SZ_H \dot{U}_1$ ; при этом на входе возникает ток с комплексной амплитудой  $I_1 = S^2 Z_H \dot{U}_1$ . Тогда входное сопротивление гиратора

$$Z_{вх} = \frac{\dot{U}_1}{I_1} = \frac{1}{S^2 Z_H}. \quad (4.67)$$

Примечательно, что если нагрузка емкостная, т. е.  $Z_H = 1/(j\omega C)$ , то входное сопротивление гиратора имеет индуктивный характер:  $Z_{вх} = j\omega L_{эк}$ , где

$$L_{эк} = C/S^2 \quad (4.68)$$

— эквивалентная индуктивность.

Гираторы обычно выполняют на базе сложных интегральных микросхем, называемых операционными усилителями, и используют для имитации индуктивных элементов в микроэлектронных цепях. При этом удается реализовать весьма большие номиналы индуктивностей. Так, при  $C = 1$  мкФ и  $S = 1$  мА/В имеем  $L_{эк} = 1$  Гн. Соответствующая катушка имела бы неприемлемо большие массу и габариты.

Если оба ИТУН одинаковы (рис. 4.10,б), то гиратор превращается в *конвертор сопротивления*, так как его входной импеданс

$$Z_{вх} = -\frac{1}{S^2 Z_H}. \quad (4.69)$$

Подключив к конвертору резистивную нагрузку  $R_H$ , получим элемент с отрицательным входным сопротивлением, который может использоваться, например, в автоколебательных устройствах.

### ВОПРОСЫ

1. Каков физический смысл коэффициентов, образующих матрицы  $\mathbf{Z}$  и  $\mathbf{A}$  некоторого линейного четырехполюсника?
2. Какому условию должны удовлетворять элементы  $\mathbf{A}$ -матрицы взаимного четырехполюсника?
3. Как найти результирующую  $\mathbf{A}$ -матрицу двух каскадно включенных четырехполюсников?
4. Что такое функции цепи?
5. Каким свойством обладает неавтономный активный четырехполюсник?
6. Как работают конвертор сопротивления и гиратор? Поясните наглядно, почему гиратор является невязимым четырехполюсником.

## 5. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ

### 5.1. ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ

Изученные ранее примеры показывают, что функции цепей, такие как входные, передаточные и выходные сопротивления и проводимости, а также коэффициенты передачи напряжения или тока зависят от частоты. На этом основана работа радиотехнических цепей, которые выполняют частотную фильтрацию полезного сигнала, выделяя его из смеси с помехами и шумами.

Функцию, описывающую частотную зависимость отношения двух любых комплексных амплитуд, можно назвать *частотным коэффициентом передачи*  $K(j\omega)$ . Характерный вид аргумента связан с тем, что в данную функцию входят различные степени выражения  $j\omega$ .

В общем случае функция  $K(j\omega)$  принимает комплексные значения и может быть представлена в показательной форме

$$K(j\omega) = |K(j\omega)| \exp(j\varphi_K(\omega)). \quad (5.1)$$

Частотную зависимость модуля  $|K(j\omega)|$  называют *амплитудно-частотной характеристикой* цепи (АЧХ), функция  $\varphi_K(\omega)$  представляет собой *фазочастотную характеристику* (ФЧХ) цепи; АЧХ устанавливает связь между амплитудами колебаний на входе и выходе цепи при различных частотах, ФЧХ описывает частотную зависимость фазового сдвига между входным и выходным сигналами.

В радиотехнике частотный коэффициент передачи чаще всего представляет собой безразмерное отношение напряжений или токов. Для измерения значений таких АЧХ удобно использовать особые логарифмические единицы — децибелы. Для этого вводят понятие *усиления* цепи

$$\Delta(\omega) = 20 \lg |K(j\omega)|, \text{ дБ}. \quad (5.2)$$

В теории цепей получил распространение еще один способ графического представления частотных свойств цепей — так называемая *диаграмма Найквиста*. Она представляет собой годограф (геометрическое место) конца вектора  $K(j\omega)$  на комплексной плоскости при различных значениях частоты  $\omega$ , которая изменяется в пределах от 0 до  $\infty$ . Диаграмма Найквиста объединяет в себе свойства АЧХ и ФЧХ; поэтому иногда ее называют *амплитудно-фазовой характеристикой* (АФХ).

### 5.2. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ПРОСТЫХ RC- И RL-ЦЕПЕЙ

На рис. 5.1,а изображена схема простейшей RC-цепи. Определим для нее частотный коэффициент передачи напряжения  $K(j\omega) =$

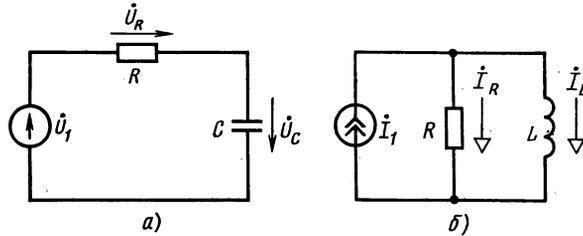


Рис. 5.1. Схемы некоторых простых цепей:  
а — последовательная  $RC$ -цепь; б — параллельная  $RL$ -цепь

$= \dot{U}_C / \dot{U}_1$ . По отношению к выходным зажимам данная  $RC$ -цепь является простым делителем напряжения и поэтому

$$K(j\omega) = \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{1}{1 + j\omega RC} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}. \quad (5.3)$$

Здесь введен параметр  $\tau = RC$  с размерностью времени, который называется *постоянной времени* данной цепи.

При рассматриваемом включении  $RC$ -цепь имеет АЧХ

$$|K(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} \quad (5.4)$$

и ФЧХ

$$\varphi_K(\omega) = -\text{arctg } \omega\tau. \quad (5.5)$$

Если выходным сигналом служит напряжение на резисторе, то частотный коэффициент передачи напряжения  $K(j\omega) = \dot{U}_R / \dot{U}_1$ . В данном случае

$$K(j\omega) = \frac{R}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}, \quad (5.6)$$

$$|K(j\omega)| = \frac{\omega\tau}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}}, \quad (5.7)$$

$$\varphi_K(\omega) = (\pi/2) - \text{arctg } \omega\tau. \quad (5.8)$$

На рис. 5.1,б изображена схема параллельной  $RL$ -цепи. Входной сигнал создается источником гармонического тока с комплексной амплитудой  $\dot{I}_1$ . Рассмотрим частотный коэффициент передачи тока  $K(j\omega) = \dot{I}_L / \dot{I}_1$ . По первому закону Кирхгофа  $\dot{I}_1 = \dot{I}_R + \dot{I}_L$ . Напряжение на элементах  $R$  и  $L$  одно и то же, а это значит, что  $R\dot{I}_R = j\omega L\dot{I}_L$ . Отсюда получаем равенство

$$\dot{I}_1 = (1 + j\omega L/R)\dot{I}_L, \quad (5.9)$$

из которого следует, что

$$K(j\omega) = \frac{1}{1 + j\omega L/R} = \frac{1}{1 + j\omega\tau}, \quad (5.10)$$

где  $\tau = L/R$  — постоянная времени данной цепи.

Таким же способом находим коэффициент передачи тока  $K(j\omega) = I_R/I_1$  для случая, когда выходным сигналом служит ток в резистивной ветви:

$$K(j\omega) = \frac{j\omega L}{R + j\omega L} = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}. \quad (5.11)$$

Следует обратить внимание на то, что формула (5.3) совпадает с (5.10), а формула (5.6) с (5.11), т. е. соответствующие цепи являются эквивалентными.

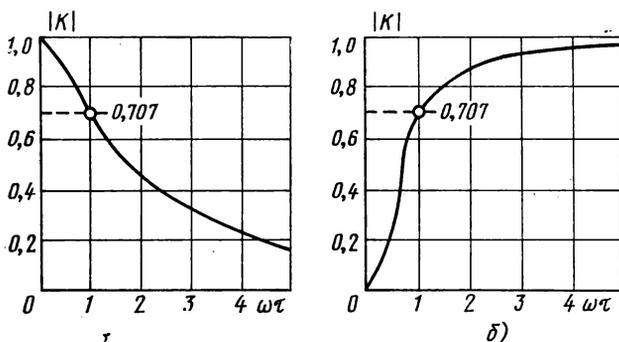


Рис. 5.2. Амплитудно-частотные характеристики  $RC$ -цепи:

*a* — при съеме выходного напряжения с конденсатора; *б* — при съеме выходного напряжения с резистора

На рис. 5.2,*a* изображен график АЧХ для  $RC$ -цепи, у которой выходным сигналом служит напряжение на конденсаторе. В равной мере этот график описывает частотные свойства  $RL$ -цепи, у которой выходным сигналом является ток в индуктивности. Соответствующая ФЧХ приведена на рис. 5.3,*a*. Здесь и в дальнейшем частотным аргументом служит безразмерное произведение  $\omega\tau$ .

Видно, что данные цепи мало ослабляют низкочастотные колебания и сильно подавляют колебания с высокими частотами. Говорят, что такие цепи являются *фильтрами нижних частот* (ФНЧ). Принято вводить *граничную частоту* или *частоту среза*  $\omega_c$  фильтра. На этой частоте значение АЧХ уменьшается до уровня  $1/\sqrt{2} = 0,707$  от максимального значения. Из формулы (5.4) следует, что  $\omega_c\tau = 1$ , откуда

$$\omega_c = 1/\tau. \quad (5.12)$$

Отметим, что усиление фильтра на частоте среза  $\Delta(\omega_c) = 20 \lg 0,707 = -3$  дБ.

Из графика на рис. 5.3,*a* видно, что в рассматриваемом ФНЧ фаза выходного сигнала отстает от фазы сигнала на входе; фа-

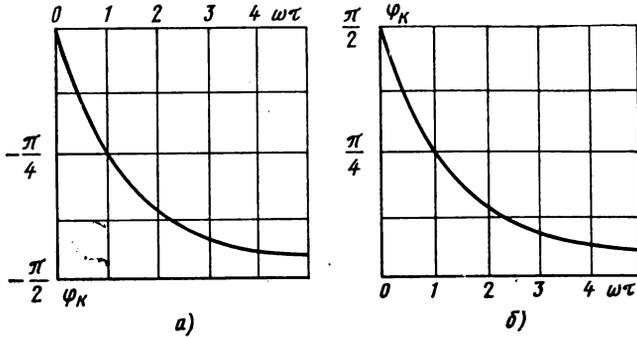


Рис. 5.3. Фазочастотные характеристики  $RC$ -цепи:  
 а — при съеме выходного напряжения с конденсатора; б — при съеме выходного напряжения с резистора

зовый сдвиг составляет  $-45^\circ$  на частоте  $\omega_c$  и стремится к  $-90^\circ$  на бесконечно большой частоте.

Диаметрально противоположными свойствами обладает последовательная  $RC$ -цепь со съемом выходного колебания с резистора или параллельная  $RL$ -цепь, у которой выходным сигналом является ток в резисторе. Графики АЧХ и ФЧХ таких цепей, построенные по формулам (5.6) и (5.8), изображены на рис. 5.2,б и 5.3,б. Такие цепи являются *фильтрами верхних частот* (ФВЧ). Частота среза фильтра по уровню 0,707 от максимального значения по-прежнему дается формулой (5.12); ФВЧ вносит опережающий фазовый сдвиг, равный  $+45^\circ$  на частоте  $\omega_c$ .

Чтобы построить диаграмму Найквиста применительно к функции  $K(j\omega)$ , выражаемой формулами (5.3) или (5.10), введем переменные  $x = \operatorname{Re} K(j\omega)$  и  $y = \operatorname{Im} K(j\omega)$ :

$$K(j\omega) = x + jy = \frac{1}{1 + \omega^2 \tau^2} - j \frac{\omega \tau}{1 + \omega^2 \tau^2}. \quad (5.13)$$

Произведение  $\omega^2 \tau^2$  следует выразить явно через  $x$ :

$$\omega^2 \tau^2 = (1-x)/x,$$

а затем подставить этот результат в выражение для  $y^2$  и получить

$$y^2 = x(1-x). \quad (5.14)$$

Тождественное преобразование формулы (5.14) приводит к уравнению годографа Найквиста

$$y^2 + x^2 - x + 1/4 = 1/4$$

или

$$(x-1/2)^2 + y^2 = 1/4. \quad (5.15)$$

Получено уравнение окружности радиусом  $1/2$  с центром в точке  $(1/2, 0)$ . Соответствующий график представлен на рис. 5.4,а.

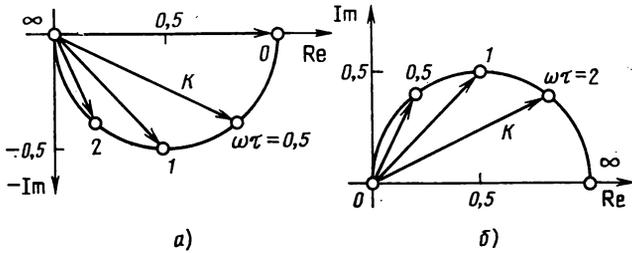


Рис. 5.4. Диаграммы Найквиста:  
 а — для ФНЧ; б — для ФВЧ

Годограф Найквиста для ФВЧ [см. формулы (5.6) или (5.11)] изображен на рис. 5.4,б. На обоих графиках указан ряд числовых значений параметра  $\omega\tau$ .

### 5.3. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ БОЛЕЕ СЛОЖНЫХ RC-ЦЕПЕЙ

Комбинируя несколько элементов  $R$  и  $C$ , удается получать разнообразные формы АЧХ и ФЧХ. Рассмотрим ряд конкретных примеров.

**Звено с запаздывающей ФЧХ.** Схема цепи приведена на рис. 5.5,а. Частотный коэффициент передачи напряжения

$$K_U(j\omega) = \frac{R_2 + 1/(j\omega C)}{R_1 + R_2 + 1/(j\omega C)} = \frac{1 + j\omega R_2 C}{1 + j\omega(R_1 + R_2)C}$$

Введем безразмерную частотную переменную  $\omega = \omega R_2 C$  и параметр  $m = R_1/R_2$ . Тогда

$$K_U(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{1 + j\omega(1 + m)}, \quad (5.16)$$

$$|K_U(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \omega^2}{1 + \omega^2(1 + m)^2}}, \quad (5.17)$$

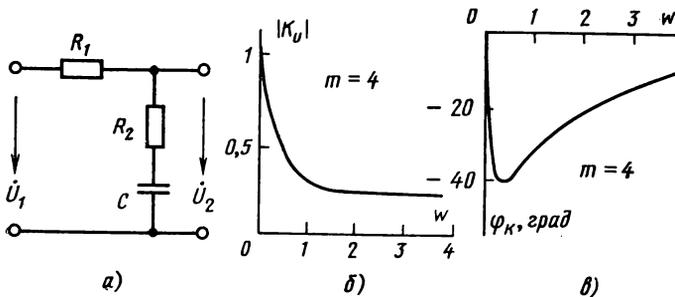


Рис. 5.5. Звено с запаздывающей ФЧХ:  
 а — схема цепи; б — АЧХ; в — ФЧХ

$$\varphi_K(\omega) = \arctg \omega - \arctg [\omega(1+m)]. \quad (5.18)$$

Графики АЧХ и ФЧХ для случая  $m=4$  изображены на рис. 5.5,б и 5.5,в. Если частота достаточно высока, модуль сопротивления конденсатора мал и цепь превращается в резистивный делитель напряжения с постоянным коэффициентом передачи. Вносимый фазовый сдвиг всегда отрицателен и зависит от частоты. Данную цепь применяют как частотнозависимый фазовый корректор.

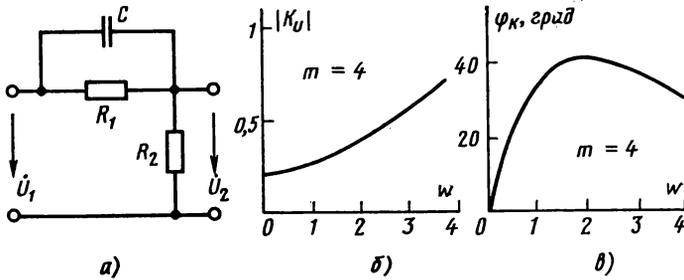


Рис. 5.6. Звено с опережающей ФЧХ:  
а — схема цепи; б — АЧХ; в — ФЧХ

**Звено с опережающей ФЧХ.** Схема цепи изображена на рис. 5.6,а. Коэффициент передачи напряжения

$$K_U(j\omega) = \frac{R_2}{\frac{R_1/(j\omega C)}{R_1 + 1/(j\omega C)} + R_2} = \frac{R_2(1 + j\omega R_1 C)}{R_1 + R_2(1 + j\omega R_1 C)}$$

Обозначив  $\omega = \omega R_1 C$  и  $m = R_1/R_2$ , получаем

$$K_U(j\omega) = \frac{1 + j\omega}{1 + m + j\omega}, \quad (5.19)$$

$$|K_U(j\omega)| = \sqrt{\frac{1 + \omega^2}{(1+m)^2 + \omega^2}}, \quad (5.20)$$

$$\varphi_K(\omega) = \arctg \omega - \arctg [\omega/(1+m)]. \quad (5.21)$$

На рис. 5.6,б,в представлены графики АЧХ и ФЧХ, построенные при  $m=4$ . Цепь ведет себя подобно ФВЧ, так как при  $\omega \rightarrow \infty$  модуль сопротивления конденсатора уменьшается и  $|K_U| \rightarrow 1$ . Данную цепь используют как частотнозависимый фазовый корректор с опережающим фазовым сдвигом на всех частотах.

**Фильтр Вина.** Схема этой цепи, предложенной немецким ученым Вином, изображена на рис. 5.7,а. Введем импеданс последовательной ветви

$$Z_1 = R + 1(j\omega C) = (1 + j\omega RC)/(j\omega C)$$

и импеданс параллельного соединения элементов  $R$  и  $C$

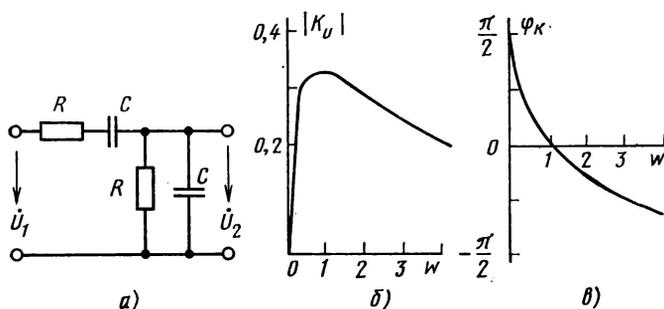


Рис. 5.7. Фильтр Вина:  
а — схема цепи; б — АЧХ; в — ФЧХ

$$Z_2 = \frac{R/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} = \frac{R}{1 + j\omega RC}.$$

Используя безразмерную переменную  $\omega = \omega RC$ , получаем

$$K_U(j\omega) = \frac{Z_2}{Z_1 + Z_2} = \frac{1}{3 + j(\omega - 1/\omega)}, \quad (5.22)$$

$$|K_U(j\omega)| = 1/\sqrt{9 + (\omega - 1/\omega)^2}, \quad (5.23)$$

$$\varphi_K(\omega) = -\arctg[(\omega - 1/\omega)/3]. \quad (5.24)$$

Кривые, рассчитанные по формулам (5.23) и (5.24), изображены на рис. 5.7, б, в. Фильтр Вина имеет малые значения модуля частотного коэффициента передачи напряжения как на низких, так и на высоких частотах. Максимум, равный 0,33, достигается при  $\omega = 1$ . Говорят, что такая цепь является *полосовым фильтром* (ПФ). Фазовый сдвиг, вносимый данным фильтром, на разных частотах может быть как положительным, так и отрицательным.

**«Перекрытый» фильтр.** На рис. 5.8, а изображена схема «перекрытого» четырехполюсника, образованного импедансами  $Z_1 - Z_4$ . Найдем частотный коэффициент передачи напряжения  $K_U(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{U}_1$ , считая, что порт 2 находится в режиме холостого хода, а к порту 1 подключен источник ЭДС  $\dot{U}_1$ .

Воспользовавшись методом контурных токов, для переменных  $\dot{I}_{K1}$  и  $\dot{I}_{K2}$ , показанных на рисунке, имеем систему двух уравнений

$$\begin{aligned} (Z_1 + Z_3)\dot{I}_{K1} - Z_1\dot{I}_{K2} &= \dot{U}_1, \\ -Z_1\dot{I}_{K1} + (Z_1 + Z_2 + Z_4)\dot{I}_{K2} &= 0, \end{aligned} \quad (5.25)$$

решения которой

$$\dot{I}_{K1} = \frac{(Z_1 + Z_2 + Z_4)\dot{U}_1}{Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 + Z_3 Z_4}, \quad (5.26)$$

$$\dot{I}_{K2} = \frac{Z_1\dot{U}_1}{Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 + Z_3 Z_4}. \quad (5.27)$$

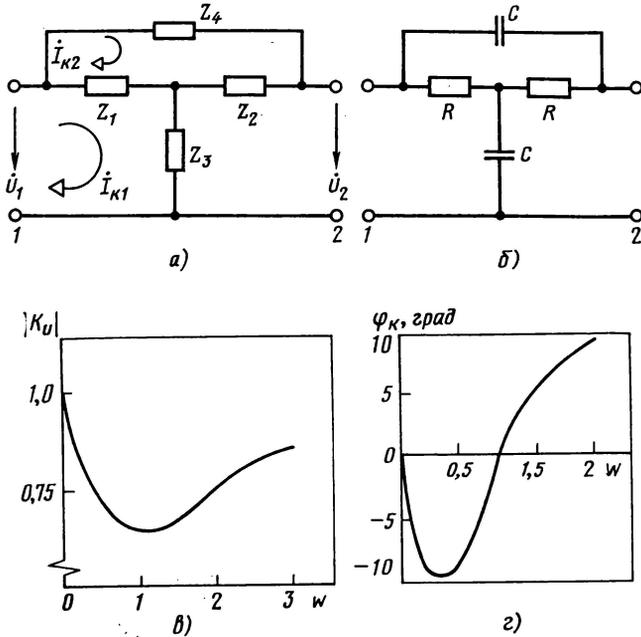


Рис. 5.8. «Перекрытый» фильтр:

а — схема цепи; б — реализация с помощью элементов  $R$  и  $C$ ;  
в, г — АЧХ и ФЧХ для фильтра, собранного по схеме б

Выходное колебание имеет комплексную амплитуду  $\dot{U}_2 = Z_3 \dot{I}_{K1} + Z_2 \dot{I}_{K2}$ . Подставив сюда выражения (5.26) и (5.27), получаем

$$K_U = \frac{Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_3 Z_4 + Z_1 Z_2}{Z_1 Z_3 + Z_2 Z_3 + Z_1 Z_2 + Z_1 Z_4 + Z_3 Z_4}. \quad (5.28)$$

Для симметричного  $RC$ -четырёхполюсника (рис. 5.8,б)

$$K_U(j\omega) = \frac{1 - \omega^2 + j2\omega}{1 - \omega^2 + j3\omega}. \quad (5.29)$$

Амплитудно-частотная характеристика данной цепи

$$|K_U(j\omega)| = \sqrt{\frac{(1 - \omega^2)^2 + 4\omega^2}{(1 - \omega^2)^2 + 9\omega^2}}. \quad (5.30)$$

Фазочастотная характеристика является разностью аргументов числителя и знаменателя в выражении (5.29). Вычисляя ФЧХ, следует иметь в виду, что числитель и знаменатель при  $\omega < 1$  лежат в первом квадранте комплексной плоскости, а при  $\omega > 1$  — во втором квадранте. Тогда

$$\varphi_K(\omega) = \begin{cases} \operatorname{arctg}[2\omega/(1 - \omega^2)] - \operatorname{arctg}[3\omega/(1 - \omega^2)], & \omega < 1, \\ \operatorname{arctg}[(\omega^2 - 1)/(2\omega)] - \operatorname{arctg}[(\omega^2 - 1)/(3\omega)], & \omega > 1. \end{cases} \quad (5.31)$$

Соответствующие графики представлены на рис. 5.8, в, г. При  $\omega=1$  наблюдается минимум значений АЧХ, равный 0,66. Максимальное значение АЧХ, равное единице, достигается при  $\omega=0$  (оба конденсатора эквивалентны разрывам) и при  $\omega \rightarrow \infty$  («перекрывающий» конденсатор эквивалентен короткому замыканию).

Подобные фильтры, уменьшающие амплитуды колебаний в пределах некоторого конечного интервала частот, называют *режекторными фильтрами* (РФ).

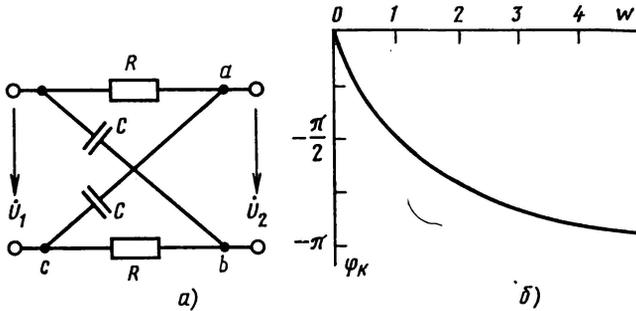


Рис. 5.9. Симметричная мостовая  $RC$ -цепь:  
а — принципиальная схема; б — ФЧХ (здесь  $w=\omega\tau$ )

**Симметричная мостовая цепь.** На рис. 5.9, а изображена схема симметричного  $RC$ -моста. Чтобы найти коэффициент передачи  $K_U = U_2/U_1$ , учтем, что  $U_2 = U_a - U_b$ . Потенциалы узлов  $a$  и  $b$  определены, скажем, относительно точки  $c$ . Очевидно, что

$$\begin{aligned} U_a &= \frac{1/(j\omega C)}{R + 1/(j\omega C)} U_1 = \frac{U_1}{1 + j\omega\tau}, \\ U_b &= \frac{R}{R + 1/(j\omega C)} U_1 = \frac{j\omega\tau}{1 + j\omega\tau} U_1. \end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует, что

$$K_U(j\omega) = \frac{1 - j\omega\tau}{1 + j\omega\tau}. \quad (5.32)$$

АЧХ такого фильтра постоянна на всех частотах:  $|K_U| = 1$ , в то время как ФЧХ

$$\varphi_K(\omega) = -2 \operatorname{arctg} \omega\tau. \quad (5.33)$$

График ФЧХ изображен на рис. 5.9, б. На низких частотах влияние конденсаторов пренебрежимо мало, входной порт соединен с выходным через резисторы и вносимый фазовый сдвиг близок к нулю. На высоких частотах вход соединен с выходом «перекрестно» через емкостные элементы, имеющие малый импеданс. Фазовый сдвиг фильтра при этом близок к  $180^\circ$ .

Симметричную мостовую цепь с двумя одинаковыми переменными резисторами можно использовать как регулируемый фазовращатель, который сохраняет неизменной амплитуду выходного сигнала.

**Двойной Т-образный фильтр.** Схема этой цепи вместе с номиналами элементов представлена на рис. 5.10,а. Вычислим частот-

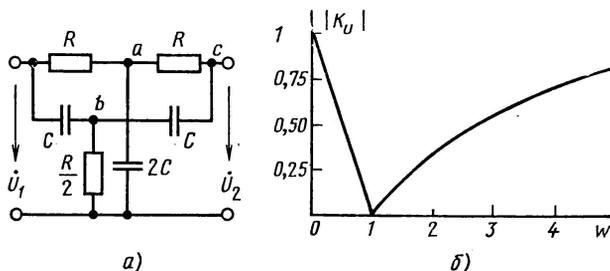


Рис. 5.10. Двойной Т-образный RC-фильтр:

а — схема цепи; б — АЧХ

ный коэффициент передачи напряжения  $K_U(j\omega) = \dot{U}_2/\dot{U}_1$ , воспользовавшись уравнениями по первому закону Кирхгофа для узлов а, б и с:

$$-\frac{\dot{U}_1 - \dot{U}_a}{R} - \frac{\dot{U}_2 - \dot{U}_a}{R} + j2\omega C \dot{U}_a = 0, \quad (5.34)$$

$$-(\dot{U}_1 - \dot{U}_b)j\omega C - (\dot{U}_2 - \dot{U}_b)j\omega C + 2\dot{U}_b/R = 0, \quad (5.35)$$

$$(\dot{U}_b - \dot{U}_2)j\omega C + (\dot{U}_a - \dot{U}_2)/R = 0. \quad (5.36)$$

Потенциалы  $\dot{U}_a$  и  $\dot{U}_b$  находим из уравнений (5.34) и (5.35) соответственно:

$$\dot{U}_a = \frac{\dot{U}_1 + \dot{U}_2}{2(1 + j\omega RC)}, \quad (5.37)$$

$$\dot{U}_b = \frac{j\omega RC(\dot{U}_1 + \dot{U}_2)}{2(1 + j\omega RC)}. \quad (5.38)$$

Вводя безразмерную частотную переменную  $\omega = \omega RC$  и подставляя (5.37) и (5.38) в уравнение (5.36), после несложных преобразований имеем

$$K_U(j\omega) = \frac{1 - \omega^2}{1 - \omega^2 + j4\omega}. \quad (5.39)$$

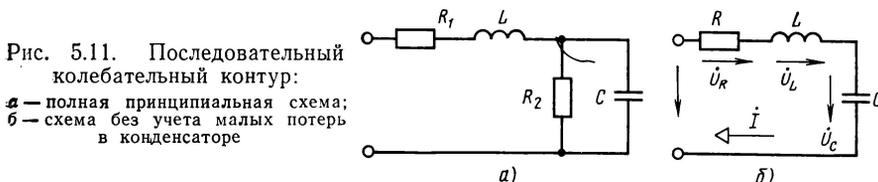
График АЧХ цепи, рассчитываемый по формуле

$$|K_U(j\omega)| = \frac{|1 - \omega^2|}{\sqrt{(1 - \omega^2)^2 + 16\omega^2}}, \quad (5.40)$$

представлен на рис. 5.10,б. Видно, что данная цепь является ре-  
жекторным фильтром; АЧХ обращается в нуль на частоте  $\omega_0 =$   
 $= 1/(RC)$ . Физически это связано с тем, что на данной частоте  
потенциалы узлов  $a$  и  $b$  относительно «земли» равны по модулю и  
противоположны по фазе. Точка  $c$ , которая является средней точ-  
кой  $RC$ -цепочки, соединяющей эти узлы, имеет нулевой потен-  
циал.

#### 5.4. ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Колебательным контуром называют линейную цепь, которая  
одновременно содержит  $L$ - и  $C$ -элементы. Будет показано, что ко-  
лебательный контур может иметь достаточно совершенные частот-  
ные характеристики, позволяющие выполнять с его помощью  
фильтрацию полезного сигнала.



На рис. 5.11,а изображена схема последовательного колеба-  
тельного контура, в котором элементы  $L$  и  $C$  соединены последо-  
вательно. На схеме показаны также активное сопротивление  $R_1$ ,  
учитывающее потери в катушке, и сопротивление  $R_2$ , наличие ко-  
торого обусловлено несовершенством изоляции конденсатора.

Для контуров, применяемых в радиотехнике,  $R_1$  имеет поряд-  
ков единиц или десятков ом, в то время как  $R_2 \approx 10^9$  Ом и выше.  
Поэтому на практике влиянием сопротивления  $R_2$  можно прене-  
бречь и рассматривать схему на рис. 5.11,б, в которой  $R = R_1$ .

Частотным коэффициентом передачи последовательного коле-  
бательного контура может служить комплексная проводимость

$$Y(j\omega) = \frac{i}{U} = \frac{1}{R + jX(\omega)},$$

которую удобно представить в нормированном виде

$$Y_n(j\omega) = \frac{1}{1 + jX(\omega)/R} = \frac{1}{1 + j\xi(\omega)}. \quad (5.41)$$

Безразмерное отношение  $\xi(\omega) = X(\omega)/R$  называют *обобщенной расстройкой* контура. В явном виде

$$\xi(\omega) = [\omega L - 1/(\omega C)]/R. \quad (5.42)$$

При частоте

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC}, \quad (5.43)$$

называемой *резонансной частотой* контура, обобщенная расстройка  $\xi(\omega_0) = 0$ . Проводимость контура оказывается чисто активной и максимальной по модулю. Как следствие, ток в контуре, питаемом от источника ЭДС, на данной частоте и в ее окрестности резко возрастает. Это явление и называют *резонансом*.

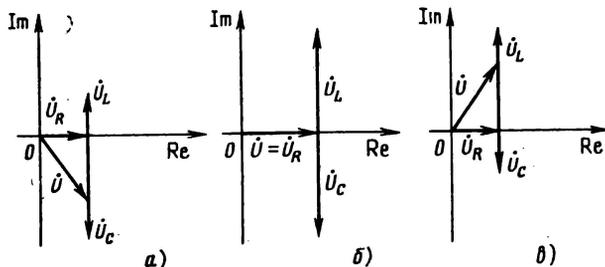


Рис. 5.12. Векторные диаграммы напряжений в последовательном колебательном контуре;

*a* —  $\omega < \omega_0$ ; *б* —  $\omega = \omega_0$ ; *в* —  $\omega > \omega_0$

На рис. 5.12, *a, б, в* представлены векторные диаграммы контура при разных частотах. Если  $\omega < \omega_0$  (случай *a*), то комплексная амплитуда напряжения на конденсаторе  $\dot{U}_C = I/(j\omega C)$  по модулю превосходит комплексную амплитуду  $\dot{U}_L = Ij\omega L$  напряжения на катушке. При этом ток в контуре опережает по фазе приложенное напряжение. Если  $\omega = \omega_0$  (случай *б*), то происходит компенсация напряжений на реактивных элементах; ток и приложенное напряжение синфазны. Между емкостным и индуктивным элементами происходит реактивный обмен энергией. Наконец, при  $\omega > \omega_0$  (случай *в*) результирующее сопротивление контура оказывается индуктивным, и напряжение опережает ток по фазе.

Формулу (5.42) можно преобразовать:

$$\xi(\omega) = \frac{L}{R} \left( \omega - \frac{\omega_0^2}{\omega} \right) = \frac{\omega_0 L}{R} \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right). \quad (5.44)$$

Вводят безразмерный параметр

$$Q = \frac{\omega_0 L}{R} = \frac{1}{\omega_0 CR} = \frac{\sqrt{L/C}}{R}, \quad (5.45)$$

называемый *добротностью* контура, характеризующий качество колебательной системы. Числителем здесь служит реактивное сопротивление элементов  $L$  или  $C$  на резонансной частоте, которое называют *характеристическим сопротивлением* контура

$$\rho = \omega_0 L = \frac{1}{\omega_0 C} = \sqrt{\frac{L}{C}}. \quad (5.46)$$

На частотах до нескольких сотен мегагерц используют контуры, у которых  $\rho=0,1-1$  кОм; добротность таких контуров  $Q=20-200$ .

Если  $Q \gg 1$ , то даже малое отклонение частоты от резонансного значения вызывает резкое увеличение обобщенной расстройки и, как следствие, существенное уменьшение тока. На этом основано применение последовательного колебательного контура в качестве частотно-избирательной цепи.

Пусть  $\omega = \omega_0 + \Delta\omega$ , причем частотная расстройка достаточно мала, т. е.  $\Delta\omega/\omega_0 \ll 1$ . Тогда формулу (5.44) можно записать так:

$$\begin{aligned} \xi(\omega) &= Q \left[ \frac{\omega_0 + \Delta\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_0 + \Delta\omega} \right] = \\ &= Q \left[ 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} - \left( 1 + \frac{\Delta\omega}{\omega_0} \right)^{-1} \right] \approx \frac{2Q\Delta\omega}{\omega_0}, \end{aligned} \quad (5.47)$$

поскольку  $1/(1+x) \approx 1-x$  при  $|x| \ll 1$ .

Итак, вблизи резонанса обобщенная расстройка  $\xi$  прямо пропорциональна абсолютной частотной расстройке  $\Delta\omega$ . При  $Q \gg 1$  формулой (5.47) можно пользоваться для приближенного вычисления нормированной проводимости контура

$$Y_n(\xi) = G_n(\xi) + jB_n(\xi) = |Y_n(\xi)| \exp[j\varphi_n(\xi)],$$

где

$$|Y_n(\xi)| = \frac{1}{\sqrt{1+\xi^2}}, \quad (5.48)$$

$$\varphi_n(\xi) = -\operatorname{arctg} \xi. \quad (5.49)$$

Соответствующие кривые изображены на рис. 5.13, а, б. Видно, что при граничном значении  $\xi_{гр} = \pm 1$  модуль нормированной про-

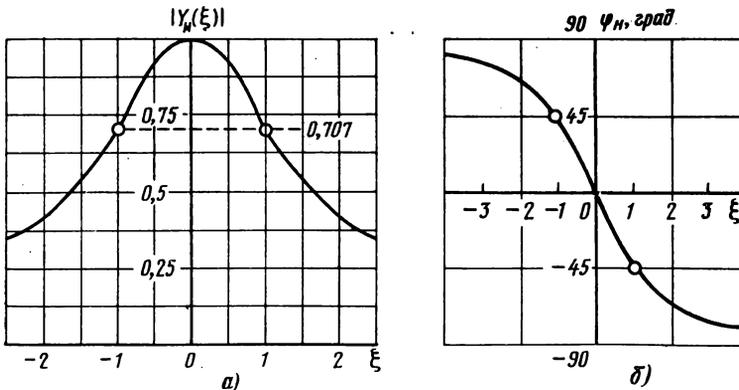


Рис. 5.13. Нормированные частотные характеристики последовательного колебательного контура:

а — АЧХ; б — ФЧХ

димости становится равным  $1/\sqrt{2}=0,707$ . На основании (5.47) получаем значение полосы пропускания контура по уровню 0,707 (или по спаду усиления цепи на 3 дБ):

$$2\Delta\omega_{0,707}=\omega_0/Q. \quad (5.50)$$

Выражая частоты в герцах, имеем

$$\Pi_{0,707}=2\Delta f_{0,707}=f_0/Q. \quad (5.51)$$

**Пример 5.1.** Последовательный колебательный контур имеет параметры:  $L=6$  мкГн,  $C=140$  пФ,  $R=3$  Ом. Вычислить резонансную частоту (Гц), характеристическое сопротивление  $\rho$  и добротность контура  $Q$ . Найти полосу пропускания, а также усиление при расстройке, в три раза превышающей границу полосы пропускания.

На основании приведенных выше формул  $f_0=1/(2\pi\sqrt{LC})=5,49$  МГц;  $\rho=\sqrt{L/C}=207$  Ом;  $Q=\rho/R=69$ . Полоса пропускания  $\Pi_{0,707}=5,49/69=0,08$  МГц  $=80$  кГц. Так как добротность контура велика, то при заданной расстройке значение  $\xi=3$ . Модуль нормированной проводимости  $|Y_n|=1/\sqrt{10}=0,316$ . Отсюда усиление  $\Delta=20 \lg 0,316=-10$  дБ.

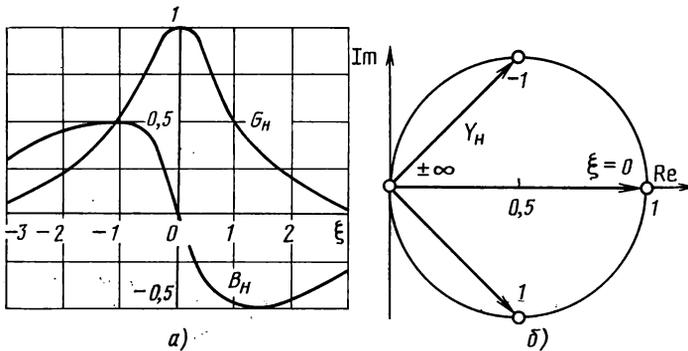


Рис. 5.14. Некоторые способы графического представления частотно-избирательных свойств последовательного колебательного контура:

*a* — зависимости вещественной и мнимой частей нормированной проводимости от обобщенной расстройки; *б* — годограф Найквиста

На рис. 5.14,*a* представлены графики зависимостей вещественной части  $G_n(\xi)$  и мнимой части  $B_n(\xi)$  нормированной проводимости последовательного контура. Следует заметить, что модуль мнимой части достигает максимума при  $\xi=\pm 1$ , т. е. на границах полосы пропускания. На рис. 5.14,*б* изображен годограф Найквиста для данной цепи, построенный по формуле (5.41). Можно убедиться, что годограф представляет собой замкнутую окружность (ср. с рис. 5.4).

На практике последовательный колебательный контур часто используют как четырехполюсник, снимая выходной сигнал с одного из реактивных элементов, например, с конденсатора. Пусть  $U_{m\text{ вх}}$  — амплитуда напряжения на входе. Ток в контуре при резонансе имеет амплитуду  $I_m = U_{m\text{ вх}}/R$ . Тогда амплитуда выходного колебания  $U_{m\text{ вых}} = U_{m\text{ вх}}/(\omega_0 C R) = Q U_{m\text{ вх}}$ . Итак, колебательный контур осуществляет трансформацию амплитуды сигнала. Поскольку цепь пассивна, трансформация не сопровождается усилением мощности.

### 5.5. ПАРАЛЛЕЛЬНЫЙ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЙ КОНТУР

Схема этой весьма распространенной частотно-избирательной цепи изображена на рис. 5.15,а. Как указывалось выше, сопро-

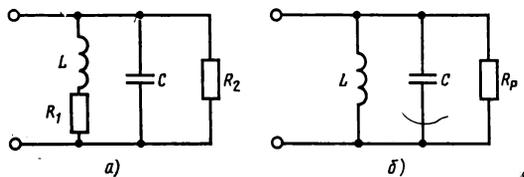


Рис. 5.15. Параллельный колебательный контур:  
а — полная принципиальная схема; б — эквивалентная схема замещения в окрестности резонансной частоты

тивление  $R_1$  на много порядков меньше сопротивления потерь в конденсаторе, которое практически можно не учитывать. Последовательная ветвь  $LR_1$  имеет проводимость

$$Y'(j\omega) = \frac{1}{R_1 + j\omega L} = \frac{R_1}{R_1^2 + \omega^2 L^2} - \frac{j\omega L}{R_1^2 + \omega^2 L^2}. \quad (5.52)$$

В рабочей области частот модуль реактивного сопротивления катушки значительно больше сопротивления потерь:  $\omega L \gg R_1$ . Поэтому приближенно

$$Y'(j\omega) = \frac{R_1}{\omega^2 L^2} - j \frac{1}{\omega L}. \quad (5.53)$$

Суммарная проводимость контура

$$Y(j\omega) = \frac{R_1}{\omega^2 L^2} - j \frac{1}{\omega L} + j\omega C. \quad (5.54)$$

На резонансной частоте  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  реактивная часть проводимости обращается в нуль, и контур становится эквивалентным чисто активному резонансному сопротивлению (рис. 5.15,б)

$$R_p = \frac{\omega_0^2 L^2}{R_1} = \frac{\rho^2}{R_1} = \rho Q. \quad (5.55)$$

Это сопротивление достаточно велико: при  $\rho = 0,5$  кОм и  $Q = 100$  имеем  $R_p = 50$  кОм.

Комплексное сопротивление параллельного колебательного контура

$$Z(j\omega) = \frac{R_p}{1 + jR_p[\omega C - 1/(\omega L)]} = \frac{R_p}{1 + j\omega_0 CR_p(\omega/\omega_0 - \omega_0/\omega)}. \quad (5.56)$$

Учтя, что  $\omega_0 CR_p = R_p/\rho = Q$  и что обычно  $Q \gg 1$ , в последнюю формулу можно ввести обобщенную расстройку  $\xi = 2Q\Delta\omega/\omega_0$  и получить

$$Z(\xi) = \frac{R_p}{1 + j\xi}. \quad (5.57)$$

Графики АЧХ и ФЧХ для нормированного сопротивления параллельного контура  $Z_n(\xi) = Z(\xi)/R_p$  полностью совпадают с теми, которые изображены на рис. 5.13. Частотные зависимости вещественной и мнимой частей входного сопротивления, а также годограф Найквиста для параллельного контура аналогичны изображенным на рис. 5.14.

**Пример 5.2.** Заданы параметры параллельного колебательного контура:  $Q = 70$ ,  $C = 45$  пФ,  $L = 0,8$  мкГн. Найти сопротивление цепи при резонансе и на частоте  $\omega = 1,02\omega_0$ .

Характеристическое сопротивление  $\rho = \sqrt{L/C} = 133$  Ом. Резонансное сопротивление контура  $R_p = \rho Q = 0,133 \cdot 70 = 9,31$  кОм. Обобщенная расстройка на частоте  $\omega$  составит  $\xi = 2Q\Delta\omega/\omega_0 = 2 \cdot 70 \cdot 0,02 = 2,8$ . Комплексное сопротивление контура на заданной частоте

$$\begin{aligned} Z &= \frac{9,31}{1 + j2,8} = \frac{9,31}{\sqrt{1 + (2,8)^2}} \exp(-j \arctg 2,8) = \\ &= 3,13 \exp(-j1,23) = 1,05 - j2,95 \text{ кОм}. \end{aligned}$$

Явление в параллельном контуре на частоте  $\omega_0$  иногда называют *резонансом токов*. Причина этого состоит в следующем. Если  $I_m$  — амплитуда входного тока в неразветвленной части контура, то при  $\omega = \omega_0$  на контуре создается напряжение с амплитудой  $U_m = I_m R_p$ . Под действием этого напряжения в реактивных ветвях возникают токи с одинаковыми амплитудами  $I_{mC} = I_{mL} = U_m/\rho = I_m Q$ . Итак, реактивный обмен энергией между катушкой и конденсатором сопровождается резким увеличением токов в ветвях. Эти токи, однако, замыкаются внутри контура.

**Влияние внешних цепей на характеристики контура.** В радиотехнических устройствах колебательный контур всегда подключен к внешним цепям, таким как источник сигнала и цепь нагрузки. Чтобы учесть их влияние, параллельно контуру мысленно добав-

ляют резистивную ветвь с сопротивлением  $R_n$ . При этом эквивалентное резонансное сопротивление

$$R_{p.эк} = \frac{R_p R_n}{R_p + R_n} \quad (5.58)$$

оказывается меньше, чем  $R_p$ .

Другое важное следствие — расширение полосы пропускания контура под действием резистивной нагрузки. На самом деле, формулу (5.58) можно представить так:

$$R_{p.эк} = \rho Q \frac{R_n}{R_p + R_n} = \rho \frac{Q}{1 + R_p/R_n}. \quad (5.59)$$

Вводят эквивалентную добротность нагруженного контура

$$Q_{эк} = \frac{Q}{1 + R_p/R_n}, \quad (5.60)$$

которая падает с уменьшением  $R_n$ . В результате полоса пропускания контура расширяется.

**Пример 5.3.** Параллельный колебательный контур, рассмотренный в примере 5.2, нагружен на резистор  $R_n=6,3$  кОм. Найти полосу пропускания контура  $\Pi_{0,707}$  без нагрузки и с подключенной нагрузкой.

Резонансная частота  $f_0=1/(2\pi\sqrt{LC})=26,53$  МГц не зависит от сопротивления нагрузки. Полоса пропускания без нагрузки  $\Pi_{0,707}=f_0/Q=379$  кГц. По формуле (5.60) определяем  $Q_{эк}=70/(1+9,31/6,3)=28$ . Отсюда полоса пропускания нагруженного контура  $\Pi_{0,707}=f_0/Q_{эк}=947$  кГц. Видно, что полоса пропускания расширилась в 2,5 раза.

Подключение параллельно контуру излишне низкоомной нагрузки недопустимо из-за потери фильтрующих свойств.

**Сложные параллельные контуры.** Так называют колебательные контуры, отличающиеся тем, что индуктивный и емкостный элементы одновременно входят хотя бы в одну из его ветвей. Примеры таких контуров изображены на рис. 5.16, а, б, в.

Пусть  $Z_1=R_1+jX_1$  и  $Z_2=R_2+jX_2$  — комплексные сопротивления ветвей; величины  $X_{1,2}$  зависят от частоты. Входное сопротивление контура

$$Z = \frac{(R_1 + j X_1)(R_2 + j X_2)}{(R_1 + R_2) + j(X_1 + X_2)}. \quad (5.61)$$

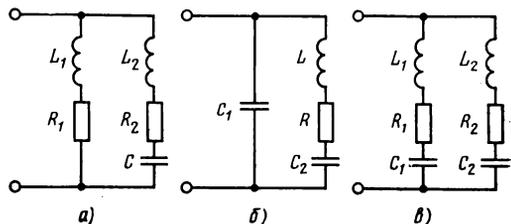


Рис. 5.16. Сложные параллельные колебательные контуры:

а — с двумя индуктивными катушками; б — с двумя конденсаторами; в — общий случай

На рабочих частотах всегда  $|X_1| \gg R_1$ ,  $|X_2| \gg R_2$ , поэтому приближенно

$$Z = \frac{-X_1 X_2}{R + jX}, \quad (5.62)$$

где  $R = R_1 + R_2$ ,  $X = X_1 + X_2$  — вещественная и мнимая части комплексного сопротивления по обходу контура.

Модуль входного сопротивления максимален на частоте параллельного резонанса  $\omega_0$ , такой, что на ней  $X_1 + X_2 = 0$ . Отсюда получаем, что для схемы *a*

$$\omega_0 = 1/\sqrt{(L_1 + L_2)/C}; \quad (5.63)$$

для схемы *б*

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC_1 C_2/(C_1 + C_2)}. \quad (5.64)$$

Как видно из (5.62), частотные характеристики сложного контура в окрестности точки  $\omega_0$  определяются, в основном, зависимостью от частоты реактивного сопротивления  $X$  по обходу контура, так как величины  $X_{1,2}$  меняются с частотой достаточно медленно. Поэтому АЧХ сложного и простого контуров совпадают по форме. Однако резонансное сопротивление сложного контура

$$R_p = -X_1 X_2 / R = |X_{1,2}|^2 / R$$

будет меньше. Действительно, для схемы *a*

$$R_p = \frac{|X_1|^2}{R} = \frac{\omega_0^2 L_1^2}{R} = \frac{L_1^2}{R(L_1 + L_2)C}. \quad (5.65)$$

Если ввести так называемый коэффициент включения контура

$$k_{\text{вкл}} = L_1 / (L_1 + L_2) < 1, \quad (5.66)$$

то (5.65) можно записать в такой форме:

$$R_p = k_{\text{вкл}}^2 \frac{L_1 + L_2}{RC} = k_{\text{вкл}}^2 \rho Q, \quad (5.67)$$

где характеристическое сопротивление  $\rho = \sqrt{(L_1 + L_2)/C}$ .

Для контура с двумя конденсаторами (схема *б*)

$$R_p = \frac{|X_1|^2}{R} = \frac{1}{\omega_0^2 C_1^2 R}. \quad (5.68)$$

Здесь также можно ввести коэффициент включения

$$k_{\text{вкл}} = C_2 / (C_1 + C_2) < 1; \quad (5.69)$$

при этом

$$R_p = k_{\text{вкл}}^2 \rho Q, \quad (5.70)$$

где  $\rho = \sqrt{L(C_1 + C_2)/(C_1 C_2)}$ .

Используя неполное включение, можно изменять уровень резонансного сопротивления, оставляя неизменными резонансную частоту и полосу пропускания. Неполное включение контура позволяет также снижать эффект влияния нагрузочного сопротивления на полосу пропускания.

Следует отметить, что в сложных колебательных контурах имеют место последовательные резонансы на частотах  $\omega_{оп}$ . Входное сопротивление становится при этом малым. Для схемы с двумя индуктивностями  $\omega_{оп} = 1/\sqrt{L_2 C}$ , т. е.  $\omega_{оп} > \omega_0$ . В схеме с двумя конденсаторами частота  $\omega_{оп} = 1/\sqrt{LC_2}$  оказывается ниже частоты параллельного резонанса.

### 5.6. СВЯЗАННЫЕ КОЛЕБАТЕЛЬНЫЕ КОНТУРЫ

Последовательный и параллельный контуры являются одиночными колебательными системами. Присущий им недостаток — сравнительно малое ослабление сигналов, частоты которых лежат вне полосы пропускания. Лучшие частотные характеристики имеют многоконтурные колебательные системы.

На рис. 5.17, а, б, в приведены некоторые схемы двухконтурных связанных цепей. Для связи используются реактивные элементы — трансформатор (случай а) или конденсатор  $C_{св}$  (случай б, в). Контур, содержащий входной источник гармонической ЭДС  $\dot{E}$ , называется *первичным контуром*; выходным сигналом может быть ток во *вторичном контуре* или напряжение на одном из его реактивных элементов.

Рассмотрим двухконтурную систему с индуктивной связью (рис. 5.17, а). Параметры обоих контуров для простоты идентичны; выходной сигнал снимается с конденсатора.

Пусть контурные токи, имеющие комплексные амплитуды  $I_1$  и  $I_2$ , ориентированы по часовой стрелке. Токи удовлетворяют системе уравнений

$$\begin{aligned} Z_K I_1 - Z_{св} I_2 &= \dot{E}, \\ -Z_{св} I_1 + Z_K I_2 &= 0, \end{aligned} \quad (5.71)$$

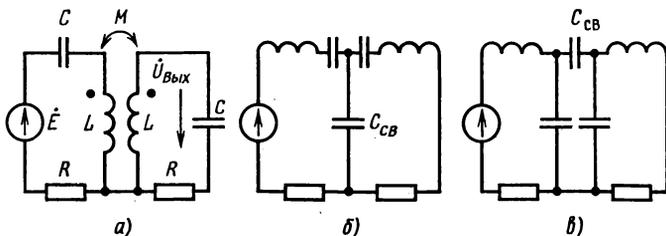


Рис. 5.17. Связанные колебательные контуры:

а — индуктивная связь; б — емкостная Т-образная связь, в — емкостная П-образная связь

где  $Z_{\kappa} = R + j\omega L + 1/(j\omega C)$  — сопротивление по обходу каждого контура без учета влияния связи;  $Z_{\text{св}} = j\omega M$  — реактивное сопротивление связи.

Решая эту систему, получаем амплитуду тока во вторичном контуре

$$I_2 = Z_{\text{св}} \dot{E} / \Delta, \quad (5.72)$$

где  $\Delta = Z_{\kappa}^2 - Z_{\text{св}}^2$  — определитель системы (5.71).

Частотный коэффициент передачи напряжения

$$K(j\omega) = \frac{Z_{\text{св}}}{j\omega C \Delta} = \frac{M}{C \Delta}. \quad (5.73)$$

Удобно ввести обобщенную расстройку  $\xi$  (см. § 5.4) и записать

$$\begin{aligned} \Delta &= [R + j(\omega L - 1/(\omega C))]^2 + \omega^2 M^2 = \\ &= R^2 (1 + j\xi)^2 + \omega^2 M^2. \end{aligned} \quad (5.74)$$

Рассматривая свойства системы в малой окрестности резонансной частоты  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ , можно приближенно положить  $\omega^2 M^2 \approx \omega_0^2 M^2 = M^2/(LC)$ . Тогда

$$K(\xi) = \frac{M/(CR^2)}{(1 + j\xi)^2 + M^2/(LCR^2)}. \quad (5.75)$$

Так как коэффициент индуктивной связи  $k_c = M/L$ , числитель можно преобразовать так:  $M/(CR^2) = k_c L/(CR^2) = k_c \rho^2/R^2 = k_c Q^2$ . В этом случае второе слагаемое знаменателя  $M^2/(LCR^2) = k_c^2 Q^2$ .

Вводят важный параметр связанной колебательной системы — так называемый *фактор связи*

$$A = k_c Q. \quad (5.76)$$

При этом

$$K(\xi) = \frac{AQ}{(1 + j\xi)^2 + A^2}. \quad (5.77)$$

Уравнение АЧХ связанной колебательной системы

$$|K(\xi)| = \frac{AQ}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (5.78)$$

Чтобы определить экстремальные точки АЧХ, следует найти корни производной функции  $F(\xi) = (1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2$  [см. (5.78)]. Нетрудно проверить, что производная обращается в нуль при  $\xi_1 = 0$  и при  $\xi_{2,3} = \pm \sqrt{A^2 - 1}$ . Точка  $\xi_1$  является точкой максимума АЧХ, если  $A \leq 1$ , и точкой минимума, если  $A > 1$ . В точках  $\xi_{2,3}$ , которые имеют смысл лишь при  $A > 1$ , АЧХ достигает максимального значения, равного  $Q/2$ .

Удобно ввести нормированную АЧХ, которая определяется формулой

$$|K_{\text{н}}(\xi)| = \frac{2|K(\xi)|}{Q} = \frac{2A}{\sqrt{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}}. \quad (5.79)$$

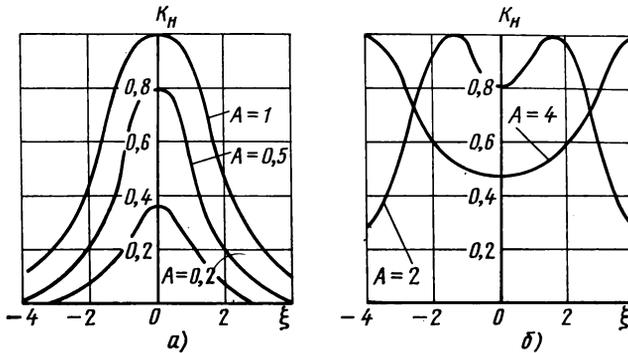


Рис. 5.18. Нормированные АЧХ системы двух связанных колебательных контуров:  
 а — слабая связь; б — сильная связь

Соответствующие графики приведены на рис. 5.18,а,б. Если  $A < 1$ , то система работает в режиме *слабой связи*. Резонансные кривые имеют единственный максимум при  $\xi = 0$ , т. е. на резонансной частоте одиночного контура. Случай  $A = 1$  называют режимом *критической связи*. При  $A > 1$  реализуется режим *сильной связи*. Резонансные кривые становятся «двугорбыми». Это объясняется тем, что компенсация суммарного реактивного сопротивления, складывающегося из собственного и вносимого сопротивлений, происходит на частоте, отличающейся от исходной резонансной частоты. С ростом фактора связи  $A$  максимумы кривых все более отходят от центральной частоты.

Если источник входного сигнала имеет частоту  $\omega_0$ , т. е.  $\xi = 0$ , то амплитуда сигнала на выходе оказывается малой как при  $A \ll 1$  (индуктивная связь между контурами слишком слаба), так и при  $A \gg 1$  (сильная связь существенно расстраивает контуры).

**Пример 5.4.** Система двух индуктивно связанных контуров имеет параметры:  $\omega_0 = 10^8 \text{ с}^{-1}$ ,  $L = 1,5 \text{ мкГн}$ ,  $M = 0,028 \text{ мкГн}$ ,  $Q = 80$ . Найти нормированный коэффициент передачи  $K_H$  и усиление  $\Delta$  при частотной расстройке  $\Delta\omega = 2,5 \times 10^6 \text{ с}^{-1}$ . Сравнить ослабления такого сигнала связанной системой и одиночным контуром с теми же параметрами.

Коэффициент связи  $k_c = 0,028/1,5 = 0,018$ . Фактор связи  $A = 0,018 \cdot 80 = 1,5$ . Обобщенная расстройка  $\xi = 2 \cdot 80 \cdot 2,5 \cdot 10^6 / 10^8 = 4$ . Для связанной системы по формуле (5.79) находим, что  $|K_H| = 0,2$  или  $\Delta = 20 \lg |K_H| = -14 \text{ дБ}$ . Для одиночного контура  $|K_H| = 1/\sqrt{1+\xi^2} = 1/\sqrt{17} = 0,24$  или  $\Delta = -12,3 \text{ дБ}$ .

При данном факторе связи выигрыш в ослаблении расстроенного сигнала невелик. Однако следует иметь в виду, что АЧХ связанной системы имеет более плоскую форму вершины, что благоприятно для неискаженной передачи сигналов, частоты которых располагаются вблизи максимума АЧХ.

Наглядной иллюстрацией частотных свойств связанной колебательной системы является годограф Найквиста. Чтобы построить его, следует пронормировать формулу (5.77) на единицу, выделив затем вещественную и мнимую части:

$$K_H(\xi) = \frac{2A(1 + A^2 - \xi^2) - j4A\xi}{(1 + A^2 - \xi^2)^2 + 4\xi^2}. \quad (5.80)$$

На рис. 5.19 изображены два таких годографа при  $A=0,5$  и  $A=4$ . Важно отметить, что комплексный вектор  $K_H(\xi)$  с изменением  $\xi$  от  $-\infty$  до  $+\infty$  совершает на комплексной плоскости поворот на угол  $360^\circ$ . Именно таким оказывается диапазон изменения ФЧХ данной системы. Эта функция описывается формулой

$$\varphi_K(\xi) = -\arg[(1 + j\xi)^2 + A^2]. \quad (5.81)$$

Соответствующие графики при двух значениях фактора связи изображены на рис. 5.20.

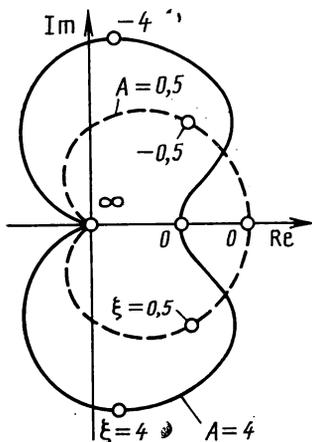


Рис. 5.19. Диаграммы Найквиста системы двух связанных колебательных контуров

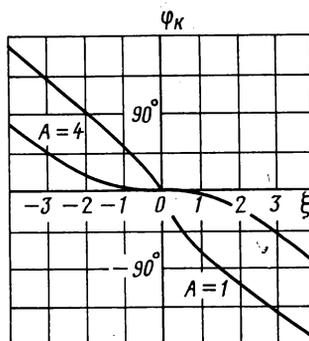


Рис. 5.20. Фазочастотные характеристики системы двух связанных колебательных контуров

### 5.7. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЦЕПЕЙ С ПЕРИОДИЧЕСКОЙ СТРУКТУРОЙ

Многие частотно-избирательные цепи имеют периодическую структуру, например, состоят из последовательности идентичных четырехполюсников, соединенных каскадно. На рис. 5.21,а изображен фрагмент такой бесконечной цепочки;  $n$  — номер элемента.

Будем полагать, что каждое звено представляет собой взаимный симметричный четырехполюсник, Т-образная эквивалентная

Рис. 5.21. Цепь с периодической структурой:  
 а — конфигурация цепи; б —  
 схема одного звена

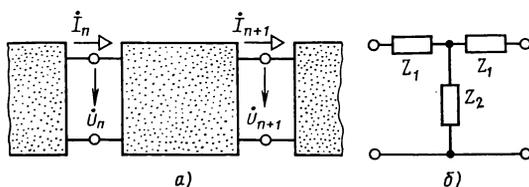


схема которого представлена на рис. 5.21, б. Легко проверить, что А-матрица такого четырехполюсника имеет коэффициенты

$$A_{11} = A_{22} = 1 + Z_1/Z_2. \quad (5.82)$$

Звено с номером  $n+1$  является нагрузкой для звена с номером  $n$ . Так как цепочка бесконечна и периодична, то отношение комплексных амплитуд напряжений и токов на входах и выходах звеньев должно быть одинаково:

$$\frac{\dot{U}_{n+1}}{\dot{U}_n} = \frac{\dot{I}_{n+1}}{\dot{I}_n} = \dots = \exp(-\gamma), \quad (5.83)$$

где  $\gamma$  — в общем случае комплексная, зависящая от частоты величина, называемая *постоянной передачи* одного звена бесконечной цепочки.

Отношение комплексной амплитуды напряжения  $\dot{U}_n$  к комплексной амплитуде тока  $\dot{I}_n$ , одинаковое для всех звеньев, называют *характеристическим сопротивлением*  $Z_c$  периодической структуры. Чтобы найти это сопротивление, следует воспользоваться формулой (4.54), приняв во внимание, что входное сопротивление последующего звена служит нагрузкой для предыдущего звена. Тогда, так как  $A_{11} = A_{22}$ , имеем

$$Z_c = \frac{A_{11} Z_c + A_{12}}{A_{21} Z_c + A_{11}},$$

откуда

$$Z_c = \sqrt{A_{12}/A_{21}} = \sqrt{Z_{\text{вх.кз}} Z_{\text{вх.хх}}}, \quad (5.84)$$

где  $Z_{\text{вх.кз}}$  и  $Z_{\text{вх.хх}}$  — входное сопротивление звена в режимах короткого замыкания и холостого хода по выходу.

Чтобы выразить постоянную передачи через параметры А-матрицы, следует воспользоваться формулами (4.53) и (5.84):

$$K_U = 1/[A_{11} + A_{12}/Z_c] = 1/[A_{11} + \sqrt{A_{12} A_{21}}] = \exp(-\gamma), \quad (5.85)$$

откуда

$$\gamma = \ln [A_{11} + \sqrt{A_{12} A_{21}}] = \ln [A_{11} + \sqrt{A_{11}^2 - 1}] = \operatorname{arch} A_{11}, \quad (5.86)$$

поскольку для взаимного четырехполюсника выполняется равенство (4.17).

Таким образом, чтобы исследовать частотные характеристики периодической цепочки четырехполюсников, достаточно располагать единственным коэффициентом  $A_{11}$ .

В общем случае

$$\gamma = \alpha + j\beta, \quad (5.87)$$

где  $\alpha$  — постоянная ослабления,  $\beta$  — постоянная фазы одного звена.

Изучим свойства периодических структур на конкретных примерах.

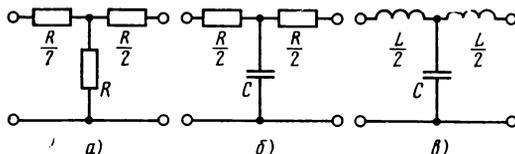


Рис. 5.22. Звенья цепей с периодической структурой: а — резистивная цепь; б — резистивно-емкостная цепь; в — индуктивно-емкостная цепь

**Резистивная лестничная цепь.** На рис. 5.22,а изображена схема одной ячейки лестничной цепи, образованной одинаковыми резисторами с сопротивлением  $R$  каждый. Здесь  $Z_1 = R/2$ ,  $Z_2 = R$ . Значит,  $Z_{вх.кз} = 5R/6$ ;  $Z_{вх.хх} = 3R/2$ , так что по формуле (5.84) характеристическое сопротивление  $Z_c = R\sqrt{5}/2 \approx 1,118R$ .

Элемент  $A_{11} = 3/2$ , естественно, не зависит от частоты. Используя (5.86), находим, что

$$\gamma = \alpha = \ln[(3 + \sqrt{5})/2] = 0,962.$$

Отсюда следует, что амплитуда сигнала на выходе ячейки равна амплитуде сигнала на входе, умноженной на коэффициент  $\exp(-0,962) = 0,382$ . Усиление на одно звено  $\Delta = 20 \lg 0,382 = -8,36$  дБ.

Напряжения на входах каскадно включенных звеньев образуют геометрическую прогрессию. Поэтому их усиления, выраженные в децибелах, складываются. Например, при четырех звеньях  $\Delta = -33,14$  дБ.

**Периодическая RC-цепь.** Схема одного звена представлена на рис. 5.22,б. Ясно, что данная цепь служит фильтром нижних частот. Здесь  $Z_1 = R/2$ ;  $Z_2 = 1/(j\omega C)$ . Тогда  $A_{11} = 1 + j\omega RC/2$ . Если ввести безразмерную переменную  $\omega = \omega RC$ , то  $A_{11} = 1 + j\omega/2$ . На основании (5.86) постоянная передачи звена

$$\gamma = \ln(1 + j\omega/2 + \sqrt{j\omega} \sqrt{1 + j\omega/4}).$$

Примем во внимание, что  $\sqrt{j} = \exp(j\pi/4) = (1 + j)/\sqrt{2}$ . Кроме того, будем интересоваться поведением цепи на достаточно низких частотах, т. е. при  $\omega \ll 1$ . Это позволит применить приближенное равенство  $\sqrt{1 + j\omega/4} \approx 1 + j\omega/8$ , так что

$$\begin{aligned} \gamma &= \ln \left[ 1 + j \frac{\omega}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} (1 + j) \sqrt{\omega} \left( 1 + j \frac{\omega}{8} \right) \right] = \\ &= \ln \left\{ 1 + \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( 1 - \frac{\omega}{8} \right) + j \left[ \frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( 1 + \frac{\omega}{8} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Известно, что  $\ln(1+x) \approx x$  при  $x \ll 1$ . Тогда

$$\alpha = \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( 1 - \frac{\omega}{8} \right), \quad (5.88)$$

$$\beta = \frac{\omega}{2} + \sqrt{\frac{\omega}{2}} \left( 1 + \frac{\omega}{8} \right). \quad (5.89)$$

Например, пусть  $R=3$  кОм,  $C=2$  нФ,  $\omega=10^4$  с<sup>-1</sup>. Тогда  $\omega=0,06$ ; на основании (5.88) и (5.89) получаем  $\alpha=0,17$ ;  $\beta=0,20$ . Это означает, что при заданной частоте амплитуда колебаний на выходе звена составляет  $\exp(-0,17)=0,84$  от амплитуды на входе (усиление  $\Delta=-1,48$  дБ). Фазовый сдвиг выходного сигнала звена по отношению ко входному составляет 0,2 рад. С ростом частоты как  $\alpha$ , так и  $\beta$  увеличиваются.

**LC-фильтр нижних частот.** Одно звено такого фильтра (рис. 5.22, в) содержит две последовательные катушки с индуктивностью  $L/2$  каждая и конденсатор  $C$ . Здесь  $Z_1=j\omega L/2$ ;  $Z_2=1/(j\omega C)$ . Коэффициент  $A$ -матрицы  $A_{11}=1-\omega^2 LC/2$ . Вводя частоту  $\omega_0=\sqrt{2/(LC)}$  и безразмерное отношение  $x=\omega/\omega_0$ , получаем  $A_{11}=1-x^2$ , откуда постоянная передачи одного звена

$$\gamma = \ln [1 - x^2 + jx\sqrt{2-x^2}]. \quad (5.90)$$

Анализ последней формулы говорит о том, что характеристики фильтра зависят от частоты.

**Область низких частот.** Задается неравенством  $0 < x < \sqrt{2}$ , т. е.  $0 < \omega < \omega_c$ , где  $\omega_c=2/\sqrt{LC}$ —частота среза фильтра. Подкоренное выражение в (5.90) положительно; аргумент логарифма представляет собой комплексное число с единичным модулем. Так как, по определению,  $\ln z = \ln|z| + j \arg z$ , то, очевидно, в области низких частот, называемой *областью прозрачности*,  $\alpha=0$ , т. е. фильтр не вносит ослабления.

Постоянная фазы одного звена

$$\begin{aligned} \beta &= \arg [(1-x^2) + jx\sqrt{2-x^2}] = \\ &= \begin{cases} \arctg \frac{x\sqrt{2-x^2}}{1-x^2}, & 0 \leq x < 1, \\ \frac{\pi}{2} + \arctg \frac{x^2-1}{x\sqrt{2-x^2}}, & 1 \leq x < \sqrt{2}. \end{cases} \end{aligned} \quad (5.91)$$

**Область высоких частот.** Если  $x > \sqrt{2}$ , то аргумент логарифма в (5.90), равный  $1-x^2-x\sqrt{x^2-2}$ ,—вещественное от-

рицательное число, т. е. комплексное число, имеющее постоянный аргумент  $\pi$  радиан. Значит, здесь  $\beta = \pi$ , в то время как

$$\alpha = \ln(x^2 + x\sqrt{x^2 - 2} - 1). \quad (5.92)$$

Область высоких частот является областью режекции; здесь ослабление увеличивается с ростом частоты.

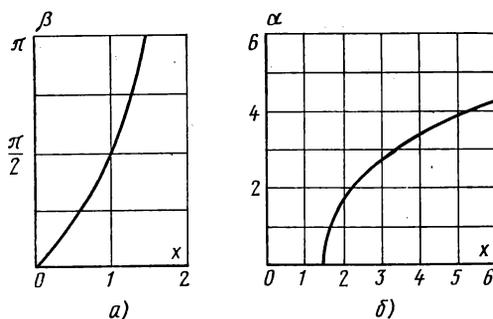


Рис. 5.23. Частотные зависимости постоянной фазы (а) и постоянной ослабления (б) для LC-фильтра нижних частот

На рис. 5.23 представлены графики частотных зависимостей параметров  $\alpha$  и  $\beta$  для рассматриваемого фильтра.

**Пример 5.5.** Трехзвенный ФНЧ имеет параметры:  $L=5$  мГн,  $C=35$  нФ. Найти фазовый сдвиг  $\varphi$ , вносимый фильтром на частоте  $\omega_1=8 \cdot 10^4$  с $^{-1}$ , и усиление, обеспечиваемое на частоте  $\omega_2=3 \cdot 10^5$  с $^{-1}$ .

Здесь  $\omega_0=1,07 \cdot 10^5$  с $^{-1}$ ;  $\omega_c=1,51 \cdot 10^5$  с $^{-1}$ . Частота  $\omega_1$  находится в области прозрачности; параметр  $x=0,748$ . По формуле (5.91)  $\beta=1,11$  рад, откуда  $\varphi = -3\beta = -3,33$  рад.

Частота  $\omega_2$  принадлежит области режекции; параметр  $x=2,8$ . По формуле (5.92) постоянная ослабления  $\alpha=2,6$ . Значит,  $\Delta = -3 \cdot 2,6 \cdot 8,69 = -68$  дБ.

Следует иметь в виду, что на практике бесконечные цепочки нереализуемы. Однако процессы в системе из конечного числа звеньев будут такими же, как и в бесконечной цепочке, если ее нагрузить на импеданс, равный характеристическому сопротивлению. В данном случае

$$Z_c = \sqrt{\frac{L}{C} - \frac{\omega^2 L^2}{4}}. \quad (5.93)$$

Если  $\omega < \omega_c$ , то данное сопротивление активно. Физически это связано с непрерывным потреблением энергии от источника для возбуждения все новых и новых звеньев бесконечной структуры. При  $\omega > \omega_c$  характеристическое сопротивление является реактивным.

Создать двухполюсник с входным сопротивлением вида (5.93), располагая лишь элементами вида  $L$ ,  $C$  и  $\mu R$ , можно лишь приближенно.

### ВОПРОСЫ

1. Приведите определения частотного коэффициента передачи, амплитудно-частотной и фазочастотной характеристик цепи.
2. Какими свойствами обладают фильтры нижних частот? Каково усиление фильтра на частоте среза?
3. Поясните, почему АЧХ двойного Т-образного фильтра обращается в нуль на некоторой частоте.
4. Что такое обобщенная расстройка колебательного контура? Каков типичный порядок добротности контура на радиочастотах?
5. В чем проявляется влияние внешних цепей на характеристики параллельного колебательного контура?
6. Что такое коэффициент включения сложного контура?
7. Дайте определение слабой, критической и сильной связи между контурами. Как влияет фактор связи на АЧХ колебательной системы?
8. Каков физический смысл постоянной передачи одного звена в бесконечной цепочке четырехполюсников?

## 6. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ

### 6.1. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ И ИХ ХАРАКТЕРИСТИКИ

В радиотехнических устройствах исключительно важную роль играют разнообразные нелинейные элементы цепей. Примерами таких элементов служат полупроводниковые диоды, биполярные и полевые транзисторы, входящие в состав интегральных микросхем и т. д.

По определению, нелинейным двухполюсником называют элемент цепи, вольт-амперная характеристика (ВАХ) которого имеет вид  $I = F(U)$ , где  $F$  — функция, тем или иным образом отличающаяся от закона прямой пропорциональности. Здесь и в дальнейшем символами  $I$  и  $U$  обозначены произвольные мгновенные значения токов и напряжений.

Если вид функции  $F(U)$  одинаков как при постоянных во времени напряжениях, так и в динамическом режиме, то говорят, что соответствующий элемент представляет собой нелинейный *резистивный (безынерционный)* двухполюсник. Современные полупроводниковые приборы характеризуются весьма малыми длительностями внутренних переходных процессов, достигающими до  $10^{-9}$  с и менее. Поэтому простые резистивные модели достаточно точно описывают работу таких приборов на частотах до нескольких десятков мегагерц.

Важнейшая отличительная особенность нелинейного элемента — нарушение принципа суперпозиции [см. формулу (1.10)]

$$F(aU_1 + bU_2) \neq aF(U_1) + bF(U_2). \quad (6.1)$$

Именно это свойство позволяет, приложив к такому двухполюснику сумму двух напряжений, получить ток, содержащий в себе ряд компонентов, обусловленных нелинейным взаимодействием этих сигналов. На таком принципе основана работа многих устройств для преобразования радиотехнических сигналов.

**Типичные вольт-амперные характеристики.** Как правило, ВАХ нелинейных двухполюсников находят экспериментально и отображают графиками.

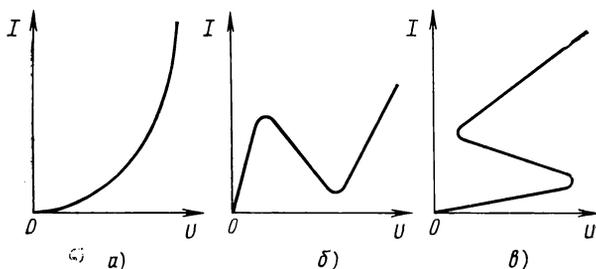


Рис. 6.1. Вольт-амперные характеристики нелинейных двухполюсников:

*a* — полупроводниковый диод; *б* — туннельный диод; *в* — динистор

На рис. 6.1, *a, б, в* изображены примеры ВАХ некоторых распространенных нелинейных двухполюсников.

Полупроводниковый диод (случай *a*) имеет монотонную ВАХ, существенно отличную от нуля лишь в области  $U > 0$ , т. е. при смещении *p-n*-перехода в прямом направлении; если же  $U < 0$ , то диод заперт и практически не проводит тока. Начальный участок ВАХ такого диода (вплоть до прямого напряжения около одного вольта) хорошо описывается теоретической зависимостью

$$I = \begin{cases} 0, & U < 0, \\ I_s [\exp(U/U_T) - 1], & U \geq 0, \end{cases} \quad (6.2)$$

где  $I_s$  — так называемый обратный ток насыщения, составляющий доли наноампера для маломощных диодов;  $U_T$  — тепловой потенциал перехода, равный 26 мВ при комнатной температуре 300 К.

Туннельный диод (случай *б*) имеет немонотонную ВАХ с некоторым падающим участком. Иногда ВАХ такой формы называют характеристиками N-типа. Туннельные диоды нашли применение в высокочастотных усилителях и генераторах.

Наконец, четырехслойный полупроводниковый прибор, называемый динистором, имеет немонотонную ВАХ, у которой некоторым

значениям напряжения отвечают три значения тока (случай *в*). Говорят, что такие ВАХ являются характеристиками S-типа. Динистор широко применяют в автоматических переключательных устройствах.

### 6.2. АНАЛИЗ СТАТИЧЕСКОГО РЕЖИМА В ЦЕПИ С НЕЛИНЕЙНЫМ ДВУХПОЛЮСНИКОМ

Рассмотрим одноконтурную цепь, содержащую источник постоянной ЭДС с напряжением  $E$ , безынерционный нелинейный двухполюсник  $N$  с ВАХ вида  $I = F(U)$  и линейный резистор с сопротивлением  $R$  (рис. 6.2,а). Требуется найти ток в цепи  $I_0$ , а также напряжения  $U_0$  на элементе  $N$  и  $U_R$  на элементе  $R$ .

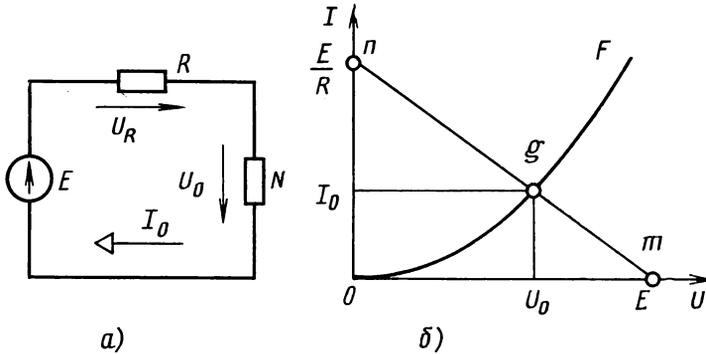


Рис. 6.2. Статический режим в цепи с нелинейным двухполюсником:

а — схема цепи; б — построение нагрузочной прямой

Воспользуемся тем, что напряжения по обходу контура суммируются:  $U_R + U_0 = E$ . Тогда, поскольку ток в обоих пассивных элементах одинаков, имеем два уравнения состояния цепи

$$\begin{aligned} I_0 &= F(U_0), \\ I_0 &= (E - U_0)/R. \end{aligned} \quad (6.3)$$

Решив эти два уравнения совместно, получаем искомые параметры статического режима  $I_0$ ,  $U_0$ .

Так как обычно функция  $F(U)$  задана графически, поступают следующим образом (рис. 6.2,б). На плоскости с координатами  $U—I$  строят кривую  $I = F(U)$ , а также *нагрузочную прямую*, описываемую уравнением

$$I = (E - U)/R. \quad (6.4)$$

Если ВАХ нелинейного элемента монотонна, то имеется единственная точка пересечения  $g$  этих двух линий. Ее координаты  $I_0$ ,  $U_0$  дают искомое решение.

Практически нагрузочную прямую строят так: на оси  $U$  обозначают точку  $m$  с координатой  $E$ , а на оси  $I$  — точку  $n$  с координатой  $E/R$ , численное значение которой равно току в цепи при коротком замыкании нелинейного элемента. Затем данные точки соединяют прямой линией.

Напряжение на резисторе можно определить из очевидного равенства  $U_R = E - U_0$ .

Если ВАХ нелинейного двухполюсника задана формулой, то уравнения вида (6.3) можно решить аналитическими или численными способами.

**Пример 6.1.** В цепи, схема которой изображена на рис. 6.2,а, применен нелинейный двухполюсник с ВАХ вида

$$I = \begin{cases} 0, & U < 0, \\ 320U^2 \text{ мкА}, & U \geq 0. \end{cases}$$

Известно, что  $E = 2,7$  В,  $R = 5,1$  кОм. Определить значение напряжения  $U_0$  на нелинейном элементе.

На основании формул (6.3) в данной цепи должно выполняться равенство

$$3,2 \cdot 10^{-4} U_0^2 = (2,7 - U_0)/(5,1 \cdot 10^3)$$

или

$$1,632U_0^2 + U_0 - 2,7 = 0.$$

Положительный корень этого уравнения  $U_0 = 1,01585$  В  $\approx 1$  В. Отрицательный корень не имеет физического смысла, так как при  $U < 0$  ток в цепи должен быть равен нулю.

Следует заметить, что в случае немонотонной ВАХ возможна ситуация, когда нагрузочная прямая пересекает ВАХ не в одной, а в трех точках. Детальный анализ показывает, что одна из этих точек обязательно соответствует физически нереализуемому неустойчивому режиму цепи. Две другие точки устойчивы; плавно изменяя сопротивление  $R$ , можно скачком переводить цепь из одного устойчивого состояния в другое. Такая цепь может служить элементарной ячейкой памяти (триггером) для хранения одной двоичной единицы информации.

### 6.3. ЛИНЕЙНЫЕ СХЕМЫ ЗАМЕЩЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ РЕЗИСТИВНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

В радиотехнических устройствах нелинейные элементы часто работают следующим образом: напряжения, приложенные к зажимам элементов, состоят из неизменных уровней, определяющих режим по постоянному току, и переменных во времени полезных сигналов. Например, к диоду может быть приложено напряжение

$$U(t) = U_0 + u(t), \quad (6.5)$$

где  $U_0$  — постоянное напряжение смещения, которое задает положение рабочей точки на ВАХ диода;  $u(t)$  — напряжение сигнала. Ток в диоде составит при этом

$$I(t) = I_0 + i(t), \quad (6.6)$$

где  $I_0$  — так называемый ток покоя при отсутствии сигнала;  $i(t)$  — составляющая тока, обусловленная сигналом.

При определенных условиях между величинами  $u(t)$  и  $i(t)$  можно установить связь, которая приближенно оказывается линейной. Это обстоятельство существенно упрощает анализ нелинейных цепей.

**Линейная схема замещения нелинейного двухполюсника.** Пусть  $I = F(U)$  — вольт-амперная характеристика нелинейного резистивного двухполюсника (рис. 6.3, а), к которому приложено напря-

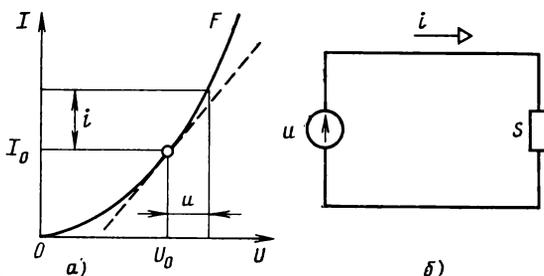


Рис. 6.3. Одновременное воздействие напряжений смещения и полезного сигнала на нелинейный двухполюсник:

а — линейризация ВАХ двухполюсника; б — эквивалентная схема замещения

жение вида (6.5). Представив характеристику рядом Тейлора в окрестности точки  $U_0$ , получим

$$I(t) = F(U_0) + F'(U_0)u(t) + \frac{1}{2}F''(U_0)u^2(t) + \dots \quad (6.7)$$

Будем считать напряжение сигнала  $u(t)$  достаточно малым в том смысле, что всевозможными членами правой части формулы (6.7), содержащими степени сигнала  $u(t)$ , можно пренебречь за исключением линейного члена. Тогда, очевидно,

$$i(t) = F'(U_0)u(t) = S(U_0)u(t), \quad (6.8)$$

где  $S(U_0)$  — величина с размерностью проводимости, называемая *крутизной* ВАХ в выбранной рабочей точке.

Описанная процедура линейризации ВАХ нелинейного двухполюсника соответствует приближенной замене реальной характеристики касательной, которая изображена на чертеже пунктиром.

**Пример 6.2.** Найти зависимость крутизны  $S$  от напряжения  $U_0$  для полупроводникового диода с ВАХ вида (6.2).

Вычисляя производную, получаем

$$S(U_0) = \frac{I_s}{U_T} \exp\left(\frac{U_0}{U_T}\right).$$

Положив, например,  $I_s = 0,5$  нА,  $U_0 = 0,3$  В,  $U_T = 26$  мВ, находим

$$S = \frac{5 \cdot 10^{-10}}{2,6 \cdot 10^{-2}} \exp\left(\frac{0,3}{2,6 \cdot 10^{-2}}\right) = 1,97 \cdot 10^{-3} \text{ См} = 1,97 \text{ мА/В}.$$

Таким образом, линейная схема замещения нелинейного резистивного двухполюсника (рис. 6.3,б), описывающая приращения тока сигнала (режим по переменному току), состоит из источника ЭДС сигнала  $u(t)$  и эквивалентного линейного резистора с проводимостью  $S$ , значение которой зависит от выбранного смещения.

Часто пользуются также обратной величиной

$$R_{\text{диф}} = 1/S, \quad (6.9)$$

которую называют *дифференциальным сопротивлением* элемента в выбранной рабочей точке.

**Линейная схема замещения нелинейного четырехполюсника.** Управляемый нелинейный элемент — транзистор можно представить как четырехполюсник, у которого порт 1 является входом, а порт 2 — выходом (рис. 6.4). На зажимах портов существуют на-

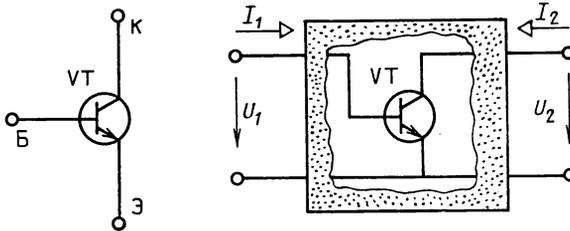


Рис. 6.4. Транзистор как четырехполюсник

пряжения и токи, связанные между собой двумя нелинейными уравнениями состояния

$$I_1 = F_1(U_1, U_2); \quad I_2 = F_2(U_1, U_2). \quad (6.10)$$

Будем, как и ранее, считать, что входящие сюда величины представляют собой суммы некоторых постоянных уровней, задаваемых источниками смещения, и малых отклонений, обусловленных сигналами на входе и выходе:

$$\begin{aligned} I_1 &= I_{10} + i_1, \quad U_1 = U_{10} + u_1, \\ I_2 &= I_{20} + i_2, \quad U_2 = U_{20} + u_2. \end{aligned} \quad (6.11)$$

Применив правило разложения в ряд Тейлора функции нескольких переменных, запишем уравнения (6.10) следующим образом

$$\begin{aligned} I_1 &= F_1(U_{10}, U_{20}) + \frac{\partial F_1}{\partial U_1} u_1 + \frac{\partial F_1}{\partial U_2} u_2, \\ I_2 &= F_2(U_{10}, U_{20}) + \frac{\partial F_2}{\partial U_1} u_1 + \frac{\partial F_2}{\partial U_2} u_2. \end{aligned} \quad (6.12)$$

Здесь отброшены все слагаемые, пропорциональные степеням сигналов  $u_1$  и  $u_2$  с порядками выше первого; частные производные вычисляются в рабочей точке с координатами  $U_{10}, U_{20}$ .

Из равенств (6.12) непосредственно вытекают уравнения линейной схемы замещения нелинейного четырехполюсника по переменной (сигнальной) составляющей

$$\begin{aligned} i_1 &= Y_{11}u_1 + Y_{12}u_2, \\ i_2 &= Y_{21}u_1 + Y_{22}u_2. \end{aligned} \quad (6.13)$$

Входящие сюда четыре коэффициента имеют размерность проводимости и определяются как отношения приращений токов к малым приращениям напряжений относительно уровней в рабочей точке:

$$Y_{11} = \frac{\partial F_1}{\partial U_1} \approx \frac{\Delta I_1}{\Delta U_1} \Big|_{U_2=U_{20}} \quad (6.14)$$

— входная проводимость для малого сигнала в режиме короткого замыкания по переменной составляющей на выходе, т. е. при  $u_2=0$ ;

$$Y_{12} = \frac{\partial F_1}{\partial U_2} \approx \frac{\Delta I_1}{\Delta U_2} \Big|_{U_1=U_{10}} \quad (6.15)$$

— взаимная проводимость обратной передачи при коротком замыкании источника сигнала на входе;

$$Y_{21} = \frac{\partial F_2}{\partial U_1} \approx \frac{\Delta I_2}{\Delta U_1} \Big|_{U_2=U_{20}} \quad (6.16)$$

— взаимная проводимость прямой передачи при коротком замыкании источника сигнала на выходе;

$$Y_{22} = \frac{\partial F_2}{\partial U_2} \approx \frac{\Delta I_2}{\Delta U_2} \Big|_{U_1=U_{10}} \quad (6.17)$$

— выходная проводимость в режиме короткого замыкания на входе.

На практике все эти коэффициенты находят графически из характеристик электронных полупроводниковых приборов, приводимых в справочниках.

Система (6.13) описывает нелинейный четырехполюсник в системе  $Y$ -параметров. При необходимости всегда можно перейти к любой другой системе (гл. 4).

#### 6.4. МОДЕЛИ ЭЛЕКТРОННЫХ УСТРОЙСТВ В РЕЖИМЕ МАЛОГО СИГНАЛА

В заключение на двух конкретных примерах рассмотрим использование принципа линеаризации характеристик управляемых нелинейных четырехполюсников для построения моделей широко распространенных электронных радиотехнических устройств.

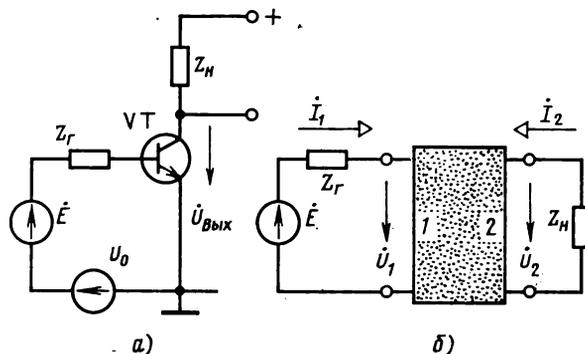


Рис. 6.5. Электронный усилитель малых сигналов:  
а — принципиальная схема устройства; б — схема замещения

**Электронный усилитель малых сигналов.** На рис. 6.5,а изображена схема одной ступени транзисторного усилителя. В коллекторную цепь транзистора включен двухполюсник нагрузки с импедансом  $Z_n$ . Источник напряжения  $U_0$  обеспечивает нужное положение рабочей точки транзистора. Генератор входного сигнала имеет ЭДС с комплексной амплитудой  $\dot{E}$  и внутреннее сопротивление  $Z_r$ . Выходное напряжение снимается с коллектора транзистора. Полярность этого напряжения, принимаемая за положительную, показана на рисунке; следует иметь в виду, что усилитель по постоянному току питается от источника напряжения с нулевым внутренним сопротивлением и поэтому потенциалы верхней и нижней шин усилителя по переменной составляющей одинаковы и равны нулю.

На рис. 6.5,б представлена малосигнальная схема замещения данного усилителя, в которой положено, что  $\dot{U}_{\text{вых}} = \dot{U}_2$ . Поставим задачу определить частотный коэффициент передачи напряжения

$$K_U = \dot{U}_{\text{вых}} / \dot{E} = \dot{U}_2 / \dot{E}. \quad (6.18)$$

Для этого заметим, прежде всего, что

$$\dot{I}_1 = (\dot{E} - \dot{U}_1) / Z_r; \quad \dot{U}_2 = -\dot{I}_2 Z_n; \quad (6.19)$$

знак в последней формуле связан с тем, что положительные направления величин  $\dot{I}_2$  и  $\dot{U}_2$  считаются противоположными.

Используя систему уравнений четырехполюсника в гармоническом режиме

$$\begin{aligned} I_1 &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2, \\ I_2 &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2 \end{aligned} \quad (6.20)$$

и подставляя в нее равенства (6.19), получаем

$$\begin{aligned} (\dot{E} - \dot{U}_1)/Z_r &= Y_{11}\dot{U}_1 + Y_{12}\dot{U}_2, \\ -\dot{U}_2/Z_H &= Y_{21}\dot{U}_1 + Y_{22}\dot{U}_2. \end{aligned} \quad (6.21)$$

Если теперь исключить отсюда величину  $\dot{U}_1$ , то система (6.21) сведется к одному уравнению

$$\dot{E} = \left[ -\frac{(1 + Y_{11}Z_r)(Y_{22} + 1/Z_H)}{Y_{21}} + Y_{12}Z_r \right] \dot{U}_2,$$

из которого в соответствии с определением (6.18) имеем

$$K_U = \frac{Y_{21}Z_H}{Y_{12}Y_{21}Z_rZ_H - (1 + Y_{11}Z_r)(1 + Y_{22}Z_H)}. \quad (6.22)$$

Эта формула содержит полное решение задачи о частотных свойствах коэффициента передачи напряжения для транзисторного усилителя малых сигналов.

Особенно простым оказывается случай применения полевого транзистора, который не потребляет тока на входе ( $Y_{11}=0$ ) и в котором нет обратного воздействия с выхода на вход ( $Y_{12}=0$ ). При этом

$$K_U = \frac{-Y_{21}Z_H}{1 + Y_{22}Z_H}. \quad (6.23)$$

Многие полевые транзисторы имеют столь малую выходную проводимость, что приближенно можно считать  $Y_{22}=0$ . В этом случае

$$K_U = -Y_{21}Z_H = -SZ_H, \quad (6.24)$$

где  $S=Y_{21}$  — так называемая крутизна проходной характеристики полевого транзистора, составляющая обычно несколько миллиампер на вольт.

Модуль коэффициента передачи усилителя может быть значительным. Так, если  $S=5$  мА/В,  $|Z_H|=20$  кОм, то  $|K_U|=100$ .

Отметим, что в соответствии с формулами (6.22)—(6.24) частотная характеристика усилителя определяется частотными свойствами импеданса нагрузки.

**Электронный повторитель.** Нагрузочный двухполюсник можно соединить с транзистором и по-другому, получая в результате устройство с совсем иными свойствами. На рис. 6.6,а изображена схема эмиттерного повторителя, у которого нагрузка включена в эмиттер транзистора и является общим элементом для цепей на входе и на выходе. Эквивалентная схема по переменной составляющей представлена на рис. 6.6,б. Для ее анализа запишем очевидные равенства

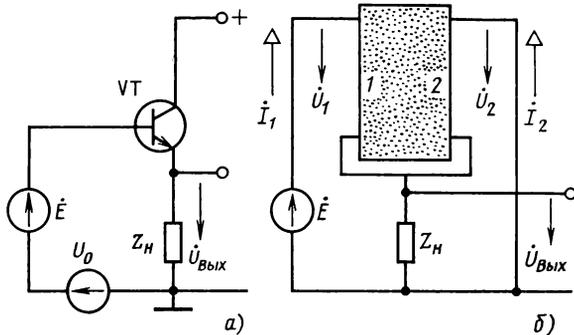


Рис. 6.6. Эмиттерный повторитель:  
 а — принципиальная схема устройства; б — схема замещения

$$\begin{aligned}\dot{U}_2 &= -\dot{U}_{\text{ВЫХ}}, \\ \dot{E} &= \dot{U}_1 + \dot{U}_{\text{ВЫХ}}, \\ \dot{U}_{\text{ВЫХ}} &= (\dot{I}_1 + \dot{I}_2) Z_{\text{Н}}.\end{aligned}$$

Используя эти формулы совместно с системой (6.20), получаем

$$\begin{aligned}\dot{U}_{\text{ВЫХ}} &= [(Y_{11} + Y_{21}) \dot{U}_1 + (Y_{12} + Y_{22}) \dot{U}_2] Z_{\text{Н}} = \\ &= [(Y_{11} + Y_{21})(\dot{E} - \dot{U}_{\text{ВЫХ}}) - (Y_{12} + Y_{22}) \dot{U}_{\text{ВЫХ}}] Z_{\text{Н}}.\end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует, что частотный коэффициент передачи эмиттерного повторителя

$$K_U = \frac{\dot{U}_{\text{ВЫХ}}}{\dot{E}} = \frac{(Y_{11} + Y_{21}) Z_{\text{Н}}}{1 + (Y_{11} + Y_{12} + Y_{21} + Y_{22}) Z_{\text{Н}}}. \quad (6.25)$$

Эта формула упрощается, если  $Y$ -матрица электронного прибора имеет единственный ненулевой элемент  $Y_{21} = S$ . Тогда

$$K_U = \frac{S Z_{\text{Н}}}{1 + S Z_{\text{Н}}}. \quad (6.26)$$

Видно, прежде всего, что  $|K_U| < 1$ , т. е. такой повторитель не увеличивает, а уменьшает напряжение сигнала. Кроме того, если  $|S Z_{\text{Н}}| \gg 1$ , то  $K_U \approx 1$  независимо от импеданса нагрузки.

Следует иметь в виду, что эмиттерный повторитель способен существенно увеличивать мощность сигнала, потребляемую нагрузкой, т. е. работать в режиме усилителя мощности. Данное устройство имеет также высокое входное и низкое выходное сопротивления. Поэтому эмиттерные повторители на биполярных транзисторах и их аналоги — истоковые повторители на полевых транзисторах часто применяют как элементы развязки в сложных радиотехнических устройствах.

### 6.5. ПРЕОБРАЗОВАНИЕ КОЛЕБАНИЙ В НЕЛИНЕЙНЫХ ЭЛЕМЕНТАХ

Метод линеаризации, развитый в § 6.3, при определенных условиях сводит нелинейный элемент цепи к некоторому эквивалентному линейному элементу. В ряде случаев, например, при расчете электронных усилителей малых сигналов, такой подход вполне отвечает поставленной задаче. Однако при этом из поля зрения неизбежно исчезают специфические явления, обусловленные нелинейностью ВАХ и лежащие в основе работы многих радиотехнических устройств — детекторов, модуляторов, преобразователей частоты и т. д.

Рассмотрим кратко некоторые подходы к анализу преобразования сигналов в нелинейном безынерционном (резистивном) двухполюснике. Пусть  $I(U) = F(U)$  — вольт-амперная характеристика такого двухполюсника, к которому приложено напряжение  $U(t) = U_0 + u(t)$ , состоящее из постоянного напряжения смещения  $U_0$  и переменного напряжения полезного сигнала  $u(t)$ . Будем считать, что в окрестности рабочей точки  $U_0$  функция  $F(U)$  является достаточно гладкой и поэтому ее можно разложить в ряд Тейлора [см. формулу (6.7)]. При этом закон изменения тока во времени будет таков:

$$I(t) = a_0 + a_1 u(t) + a_2 u^2(t) + a_3 u^3(t) + a_4 u^4(t) + a_5 u^5(t) + \dots \quad (6.27)$$

Коэффициенты бесконечного степенного ряда, стоящего в правой части этого равенства, вычисляют по общей формуле

$$a_n = \frac{1}{n!} \left. \frac{d^n F}{d U^n} \right|_{U=U_0}. \quad (6.28)$$

Легко понять физический смысл первых трех коэффициентов этого ряда:  $a_0 = F(U_0)$  — ток покоя в отсутствие сигнала, А;  $a_1 = F'(U_0)$  — крутизна ВАХ в рабочей точке, А/В;  $a_2 = F''(U_0)/2$  — кривизна ВАХ, т. е. величина, характеризующая отличие ВАХ от прямой линии.

**Преобразование гармонического сигнала.** Рассмотрим простейший случай, когда  $u(t) = U_m \cos \omega t$  — гармонический сигнал с известными амплитудой  $U_m$  и частотой  $\omega$ . При этом на основании выражения (6.27) ток в двухполюснике

$$I(t) = a_0 + a_1 U_m \cos \omega t + a_2 U_m^2 \cos^2 \omega t + a_3 U_m^3 \cos^3 \omega t + a_4 U_m^4 \cos^4 \omega t + a_5 U_m^5 \cos^5 \omega t + \dots \quad (6.29)$$

Воспользуемся известными тригонометрическими формулами

$$\begin{aligned} \cos^2 x &= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \cos 2x, \\ \cos^3 x &= \frac{3}{4} \cos x + \frac{1}{4} \cos 3x, \end{aligned}$$

$$\cos^4 x = \frac{3}{8} + \frac{1}{2} \cos 2x + \frac{1}{8} \cos 4x, \quad (6.30)$$

$$\cos^5 x = \frac{5}{8} \cos x + \frac{5}{16} \cos 3x + \frac{1}{16} \cos 5x,$$

.....

и запишем равенство (6.27) следующим образом:

$$I(t) = I_0 + I_1 \cos \omega t + I_2 \cos 2\omega t + \\ + I_3 \cos 3\omega t + I_4 \cos 4\omega t + I_5 \cos 5\omega t + \dots \quad (6.31)$$

Важно отметить следующее:

1) Ток в двухполюснике представляет собой сумму *постоянной составляющей*  $I_0$  и, вообще говоря, бесконечного числа гармонических составляющих с амплитудой  $I_n$ ,  $n=1, 2, 3, \dots$ ; частоты этих составляющих  $\omega_n = n\omega$  находятся в целократном отношении с частотой приложенного напряжения. Составляющую, которой отвечает значение  $n=1$ , называют *основной* или *первой гармоникой* тока. Составляющие с  $n=2, 3, \dots$  называют *высшими гармониками* тока.

2) Амплитуды гармоник тока зависят от коэффициентов  $a_0, a_1, a_2, \dots$ , описывающих ВАХ двухполюсника, а также от амплитуды  $U_m$  возбуждающего напряжения. Действительно, раскрыв степени косинусоидальных функций, входящих в правую часть выражения (6.29), по формулам (6.30), получаем

$$I_0 = a_0 + \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{3}{8} a_4 U_m^4 + \dots, \quad (6.32)$$

$$I_1 = a_1 U_m + \frac{3}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{8} a_5 U_m^5 + \dots, \quad (6.33)$$

$$I_2 = \frac{1}{2} a_2 U_m^2 + \frac{1}{2} a_4 U_m^4 + \dots, \quad (6.34)$$

$$I_3 = \frac{1}{4} a_3 U_m^3 + \frac{5}{16} a_5 U_m^5 + \dots, \quad (6.35)$$

.....

Итак, подача на нелинейный безынерционный двухполюсник гармонического напряжения приводит, в общем случае, к появлению негармонического тока. Этот процесс преобразования сигнала иллюстрируют временные диаграммы напряжения и тока, изображенные на рис. 6.7. Видно, что из-за нелинейности ВАХ временная диаграмма тока оказывается несимметричной относительно того уровня, которому соответствует значение  $U = U_0$ .

**Пример 6.3.** Вольт-амперная характеристика нелинейного двухполюсника при некотором выборе рабочей точки описывается многочленом 4-й степени с коэффициентами  $a_0 = 6$  мА,  $a_1 = 15$  мА/В,  $a_2 = 3$  мА/В<sup>2</sup>,  $a_3 = 2$  мА/В<sup>3</sup>,  $a_4 = 1$  мА/В<sup>4</sup>. Все остальные коэффициенты разложения ВАХ в ряд Тейлора равны нулю.

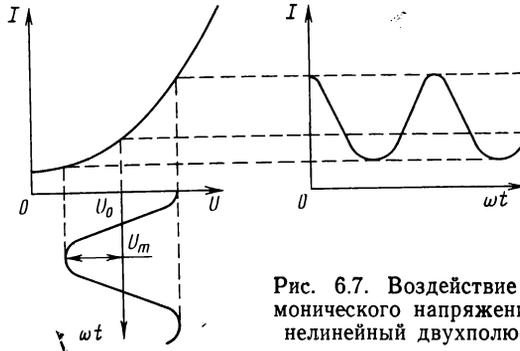


Рис. 6.7. Воздействие гармонического напряжения на нелинейный двухполюсник

Помимо напряжения смещения к двухполюснику приложено переменное гармоническое напряжение полезного сигнала с амплитудой  $U_m = 1,5$  В. Найти постоянную составляющую тока  $I_0$  и амплитуду первой гармоники  $I_1$ .

В соответствии с формулой (6.32)

$$I_0 = 6 + \frac{1}{2} \cdot 3 \cdot (1,5)^2 + \frac{3}{8} \cdot 1 \cdot (1,5)^4 = 11,27 \text{ мА.}$$

Аналогично, воспользовавшись выражением (6.33), получаем

$$I_1 = 15 \cdot 1,5 + \frac{3}{4} \cdot 2 \cdot (1,5)^3 = 27,56 \text{ мА.}$$

Следует заметить, что в отсутствие гармонического сигнала постоянная составляющая тока  $I_0 = a_0 = 6$  мА, а после включения переменного напряжения эта составляющая возрастает почти вдвое. Такое преобразование изменений амплитуды переменного напряжения в изменение уровня постоянной составляющей тока имеет полезные технические приложения. Например, на этом принципе можно, располагая лишь простым измерительным прибором магнитоэлектрической системы, построить вольтметр переменного напряжения, пригодный для работы на частотах в десятки и даже сотни мегагерц.

**Полупроводниковые выпрямители.** Так называют устройства для преобразования переменного гармонического напряжения в постоянное напряжение. Выпрямители служат источниками питания радиотехнических приборов, устройств автоматики, компьютеров и т. д.

Основным элементом выпрямителя является полупроводниковый диод (схемное обозначение VD), состоящий из двух соединенных вместе образцов полупроводника, обычно кремния,  $p$ - и  $n$ -типов. Вольт-амперную характеристику такого диода (рис. 6.8,а) в первом приближении можно записать так:

$$I(U) = \begin{cases} 0, & U < 0, \\ SU, & U \geq 0. \end{cases} \quad (6.36)$$

Здесь  $S$  — крутизна ВАХ, связанная с прямым сопротивлением диода соотношением

$$R_{пр} = 1/S.$$

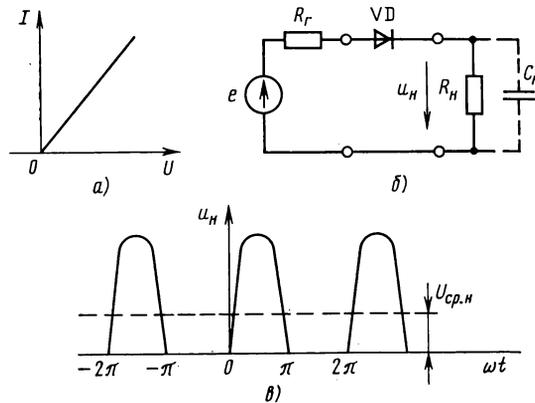


Рис. 6.8. Однополупериодный выпрямитель:

*a* — вольт-амперная характеристика диода; *б* — схема цепи; *в* — временная диаграмма напряжения на нагрузке

Обычно значение прямого сопротивления типичного диода колеблется от единиц до десятков ом.

На рис. 6.8,б изображена схема простейшего однополупериодного выпрямителя, работающего на резистивную нагрузку с сопротивлением  $R_n$ . В соответствии с равенствами (6.36) диод в течение положительного полупериода входного напряжения эквивалентен активному сопротивлению  $R_{пр}$ , а в течение отрицательного полупериода — разрыву цепи. Считая, что на входе выпрямителя действует источник гармонической ЭДС  $e(t) = E_m \sin \omega t$  с внутренним сопротивлением  $R_r$ , находим напряжение на нагрузке

$$u_n(t) = \begin{cases} \frac{E_m R_n}{R_n + R_r + R_{пр}} \sin \omega t, & 0 \leq \omega t < \pi, \\ 0, & \pi \leq \omega t < 2\pi. \end{cases} \quad (6.37)$$

Соответствующий график представлен на рис. 6.8,в. Выпрямленное напряжение имеет вид периодической последовательности положительных «полуволн»; как правило,  $R_n/R_r \gg 1$ ,  $R_n/R_{пр} \gg 1$  и поэтому амплитуда полуволн приблизительно равна амплитуде  $E_m$  источника на входе.

Часто интересуются постоянной составляющей выпрямленного напряжения, т. е. средним значением за период  $T$ :

$$U_{ср.н} = \frac{1}{T} \int_0^T u_n(t) dt \approx \frac{E_m}{2\pi} \int_0^\pi \sin x dx = \frac{E_m}{\pi}. \quad (6.38)$$

Пусть, например, выпрямитель работает от сети промышленной частоты при эффективном значении напряжения 220 В. Тогда

амплитуда напряжения источника  $E_m = 220\sqrt{2} = 311$  В, а постоянная составляющая выходного напряжения  $U_{\text{ср.н}} = 311/3,14 = 99$  В.

Как правило, пульсирующее выпрямленное напряжение непригодно для питания большинства радиоустройств. Чтобы сгладить это напряжение, параллельно нагрузке включают емкостный накопитель — конденсатор  $C_n$ , показанный на рис. 6.8,б пунктиром. Емкость конденсатора должна быть достаточно большой, чтобы в паузе между импульсами разрядка его через резистор  $R_n$  была пренебрежимо малой.

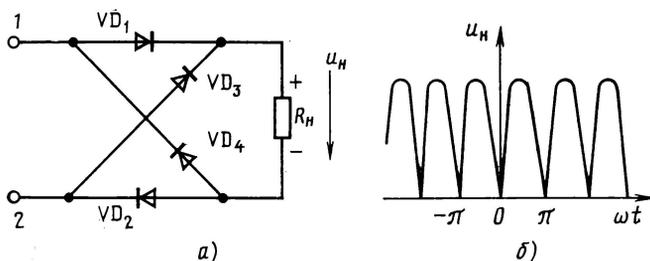


Рис. 6.9. Двухполупериодный выпрямитель:  
а — схема цепи; б — временная диаграмма выпрямленного напряжения

Более эффективна работа двухполупериодного выпрямителя, собранного по так называемой мостовой схеме (рис. 6.9,а). Здесь во время положительной полуволны входного напряжения, когда потенциал зажима 1 выше, чем зажима 2, диоды  $VD_1$  и  $VD_2$  открыты и через них протекает ток, создающий на резисторе  $R_n$  напряжение  $u_n$  с той полярностью, которая указана на рисунке. Диоды  $VD_3$  и  $VD_4$  в этот интервал времени закрыты, т. е. находятся в непроводящем состоянии.

При смене полярности входного напряжения, наоборот, диоды  $VD_1$  и  $VD_2$  закрыты, а через перекрестно включенные диоды  $VD_3$  и  $VD_4$  ток протекает в том же направлении, что и во время положительной полуволны. Временная диаграмма выходного напряжения изображена на рис. 6.9,б. Ясно, что здесь среднее значение выпрямленного напряжения

$$U_{\text{ср.н}} = 2E_m/\pi \quad (6.39)$$

вдвое выше, чем в однополупериодной схеме.

**Преобразование суммы двух гармонических сигналов.** Еще разнообразнее оказываются явления в нелинейном резистивном двухполюснике, который возбуждается суммой двух гармонических напряжений с различными частотами. Для простоты положим, что ВАХ нелинейного элемента в окрестности рабочей точки описывается многочленом второй степени

$$I(t) = a_0 + a_1 u(t) + a_2 u^2(t). \quad (6.40)$$

Если считать, что к зажимам элемента приложен высокочастотный сигнал

$$u(t) = U_{m1} \cos \omega_1 t + U_{m2} \cos \omega_2 t$$

с несовпадающими частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , то путем прямой подстановки этого выражения в формулу (6.40) находим

$$\begin{aligned} I(t) = & a_0 + a_1 U_{m1} \cos \omega_1 t + a_1 U_{m2} \cos \omega_2 t + \\ & + a_2 U_{m1}^2 \cos^2 \omega_1 t + a_2 U_{m2}^2 \cos^2 \omega_2 t + \\ & + 2a_2 U_{m1} U_{m2} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t. \end{aligned}$$

Легко заметить, что в состав тока помимо компонент с частотами  $\omega_1$  и  $\omega_2$ , а также их вторых гармоник, обусловленных квадратами косинусоидальных функций, входит «перекрестная» составляющая

$$\begin{aligned} I_{12}(t) = & 2a_2 U_{m1} U_{m2} \cos \omega_1 t \cos \omega_2 t = \\ = & a_2 U_{m1} U_{m2} [\cos(\omega_1 + \omega_2)t + \cos(\omega_1 - \omega_2)t], \end{aligned} \quad (6.41)$$

которая образована колебаниями суммарной и разностной частот, называемых в радиотехнике *комбинационными частотами*.

Итак, в результате нелинейного преобразования суммы двух гармонических колебаний возникает сигнал, состоящий из большого числа отдельных гармонических составляющих. Говорят, что такой сигнал имеет *сложный спектральный состав*. Характерная осциллограмма тока, возбуждаемого в нелинейном элементе под действием двух гармонических напряжений, частота одного из которых мала, а другого велика, показана на рис. 6.10.

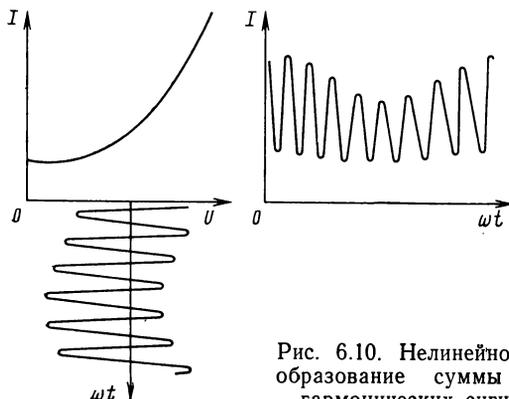


Рис. 6.10. Нелинейное преобразование суммы двух гармонических сигналов

Нелинейное преобразование суммы двух сигналов двухполюсником с ВАХ произвольного вида рассматривается в курсе «Радиотехнические цепи и сигналы» [4]. Показано, что при этом возникает бесконечная совокупность комбинационных частот вида

$$\omega = |m\omega_1 + n\omega_2|, \quad (6.42)$$

где  $m=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ;  $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$  — любые положительные и отрицательные целые числа, включая нуль.

Эффект обогащения спектра тока при нелинейном преобразовании суммы гармонических сигналов лежит в основе работы многих важных радиотехнических устройств.

### 6.6. ЦЕПЬ С НЕЛИНЕЙНЫМ КОНДЕНСАТОРОМ. ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ УСИЛЕНИЕ

Рассмотрим полупроводниковый диод (рис. 6.11,а), включенный в обратном направлении. При этом потенциал  $n$ -области вы-

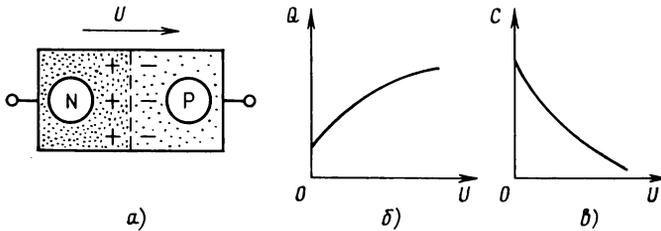


Рис. 6.11. Полупроводниковый диод как нелинейный конденсатор:

а — схема включения диода; б — вольт-кулонная характеристика;  
в — вольт-фарадная характеристика

ше потенциала  $p$ -области. Постоянный ток через такой диод не проходит, а на границах области перехода возникает разделенный электрический заряд. В теории полупроводниковых приборов доказывается, что этот заряд

$$Q = A(U_k + U)^{1/2}, \quad (6.43)$$

где  $A$  — некоторая постоянная, зависящая от конструкции диода;  $U$  — приложенное напряжение;  $U_k = 0,2-0,8$  В — контактная разность потенциалов, значение которой связано с температурой и концентрацией носителей в  $n$ - и  $p$ -областях.

Формула (6.43) устанавливает вид *вольт-кулонной характеристики* обратносмещенного  $p$ - $n$ -перехода (рис. 6.11,б). Принципиально важно, что эта характеристика оказывается нелинейной. Поэтому говорят, что такой диод ведет себя как нелинейный конденсатор. Параметром этого конденсатора служит дифференциальная емкость

$$C_{\text{диф}}(U) = \frac{dQ}{dU} = \frac{A}{2(U_k + U)^{1/2}}. \quad (6.44)$$

Кривую, описывающую зависимость величины  $C_{\text{диф}}$  от приложенного обратного напряжения  $U$ , называют *вольт-фарадной характеристикой* конденсатора (рис. 6.11,в). Можно заметить, что с ростом абсолютного значения напряжения  $U$  емкость перехода

уменьшается. В современных радиотехнических устройствах широко применяют специально разработанные полупроводниковые диоды, называемые *варикапами*, которые выполняют роль электрически перестраиваемых конденсаторов.

**Пример 6.4.** Известно, что некоторый варикап с контактной разностью потенциалов  $U_k=0,64$  В при  $U=0$  имеет дифференциальную емкость  $C_{\text{диф}}(0)=50$  пФ. Определить значение дифференциальной емкости при подаче на варикап обратного напряжения 20 В.

Подставив в (6.44) значение  $U=0$ , получаем

$$50 = \frac{A}{2(0,64)^{1/2}},$$

откуда параметр  $A=80$  пФ·В<sup>1/2</sup>. Поэтому

$$C_{\text{диф}}(20) = \frac{80}{2(20,64)^{1/2}} = 8,8 \text{ пФ.}$$

Таким образом, данный варикап обеспечивает диапазон изменения емкости с более чем пятикратным перекрытием.

**Принцип параметрического усиления.** Если на обратносмещенный полупроводниковый диод подать некоторое гармоническое напряжение накачки с частотой  $\omega_n$  и амплитудой в несколько вольт, то емкость такого нелинейного конденсатора становится периодической функцией времени. Положим, что ее можно с достаточной точностью описать формулой

$$C_{\text{диф}}(t) = C_0 [1 + \beta \cos(\omega_n t + \varphi_n)], \quad (6.45)$$

где  $C_0$  — некоторая постоянная;  $\beta \ll 1$  — коэффициент, характеризующий относительное изменение емкости;  $\varphi_n$  — начальная фаза колебаний накачки.

Если помимо накачки к варикапу приложено гармоническое напряжение полезного сигнала с малой амплитудой, не превышающей, как правило, десятка микровольт, то по отношению к этому сигналу варикап ведет себя подобно линейному конденсатору, емкость которого изменяется во времени, колеблясь вокруг уровня  $C_0$  в пределах от  $C_0(1-\beta)$  до  $C_0(1+\beta)$ . Элементы цепи, параметры которых зависят от времени, принято называть *параметрическими элементами*.

Рассмотрим цепь (рис. 6.12), образованную источником гармонического тока  $I_c$  с частотой полезного сигнала  $\omega_c$ ; параллельно источнику включен параметрический конденсатор, емкость которого изменяется в соответствии с выражением (6.45). Имеется также резистивная нагрузка с проводимостью  $G_n$ , которая учитывает как наличие внешних цепей, так и присутствие внутренней проводимости источника сигнала.

Предположим, что на зажимах цепи возникает напряжение сигнала вида

$$u_c(t) = U_{mc} \sin(\omega_c t + \varphi_c) \quad (6.46)$$

с произвольной амплитудой  $U_{mc}$  и некоторой начальной фазой  $\varphi_c$ . Тогда ток через параметрический конденсатор

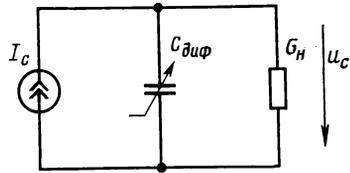


Рис. 6.12. Простейший параметрический усилитель

$$\begin{aligned} I(t) &= \frac{dQ}{dt} = \frac{dQ}{dU} \frac{du_c}{dt} \approx C_{диф}(t) \frac{du_c}{dt} = \\ &= \omega_c C_0 U_{mc} [1 + \beta \cos(\omega_n t + \varphi_n)] \cos(\omega_c t + \varphi_c) = \\ &= \omega_c C_0 U_{mc} \cos(\omega_c t + \varphi_c) + \frac{1}{2} \beta \omega_c C_0 U_{mc} \cos[(\omega_n + \omega_c)t + \varphi_n + \varphi_c] + \\ &\quad + \frac{1}{2} \beta \omega_c C_0 U_{mc} \cos[(\omega_n - \omega_c)t + \varphi_n - \varphi_c]. \end{aligned} \quad (6.47)$$

Первое слагаемое в правой части представляет собой обычный емкостный ток, опережающий приложенное напряжение по фазе на  $90^\circ$ . Второе и третье слагаемые описывают колебания с комбинационными частотами — суммарной частотой  $\omega_n + \omega_c$  и разностной частотой  $\omega_n - \omega_c$ .

Предположим, что частота накачки превышает частоту полезного сигнала ровно вдвое:

$$\omega_n = 2\omega_c. \quad (6.48)$$

При этом третье слагаемое в формуле (6.47) описывает колебание, происходящее в точности на частоте сигнала. Назовем, как это принято, данную компоненту *полезным током*:

$$I_n(t) = \frac{1}{2} \beta \omega_c C_0 U_{mc} \cos(\omega_c t + \varphi_n - \varphi_c). \quad (6.49)$$

Затем, выполнив элементарные тригонометрические преобразования, представим формулу (6.49) так:

$$\begin{aligned} I_n(t) &= \frac{1}{2} \beta \omega_c C_0 U_{mc} \cos(\omega_c t + \varphi_c + \varphi_n - 2\varphi_c) = \\ &= \frac{1}{2} \beta \omega_c C_0 U_{mc} \cos(\varphi_n - 2\varphi_c) \cos(\omega_c t + \varphi_c) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \beta \omega_c C_0 U_{mc} \sin(\varphi_n - 2\varphi_c) \sin(\omega_c t + \varphi_c). \end{aligned} \quad (6.50)$$

Первое слагаемое в правой части, изменяющееся во времени со сдвигом фаз  $90^\circ$  по отношению к приложенному напряжению, называют *квадратурной компонентой* полезного тока; очевидно, что эта компонента по-прежнему представляет собой реактивный ток.

Совершенно иной характер имеет второе слагаемое, называемое *синфазной компонентой*. Если  $\sin(\varphi_n - 2\varphi_c) < 0$ , то синфазная компонента тока имеет тот же знак, что и напряжение сигнала на варикапе. Это, в свою очередь, означает, что варикап по отноше-

нию к источнику сигнала ведет себя подобно обычной активной нагрузке; проводимость, вносимая в цепь, положительна:

$$G_{\text{вн}} = I_m \sin \phi / U_{m c} = \\ = 1/2 \beta \omega_c C_0 |\sin(\varphi_n - 2\varphi_c)| > 0. \quad (6.51)$$

Если же начальные сдвиги фаз  $\varphi_n$  и  $\varphi_c$  подобраны так, что  $\sin(\varphi_n - 2\varphi_c) > 0$ , то варикап, управляемый источником накачки, вносит в цепь отрицательную активную проводимость

$$G_{\text{вн}} = -1/2 \beta \omega_c C_0 \sin(\varphi_n - 2\varphi_c) < 0. \quad (6.52)$$

При этом происходит уменьшение результирующей активной проводимости, равной сумме проводимостей нагрузки и варикапа.

Будем считать, что реактивные токи полностью скомпенсированы за счет подключения параллельно варикапу некоторого индуктивного элемента. Тогда при отсутствии параметрического конденсатора в нагрузке будет выделяться активная мощность

$$P_n = 1/2 I_m^2 c / G_n.$$

После подключения варикапа, вносящего отрицательную активную проводимость, активная мощность в нагрузке возрастет:

$$P'_n = 1/2 I_m^2 c / (G_n + G_{\text{вн}}) > P_n.$$

Соответствующий коэффициент усиления мощности

$$K_P = P'_n / P_n = G_n / (G_n + G_{\text{вн}}). \quad (6.53)$$

Итак, рассматриваемая цепь при определенных условиях может стать параметрическим усилителем. Варикап играет роль промежуточного резервуара энергии, которая отбирается от источника накачки и передается в нагрузку синхронно с колебаниями полезного сигнала.

**Пример 6.5.** Параметрический усилитель работает на частоте  $\omega_c = 10^{11} \text{ с}^{-1}$ ; коэффициент  $\beta = 0,01$ , начальная емкость варикапа  $C_0 = 3 \text{ пФ}$ , проводимость нагрузки  $G_n = 2 \cdot 10^{-3} \text{ См}$ , начальная фаза источника сигнала  $\varphi_c = 0$ , значение  $\varphi_n = \pi/2$ . Найти коэффициент усиления мощности в данном устройстве.

Так как  $\sin(\varphi_n - 2\varphi_c) = 1$ , то очевидно, что свойства параметрического конденсатора используются максимально эффективно. На основании формулы (6.52)  $G_{\text{вн}} = -10^{-2} \cdot 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^{-12} / 2 = -1,5 \cdot 10^{-3} \text{ См}$ , откуда с помощью (6.53) находим  $K_P = 2 / (2 - 1,5) = 4$ .

Следует заметить, что параметрический усилитель склонен к самовозбуждению. Потеря устойчивости происходит при выполнении равенства  $G_n + G_{\text{вн}} = 0$ , т. е. при полной компенсации активной проводимости нагрузки.

**Пример 6.6.** Применительно к исходным данным, указанным в примере 6.5, найти критическое значение  $\beta_{\text{кр}}$ , при котором рассматриваемый параметрический усилитель оказывается на пороге самовозбуждения.

Искомое значение параметра  $\beta$  является корнем уравнения

$$2 \cdot 10^{-3} = \frac{\beta_{кр} 10^{11} \cdot 3 \cdot 10^{-12}}{2},$$

откуда  $\beta_{кр} = 0,0133$ .

Таким образом, емкость варикапа в устойчиво работающем усилителе должна изменяться весьма незначительно.

Параметрические усилители, несмотря на некоторую конструктивную сложность, широко используются в радиотехнических системах сверхвысоких частот. Их основное достоинство — низкий уровень собственных шумов, позволяющий создавать высокочувствительные радиоприемные устройства.

### ВОПРОСЫ

1. Как определяется понятие безынерционного нелинейного двухполюсника? Почему многие полупроводниковые приборы в ряде случаев действительно могут считаться безынерционными элементами?

2. Сформулируйте способ построения нагрузочной прямой.

3. Из каких элементов состоит эквивалентная линейная схема замещения резистивного нелинейного двухполюсника? Что такое крутизна ВАХ в выбранной рабочей точке и какова ее физическая размерность?

4. Как строится линейная схема замещения нелинейного четырехполюсника?

5. Нарисуйте электрические схемы и схемы замещения электронного усилителя с одним активным элементом, а также электронного повторителя. Может ли электронный повторитель служить усилителем напряжения? усилителем мощности?

6. Каков спектральный состав тока, возникающего в нелинейном безынерционном двухполюснике под действием приложенного гармонического напряжения?

7. Почему постоянная составляющая тока в нелинейном двухполюснике зависит от амплитуды приложенного гармонического напряжения?

8. За счет чего возникают колебания с комбинационными частотами?

9. Какова физическая природа нелинейной емкости, наблюдаемой в полупроводниковом диоде при подаче на него обратного напряжения смещения?

10. Каким условием продиктован выбор частоты накачки в параметрическом усилителе?

11. При каких условиях параметрический усилитель самовозбуждается?

## 7. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Перейдем к рассмотрению процессов в линейных электрических цепях, не содержащих внешних источников. Понятно, что токи и напряжения в таких цепях существуют лишь при условии, что в начальный момент времени, скажем, при  $t=0$  цепь имеет некото-

рый запас энергии. Подобные процессы принято называть *собственными* или *свободными колебаниями*. Будет показано, что изучение таких колебаний основано на решении линейных однородных дифференциальных уравнений.

### 7.1. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ОДНОКОНТУРНЫХ $RC$ - И $RL$ -ЦЕПЯХ

Простейшими электрическими системами, в которых наблюдаются собственные колебания, являются одиночные замкнутые контуры, образованные либо элементами  $R$  и  $C$  ( $RC$ -цепи), либо элементами  $R$  и  $L$  ( $RL$ -цепи). Как в одном, так и в другом случае здесь имеется элемент, запасаящий энергию электромагнитного поля.

**$RC$ -цепь.** Рассмотрим цепь, схема которой изображена на рис. 7.1. Положим, что при  $t < 0$  ключ  $K$  разомкнут. В момент времени  $t = 0$  ключ замыкает цепь, и конденсатор  $C$ , предварительно заряженный до известного напряжения  $U_0$ , начинает разряжаться через резистор  $R$ . Этот процесс разрядки конденсатора и представляет собой собственное колебание  $RC$ -цепи.

На рис. 7.1 стрелкой указано выбранное направление обхода контура. Знаки напряжений  $u_C$  и  $u_R$  согласованы с этим направлением. Примем условно в качестве положительного такое направление тока  $i$ , которое совпадает с направлением обхода.

По второму закону Кирхгофа в каждый момент времени выполняется условие электрического равновесия цепи  $u_R + u_C = 0$ . Ток в цепи  $i = C du_C/dt$  и поэтому напряжение на резисторе  $u_R = -RC du_C/dt$ . Отсюда следует, что собственные колебания  $RC$ -цепи описываются решениями следующего линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами:

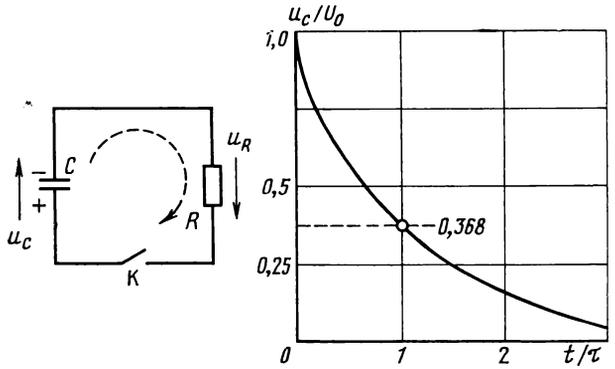


Рис. 7.1. Разрядка конденсатора через резистор

Рис. 7.2. Временная диаграмма напряжения на конденсаторе в  $RC$ -цепи

$$RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0. \quad (7.1)$$

Как известно [6], общее решение однородного, т. е. не содержащего правой части дифференциального уравнения первого порядка содержит одну произвольную постоянную. Чтобы получить единственное решение, которое отвечает реальному процессу в цепи, следует принять во внимание начальное условие

$$u_C(0) = U_0. \quad (7.2)$$

В математике говорят, что дифференциальное уравнение вместе с соответствующими начальными условиями образуют *начальную задачу (задачу Коши)*.

Метод решения начальной задачи (7.1) — (7.2) таков. Ищем общее решение уравнения (7.1) в виде

$$u_C(t) = A \exp(\gamma t), \quad (7.3)$$

где  $A$  — неизвестное заранее постоянное число,  $\gamma$  — формальный параметр с размерностью  $\text{с}^{-1}$ . Подставив решение (7.3) в дифференциальное уравнение (7.1), приходим к выводу о том, что величина  $\gamma$  должна быть корнем так называемого *характеристического уравнения*

$$RC\gamma + 1 = 0. \quad (7.4)$$

Очевидно, что в данном случае  $\gamma = -1/(RC)$ , поэтому при  $t > 0$  напряжение на конденсаторе описывается формулой

$$u_C(t) = A \exp[-t/(RC)]. \quad (7.5)$$

Чтобы теперь найти величину  $A$ , положим в решении (7.5) значение  $t = 0$ . Обратившись к начальному условию (7.2), убеждаемся, что  $A = U_0$ .

Итак, при  $t > 0$  напряжение на конденсаторе RC-цепи уменьшается во времени по экспоненциальному закону

$$u_C(t) = U_0 \exp[-t/(RC)]. \quad (7.6)$$

Ток в цепи

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -\frac{U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{RC}\right). \quad (7.7)$$

Отрицательный знак правой части формулы (7.7) обусловлен конкретным выбором положительных направлений тока и напряжений. Условие  $U_0 > 0$  означает, что потенциал нижней пластины конденсатора, изображенного на рис. 7.1, положителен. Разрядный ток  $i(t)$  фактически направлен против выбранного направления обхода контура. Это обстоятельство и учитывает знак в формуле (7.7).

Заметим, что абсолютное значение тока в начальный момент времени  $|i(0)| = U_0/R$  не зависит от емкости конденсатора. Этот

разрядный ток может оказаться весьма значительным. Например, если  $U_0 = 2$  кВ,  $R = 5$  Ом, то  $|i(0)| = 400$  А.

**Постоянная времени  $RC$ -цепи.** Формулы (7.6) и (7.7) устанавливают, что как напряжение на конденсаторе, так и ток в цепи стремятся к нулю при  $t \rightarrow \infty$ . График зависимости отношения  $u_C/U_0$  от безразмерного параметра  $t/(RC)$  изображен на рис. 7.2. Произведение  $\tau = RC$ , измеряемое в секундах, называют постоянной времени  $RC$ -цепи. За промежуток времени длительностью  $\tau$  напряжение на емкостном элементе уменьшается в  $e = 2,718 \dots$  раз по сравнению с начальным значением и составляет  $0,368 U_0$  к концу этого промежутка. Постоянная времени  $\tau$  служит универсальным временным масштабом для оценки скорости протекания процессов в  $RC$ -цепи.

Как видно из формулы (7.6), собственные колебания в  $RC$ -цепи, строго говоря, имеют неограниченную длительность. Однако экспоненциальная функция с отрицательным вещественным показателем быстро стремится к нулю с ростом  $t$ . Спустя отрезок времени протяженностью в несколько  $\tau$  напряжение на конденсаторе практически становится равным нулю, и процесс собственных колебаний заканчивается. Время установления  $t_{уст}$  стационарного состояния в  $RC$ -цепи определяют как промежуток времени, по истечении которого напряжение на конденсаторе снижается в десять раз по сравнению с первоначальным уровнем. Из формулы (7.6) получаем соотношение

$$\exp(-t_{уст}/\tau) = 0,1,$$

откуда

$$t_{уст} = (-\ln 0,1)\tau = 2,303 \tau. \quad (7.8)$$

**$RL$ -цепь.** В одноконтурной цепи из резистора  $R$  и индуктивного элемента  $L$  также могут существовать собственные колебания. Для этого элемент  $L$  должен иметь некоторый начальный запас энергии магнитного поля.

Рассмотрим цепь, схема которой представлена на рис. 7.3. При  $t < 0$  переключатель  $\Pi$  находится в левом положении. Через индуктивный элемент протекает постоянный ток  $I_0 = E/r$  в направлении, указанном стрелкой. В момент времени  $t = 0$  переключатель мгновенно, без разрыва тока перебрасывается вправо, и в  $RL$ -цепи начинается процесс собственных колебаний.

Будем мысленно обходить  $RL$ -контур в направлении стрелки, изображенной на рисунке. Уравнение равновесия цепи  $u_L + u_R = 0$  с учетом того, что  $u_L = L di/dt$  и  $u_R = Ri$  приобретает вид однородного дифференциального уравнения

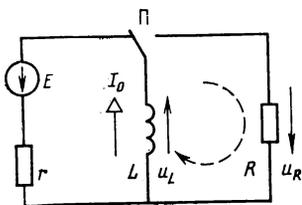


Рис. 7.3. Возбуждение собственных колебаний в  $RL$ -цепи

$$L \frac{di}{dt} + Ri = 0, \quad (7.9)$$

которое должно быть дополнено очевидным начальным условием

$$i(0) = I_0. \quad (7.10)$$

Начальная задача (7.9)—(7.10) решается тем же методом, который был использован при анализе собственных колебаний в RC-цепи. Проведя выкладки, легко убедиться, что ток в RL-цепи изменяется по закону

$$i(t) = I_0 \exp[-Rt/L], \quad t > 0. \quad (7.11)$$

Напряжение на индуктивном элементе

$$u_L(t) = -I_0 R \exp[-Rt/L] \quad (7.12)$$

в момент времени  $t=0$  скачком изменяется от нуля до  $-I_0 R$ . Причина этого скачка — возникновение ЭДС самоиндукции, которая в соответствии с известным из физики законом Ленца направлена так, чтобы препятствовать уменьшению начального тока.

Следует обратить внимание на то, что абсолютное значение напряжения на элементе  $L$  при  $t=0$  равно  $I_0 R$ . В реальных ситуациях это напряжение может быть огромно — так, если  $I_0 = 1$  А,  $R = 2$  МОм, то  $|u_L(0)| = 2$  МВ. Возникновение высоких импульсных напряжений при резких коммутациях индуктивных элементов имеет большое техническое значение (системы зажигания в двигателях внутреннего сгорания, источники высоковольтного питания в телевизионных приемниках и т. д.).

Постоянная времени RL-цепи, как это видно из формул (7.10) или (7.11), есть величина  $\tau = L/R$ . В типичном случае, когда  $L = 100$  мкГн,  $R = 5$  Ом, значение  $\tau = 20$  мкс.

Процесс собственных колебаний в RL-цепи практически заканчивается за время установления  $t_{уст} = 2,303 \tau$ .

**Энергетические соотношения в RC- и RL-цепях.** Говорят, что указанные цепи относятся к цепям *первого порядка*, поскольку именно таков порядок описывающих их дифференциальных уравнений. В данных цепях происходит необратимое преобразование запасенной электромагнитной энергии в энергию других видов.

Обращаясь к случаю RC-цепи, заметим, что здесь знаки тока  $i(t)$  и напряжения на резисторе  $u_R(t)$  одинаковы. Это означает, что мгновенная мощность процесса в резисторе  $p_R(t) = u_R(t)i(t)$  положительна. Резистор в каждый момент времени является только потребителем энергии. Напротив, мгновенная мощность процесса в конденсаторе  $p_C(t) = u_C(t)i(t)$  в каждый момент времени отрицательна, так как согласно выражениям (7.6) и (7.7) знаки величин  $u_C(t)$  и  $i(t)$  противоположны. Конденсатор служит источником энергии в течение всего времени существования собственных колебаний.

Физически сказанное здесь означает, что в резистивном элементе энергия движущихся носителей заряда передается атомной решетке проводника. Из-за соударений электронов с атомами увеличивается внутренняя энергия решетки, и температура резистора повышается. В конденсаторе силы электрического поля совершают положительную работу над носителями заряда, которые перемещаются вдоль цепи, и передают им энергию. Однако теория цепей не рассматривает этих подробностей и лишь констатирует факт, подтверждающий закон сохранения энергии — сумма мгновенных мощностей в обоих элементах равна нулю:

$$p_R(t) + p_C(t) = 0. \quad (7.13)$$

**Пример 7.1.** Конденсатор емкостью 100 мкФ, первоначально заряженный до напряжения  $U_0 = 15$  кВ, в момент времени  $t = 0$  начинает разряжаться через резистор сопротивлением 75 Ом. Найти начальный запас энергии в системе  $W(0)$ , а также значение  $p_C(0)$  — мощность, отдаваемую конденсатором в начальный момент времени.

Значение  $W(0) = CU_0^2/2 = 11\,250$  Дж. Используя формулы (7.6) и (7.7), получаем  $p_C(t) = -(U_0^2/R)\exp(-2t/(RC))$ , откуда, положив  $t = 0$ , находим  $p_C(0) = -3 \cdot 10^6$  Вт = -3 МВт.

Конденсатор, заряженный до высокого напряжения, часто используют как источник энергии для питания мощных импульсных лазеров, передатчиков радиолокационных станций и т. д.

Проведенный анализ целиком переносится и на случай  $RL$ -цепи. Здесь источником энергии является индуктивный элемент, а резистор играет роль потребителя.

## 7.2. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОМ КОЛЕБАТЕЛЬНОМ КОНТУРЕ

Более сложной цепью, в которой могут быть возбуждены собственные колебания, является уже рассматривавшаяся ранее одноконтурная  $LCR$ -цепь, представляющая собой последовательный колебательный контур (рис. 7.4). Отличительная черта этой цепи — одновременное наличие индуктивного и емкостного элементов. Поэтому колебательный контур одновременно запасает энергию как электрического, так и магнитного полей.

**Дифференциальное уравнение собственных колебаний.** На рис. 7.4 стрелками обозначено направление тока  $i(t)$ , условно прини-

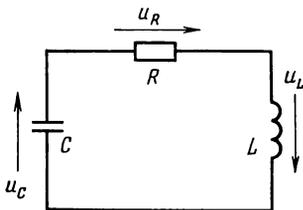


Рис. 7.4. Схема последовательного колебательного контура

маемое за положительное. Будем обходить контур в направлении стрелок. Если знаки напряжений  $u_R$ ,  $u_L$  и  $u_C$  выбрать так, как это показано на рис. 7.4, то эти напряжения будут согласованы с направлением обхода. Тогда, как известно,

$$u_L = L \frac{di}{dt}; \quad u_R = Ri; \quad u_C = \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi.$$

По второму закону Кирхгофа в любой момент времени  $u_L + u_R + u_C = 0$ , т. е.

$$L \frac{di}{dt} + Ri + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i(\xi) d\xi = 0. \quad (7.14)$$

Дифференцируя обе части равенства (7.14) по времени, получаем линейное дифференциальное уравнение, которое описывает собственные колебания в контуре

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + R \frac{di}{dt} + \frac{1}{C} i = 0. \quad (7.15)$$

Это уравнение имеет второй порядок. Поэтому говорят, что колебательный контур является *цепью второго порядка*.

**Колебательный контур без потерь.** Рассмотрим идеализированный контур без потерь, для которого  $R=0$ . Ток в нем описывается всевозможными решениями уравнения

$$L \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{1}{C} i = 0 \quad (7.16)$$

или

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \omega_0^2 i = 0. \quad (7.17)$$

Важный параметр

$$\omega_0 = 1/\sqrt{LC} \quad (7.18)$$

называют *частотой собственных колебаний* в контуре без потерь. Величина  $\omega_0$  имеет физическую размерность рад/с или, коротче,  $c^{-1}$ .

Если искать решение уравнения (7.17) в виде  $i(t) = A \exp(\gamma t)$ , где  $A$  — постоянное число, то прямой подстановкой убеждаемся, что  $\gamma$  должна быть корнем характеристического уравнения

$$\gamma^2 + \omega_0^2 = 0. \quad (7.19)$$

Это уравнение имеет два мнимых корня  $\gamma_{1,2} = \pm j\omega_0$ . Поэтому общее решение уравнения (7.17) таково:

$$i(t) = A_1 \exp(j\omega_0 t) + A_2 \exp(-j\omega_0 t). \quad (7.20)$$

Два постоянных коэффициента  $A_1$  и  $A_2$  следует выбрать так, чтобы выражение (7.20) при  $t=0$  удовлетворяло физически обус-

ловленным начальным условиям. Эти условия содержат сведения о значениях функции  $i(t)$  и ее производной  $di/dt$  при  $t=0$ .

Будем полагать известным значение тока в контуре в начальный момент времени

$$i(t) |_{t=0} = i(0). \quad (7.21)$$

Чтобы получить начальное условие, налагаемое на производную тока, заметим, что во все моменты времени, в том числе и при  $t=0$ , в контуре должно наблюдаться электрическое равновесие. Поэтому

$$L \frac{di}{dt} \Big|_{t=0} + u_C(0) = 0,$$

откуда

$$\frac{di}{dt} \Big|_{t=0} = -\frac{u_C(0)}{L}, \quad (7.22)$$

где  $u_C(0)$  — заданное начальное напряжение на емкостном элементе.

Подставив значение  $t=0$  вначале в правую часть решения (7.20), а затем в производную от этого выражения, на основании условий (7.21) и (7.22) получаем систему двух линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= i(0), \\ j\omega_0 A_1 - j\omega_0 A_2 &= -u_C(0)/L. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Решение этой системы элементарно:

$$A_1 = \frac{i(0)}{2} - \frac{u_C(0)}{2j\omega_0 L}; \quad A_2 = \frac{i(0)}{2} + \frac{u_C(0)}{2j\omega_0 L}. \quad (7.24)$$

Подставив данные коэффициенты в формулу (7.20), находим выражение для тока в контуре, удовлетворяющее как дифференциальному уравнению, так и начальным условиям

$$i(t) = i(0) \cos \omega_0 t - \frac{u_C(0)}{\omega_0 L} \sin \omega_0 t. \quad (7.25)$$

Здесь использованы известные из математики формулы Эйлера

$$\cos \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} + e^{-j\omega_0 t}}{2}; \quad \sin \omega_0 t = \frac{e^{j\omega_0 t} - e^{-j\omega_0 t}}{2j}.$$

Оба слагаемых в правой части равенства (7.25) отображают гармонические колебания с одинаковой частотой  $\omega_0$ , имеющие постоянные амплитуды. Сумма слагаемых также является гармонической функцией с той же частотой. Действительно, положим, что

$$i(0) = I_m \cos \vartheta; \quad \frac{u_C(0)}{\omega_0 L} = I_m \sin \vartheta, \quad (7.26)$$

где  $I_m$  и  $\vartheta$  — величины, связанные с начальными условиями:

$$I_m = \sqrt{i^2(0) + \frac{u_C^2(0)}{\omega_0^2 L^2}}; \quad \vartheta = \operatorname{arctg} \frac{u_C(0)}{i(0)\omega_0 L}.$$

Подставив формулы (7.26) в выражение (7.25), находим, что

$$i(t) = I_m \cos(\omega_0 t + \vartheta). \quad (7.27)$$

Итак,  $I_m$  представляет собой амплитуду тока собственных колебаний в контуре, а  $\vartheta$  — начальную фазу.

Воспользовавшись формулой (7.27), найдем закон изменения во времени напряжения на индуктивном элементе:

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} = -\omega_0 L I_m \sin(\omega_0 t + \vartheta) = \omega_0 L I_m \cos(\omega_0 t + \vartheta + 90^\circ). \quad (7.28)$$

Эта величина изменяется по гармоническому закону с той же частотой  $\omega_0$ ; видно, что по фазе напряжение  $u_L$  опережает ток на угол  $90^\circ$ . Амплитуда напряжения на индуктивном элементе

$$U_m = \omega_0 L I_m. \quad (7.29)$$

Очевидно, что такова же и амплитуда напряжения на емкостном элементе.

Интересно отметить, что отношение амплитуды любого напряжения к амплитуде тока численно равно уже встречавшемуся ранее характеристическому сопротивлению контура (см. гл. 5):

$$\rho = U_m/I_m = \omega_0 L = \sqrt{L/C}. \quad (7.30)$$

**Энергетические соотношения в колебательном контуре без потерь.** На основании формул (7.27) и (7.28) мгновенная мощность колебательного процесса в индуктивном элементе

$$p_L(t) = u_L(t)i(t) = -(\rho I_m^2/2) \sin(2\omega_0 t + 2\vartheta). \quad (7.31)$$

Эта мощность изменяется во времени по гармоническому закону с частотой  $2\omega_0$ . За период собственных колебаний контура абсолютное значение величины  $p_L$  четыре раза достигает амплитудного уровня

$$P_m = \rho I_m^2/2. \quad (7.32)$$

В те отрезки времени, когда  $p_L > 0$ , индуктивный элемент запасает энергию. Если же  $p_L < 0$ , то это означает, что энергия, накопленная в индуктивном элементе, передается конденсатору.

Поскольку  $u_C = -u_L$ , то мгновенная мощность в емкостном элементе  $p_C(t) = -p_L(t)$ . Иными словами, в соответствии с законом сохранения энергии происходит непрерывный энергетический обмен между элементами  $L$  и  $C$ .

В определенные моменты времени мощность колебательного процесса в контуре становится равной нулю. Условием этого яв-

ляется равенство  $i(t) = 0$  (вся энергия сосредоточена в конденсаторе), а также равенство  $u_C(t) = 0$  (вся энергия сосредоточена в индуктивном элементе).

**Собственные колебания в контуре с потерями.** Если  $R \neq 0$ , то для анализа собственных колебаний в контуре необходимо решить дифференциальное уравнение (7.15), которое удобно переписать так:

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + 2\alpha \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0. \quad (7.33)$$

Здесь  $\alpha = R/(2L)$  — параметр с размерностью  $c^{-1}$ , который называют *коэффициентом затухания контура*.

Применяя к уравнению (7.33) подстановку  $i = A \exp(\gamma t)$ , убеждаемся, что  $\gamma$  должна быть одним из корней характеристического уравнения

$$\gamma^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0, \quad (7.34)$$

которое имеет решения

$$\gamma_{1,2} = -\alpha \pm \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (7.35)$$

Поскольку уравнение (7.33) является линейным, его общее решение, описывающее всю совокупность физически возможных собственных колебаний, представляет собой сумму двух слагаемых:

$$i(t) = A_1 \exp(\gamma_1 t) + A_2 \exp(\gamma_2 t). \quad (7.36)$$

Конкретный выбор коэффициентов  $A_1$  и  $A_2$  диктуется начальными условиями — напряжением  $u_C(0)$  и током  $i(0)$ .

Положим для определенности, что начальное значение тока  $i(0) = 0$ , в то время как напряжение  $u_C(0) = U_0$  — некоторая известная величина. Таким образом, изучается явление разрядки конденсатора через последовательное соединение элементов  $R$  и  $L$ .

Начальное условие (7.22), очевидно, справедливо и для контура с потерями. Воспользовавшись этим условием, а также общим решением вида (7.36), приходим к системе двух алгебраических уравнений относительно  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= 0, \\ \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 &= -U_0/L. \end{aligned} \quad (7.37)$$

Эта система имеет решение

$$A_1 = U_0/[L(\gamma_2 - \gamma_1)]; \quad A_2 = U_0/[L(\gamma_1 - \gamma_2)]. \quad (7.38)$$

Подставляя формулы (7.38) в выражение (7.36), получаем следующий закон изменения тока при свободных колебаниях в контуре

$$i(t) = \frac{U_0}{(\gamma_2 - \gamma_1)L} (e^{\gamma_1 t} - e^{\gamma_2 t}), \quad t > 0. \quad (7.39)$$

**Колебательный контур с малыми потерями.** В радиоэлектронных устройствах часто применяют колебательные контуры, у которых сопротивление потерь  $R$  значительно меньше характеристического сопротивления  $\rho$ . Добротность таких контуров (гл. 5) достаточно высока:  $Q = \rho/R \gg 1$ . Подобные цепи принято называть колебательными контурами с малыми потерями.

Преобразуя неравенство  $R \ll \sqrt{L/C}$ , убеждаемся, что для данных цепей  $(R/L)^2 \ll 1/(LC)$  или

$$\alpha^2 \ll \omega_0^2. \quad (7.40)$$

Отсюда следует, что корни характеристического уравнения, задаваемые формулой (7.35), оказываются комплексно-сопряженными:

$$\gamma_{1,2} = -\alpha \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2} = -\alpha \pm j\omega_c, \quad (7.41)$$

где  $\omega_c = \sqrt{\omega_0^2 - \alpha^2}$  — так называемая частота собственных колебаний в контуре с потерями.

Подставив корни (7.41) в общую формулу (7.39), вынеся за скобки общий экспоненциальный множитель и применив формулу Эйлера, получаем

$$i(t) = -\frac{U_0}{\omega_c L} e^{-\alpha t} \sin \omega_c t, \quad t > 0. \quad (7.42)$$

График изменения тока во времени, построенный на основании данной формулы, изображен на рис. 7.5. Процесс разрядки конденсатора в  $LCR$ -цепи с малыми потерями представляет собой затухающее колебание. Экспоненциальный множитель  $\exp(-\alpha t)$  описывает так называемую *огибающую* колебания, которая имеет физический смысл переменной амплитуды. Огибающая изменяется во времени гораздо медленнее, чем высокочастотное заполнение вида  $\sin \omega_c t$ . Отрицательный знак в правой части формулы (7.42) объясняется так же, как и для случая уже рассмотренной  $RC$ -цепи.

Если добротность  $Q$  колебательного контура достаточно высока ( $Q \gg 1$ ), то частота собственных колебаний в контуре с потерями лишь незначительно отличается от частоты собственных колебаний в идеальном контуре без потерь. Действительно, в данном случае

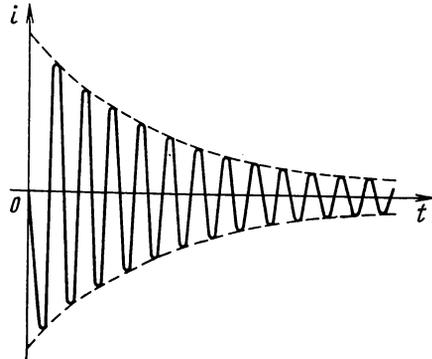


Рис. 7.5. Собственные колебания в контуре с малыми потерями

$$\omega_c = \omega_0 \sqrt{1 - (\alpha/\omega_0)^2} = \omega_0 \sqrt{1 - 1/(4Q^2)} \approx \omega_0 [1 - 1/(8Q^2)] \quad (7.43)$$

(использовано то, что  $\alpha = R/(2L)$ ), а также приближенное равенство  $\sqrt{1-x} \approx 1-x/2$ , имеющее место при  $x \ll 1$ ).

**Пример 7.2.** Найти частоту собственных колебаний в контуре, имеющем следующие параметры:  $R=8$  Ом,  $L=30$  мкГн,  $C=150$  пФ.

Характеристическое сопротивление контура  $\rho = \sqrt{L/C} = 447,2$  Ом. Добротность  $Q = \rho/R = 55,9$ . В соответствии с формулой (7.43) отношение  $\omega_c/\omega_0 \approx 1 - 1/(8Q^2) = 0,99996$ . Поэтому в большинстве инженерных расчетов можно с большой точностью полагать, что частоты  $\omega_c$  и  $\omega_0$  совпадают.

**Постоянная времени колебательного контура.** Анализируя формулу (7.42), можно заметить, что спустя отрезок времени  $\tau_k$ , называемый *постоянной времени колебательного контура* и удовлетворяющий соотношению  $\alpha\tau_k = 1$ , мгновенная амплитуда тока в контуре уменьшается в  $e = 2,718\dots$  раз по сравнению с начальным значением. Постоянная времени контура связана с параметрами цепи следующим образом:

$$\tau_k = 1/\alpha = 2L/R.$$

Умножив числитель и знаменатель в правой части последнего равенства на величину  $\omega_0$ , получаем, что

$$\tau_k = 2\rho/(\omega_0 R) = 2Q/\omega_0. \quad (7.44)$$

Время установления состояния равновесия в колебательном контуре с малыми потерями

$$t_{уст} = 4,606Q/\omega_0 \quad (7.45)$$

[ср. с формулой (7.8)].

Например, пусть контур имеет параметры:  $Q=130$ ,  $\omega_0 = 4 \cdot 10^7$  с<sup>-1</sup>. Время установления  $t_{уст} = 14,97$  мкс. Период собственных колебаний контура  $T_0 = 2\pi/\omega_0 = 0,157$  мкс. Число собственных периодов за отрезок времени длительностью  $t_{уст}$  составит при этом  $N = t_{уст}/T_0 \approx 95$ . Этот результат количественно подтверждает

положение о том, что в контуре с малыми потерями огибающая изменяется весьма медленно по сравнению с высокочастотным заполнением.

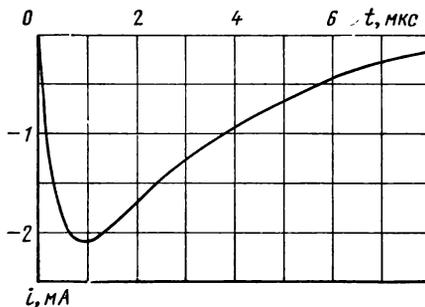


Рис. 7.6. Собственные колебания в контуре с большими потерями

**Колебательный контур с большими потерями.** Принято считать, что потери в колебательном контуре велики, если  $\alpha > \omega_0$ . В этом случае корни характеристического уравнения  $\gamma_{1,2}$  оказываются чисто вещественными и отрицательными.

В качестве примера на рис. 7.6 представлена осциллограмма тока в контуре со следующими параметрами:  $L=1$  мГн,  $C=1$  нФ,  $R=4$  кОм,  $U_0=10$  В. Характеристическое уравнение данной цепи имеет корни  $\gamma_1=-2,679 \cdot 10^5$  с $^{-1}$ ,  $\gamma_2=-3,732 \cdot 10^6$  с $^{-1}$ . Сравнив кривые на рис. 7.5 и 7.6, замечаем, что при большом сопротивлении потерь процесс имеет не колебательный, а аperiodический характер, так как знак тока остается неизменным. Физически это означает, что в контуре с большими потерями нет периодического обмена энергией между емкостным и индуктивным элементами.

Границей между колебательным и аperiodическим режимами служит так называемый *критический режим* собственных колебаний, при котором  $\alpha=\omega_0$ . Легко видеть, что этот режим возникает при критическом значении сопротивления потерь  $R_{кр}=2\rho$ ; корни характеристического уравнения становятся равными друг другу.

Итак, если добротность контура  $Q>1/2$ , то процесс разрядки конденсатора является колебательным, а если  $Q<1/2$ , то этот процесс является аperiodическим. Критическому режиму отвечает точное равенство  $Q=1/2$ .

### 7.3. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В СВЯЗАННЫХ КОНТУРАХ

Более сложной системой являются связанные колебательные контуры. На рис. 7.7,а изображены два одинаковых контура 1 и 2

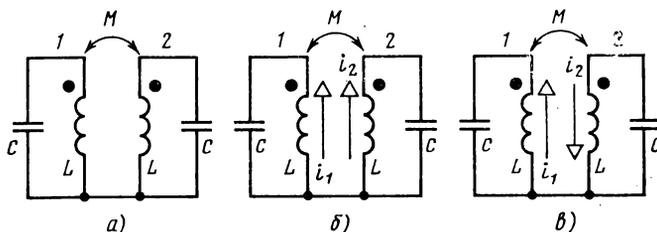


Рис. 7.7. Связанные колебательные контуры:  
а — схема цепи; б — направления токов четной моды; в — направления токов нечетной моды

без потерь, имеющие индуктивную связь. Внешние источники в контурах отсутствуют.

Если  $i_1$  и  $i_2$  — токи в контурах, то по второму закону Кирхгофа имеют место равенства

$$\begin{aligned} L \frac{di_1}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_1 d\xi + M \frac{di_2}{dt} &= 0, \\ L \frac{di_2}{dt} + \frac{1}{C} \int_{-\infty}^t i_2 d\xi + M \frac{di_1}{dt} &= 0, \end{aligned} \quad (7.46)$$

откуда следует система двух дифференциальных уравнений второго порядка

$$\begin{aligned} L \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{C} i_1 + M \frac{d^2 i_2}{dt^2} &= 0, \\ L \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{1}{C} i_2 + M \frac{d^2 i_1}{dt^2} &= 0. \end{aligned} \quad (7.47)$$

Не представляет труда, скажем, выразить  $i_2$  через  $i_1$  и получить одно дифференциальное уравнение четвертого порядка, эквивалентное этой системе. Таким образом, два связанных колебательных контура являются *цепью четвертого порядка*.

Однако интереснее выбрать другой путь анализа, основанный на учете симметрии данной цепи. Для этого рассмотрим режим, при котором в обоих контурах возбуждены одинаковые токи  $i_1 = i_2 = x$ , ориентированные в согласованном направлении (рис. 7.7,б). Тогда система (7.47) превращается в одно уравнение второго порядка

$$(L + M) \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{1}{C} x = 0$$

или

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + \omega_{01}^2 x = 0, \quad (7.48)$$

где

$$\omega_{01} = 1/\sqrt{(L + M)C} \quad (7.49)$$

— частота собственных колебаний в данном режиме, который называется *четной* или *симметричной модой*.

Возможен и другой частный режим, при котором  $i_1 = -i_2 = y$ , т. е. токи в контурах одинаковы по абсолютной величине, но ориентированы встречно (рис. 7.7,в). Говорят, что такой режим представляет собой *нечетную* или *антисимметричную* моду, которая описывается дифференциальным уравнением

$$(L - M) \frac{d^2 y}{dt^2} + \frac{1}{C} y = 0$$

или

$$\frac{d^2 y}{dt^2} + \omega_{02}^2 y = 0, \quad (7.50)$$

где

$$\omega_{02} = 1/\sqrt{(L - M)C} \quad (7.51)$$

— частота собственных колебаний в режиме нечетной моды.

Итак, в системе одинаковых связанных контуров без потерь имеются две частоты собственных колебаний. Разница между этими частотами тем больше, чем сильнее связь.

**Пример 7.3.** Система одинаковых контуров без потерь с индуктивной связью имеет параметры:  $k_c=0,05$ ,  $L=85$  мкГн,  $C=0,6$  нФ. Найти частоты собственных колебаний для четной и для нечетной моды.

Коэффициент взаимоиндукции  $M=k_cL=4,25$  мкГн. По формулам (7.49) и (7.51) вычисляем  $\omega_{01}=4,321 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>,  $\omega_{02}=4,515 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>. Одиночный контур без связи имеет частоту собственных колебаний  $\omega_0=4,428 \cdot 10^6$  с<sup>-1</sup>, так что четная мода оказывается более низкочастотной, а нечетная мода — более высокочастотной.

Каждая из мод является независимой и может возбуждаться *селективно*, т. е. в чистом виде. Например, чтобы возбудить четную моду, можно в момент времени  $t=0$  подключить к связанным катушкам два конденсатора, заряженные до одинакового напряжения и имеющие одну и ту же полярность верхних обкладок (при согласном включении катушек). Если полярность начального напряжения на одном из конденсаторов изменить на противоположную, то будет селективно возбуждена только нечетная мода.

**Интерференция мод в системе связанных контуров.** В общем случае колебательный процесс будет представлять собой линейную комбинацию обеих мод:

$$\begin{aligned} i_1(t) &= A_1 \cos(\omega_{01}t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega_{02}t + \varphi_2), \\ i_2(t) &= A_1 \cos(\omega_{01}t + \varphi_1) - A_2 \cos(\omega_{02}t + \varphi_2). \end{aligned} \quad (7.52)$$

Четыре входящих сюда числа  $A_1$ ,  $A_2$ ,  $\varphi_1$ ,  $\varphi_2$  зависят от выбора начальных условий, которые накладываются, скажем, на два тока и на две производные от токов.

Подобные процессы в физике называют *интерференцией* гармонических колебаний с несовпадающими частотами.

Рассмотрим, например, случай, когда начальные токи в обоих контурах равны нулю, конденсатор в контуре 1 имеет при  $t=0$  напряжение  $U_0$ , а напряжение на конденсаторе в контуре 2 в начальный момент времени равно нулю. Упорядоченная пара (вектор) начальных условий может быть очевидным образом представлена так:

$$(U_0, 0) = (U_0/2, U_0/2) + (U_0/2, -U_0/2). \quad (7.53)$$

Это равенство означает, что в рассматриваемом случае обе моды будут возбуждены с одинаковыми амплитудами напряжений на конденсаторах, равными  $U_0/2$ . Поэтому

$$\begin{aligned} u_{C1}(t) &= \frac{1}{2} U_0 (\cos \omega_{01} t + \cos \omega_{02} t) = \\ &= U_0 \cos \left( \frac{\omega_{01} - \omega_{02}}{2} t \right) \cos \left( \frac{\omega_{01} + \omega_{02}}{2} t \right), \end{aligned} \quad (7.54)$$

$$\begin{aligned} u_{C2}(t) &= \frac{1}{2} U_0 (\cos \omega_{01} t - \cos \omega_{02} t) = \\ &= U_0 \sin \left( \frac{\omega_{02} - \omega_{01}}{2} t \right) \sin \left( \frac{\omega_{01} + \omega_{02}}{2} t \right). \end{aligned} \quad (7.55)$$

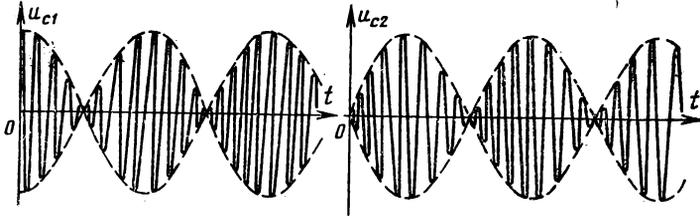


Рис. 7.8. Временные диаграммы напряжений на конденсаторах первого и второго контуров

Соответствующие графики (рис. 7.8) отображают *биения*, т. е. суперпозицию двух одинаковых по амплитуде гармонических колебаний с частотами  $\omega_{01}$  и  $\omega_{02}$ . При слабой связи относительная расстройка между этими частотами невелика и поэтому частота огибающей биений  $\omega_6 = 1/2(\omega_{02} - \omega_{01})$  существенно ниже частоты высокочастотного заполнения  $\omega_B = 1/2(\omega_{01} + \omega_{02})$ , близкой к частоте собственных колебаний одиночного контура без связи.

С физической точки зрения картина биений говорит о том, что периодически происходит *обмен энергией* между контурами.

При наличии малых потерь общие закономерности процесса собственных колебаний останутся прежними, однако огибающие кривых будут уменьшаться во времени пропорционально множителю  $\exp(-\alpha t)$ , где  $\alpha$  — коэффициент затухания.

Аналогичным способом можно рассмотреть более общий случай, когда индуктивности и емкости контуров различны.

#### 7.4. УСТОЙЧИВОСТЬ ЦЕПЕЙ. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В АКТИВНЫХ ЦЕПЯХ

Рассмотренные ранее частные примеры позволяют высказать предположение, и его можно подтвердить совершенно строго, что процесс собственных колебаний в любой линейной системе описывается решениями линейного дифференциального уравнения вида

$$a_n \frac{d^n u}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} u}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{du}{dt} + a_0 u = 0, \quad (7.56)$$

где  $n$  — порядок системы.

Чтобы получить общее решение такого уравнения, следует прежде всего найти  $n$  корней характеристического уравнения

$$a_n \gamma^n + a_{n-1} \gamma^{n-1} + \dots + a_1 \gamma + a_0 = 0, \quad (7.57)$$

а затем, положив для простоты, что кратные корни отсутствуют, записать

$$u(t) = A_1 e^{\gamma_1 t} + A_2 e^{\gamma_2 t} + \dots + A_n e^{\gamma_n t}. \quad (7.58)$$

Выбор коэффициентов  $A_1, A_2, \dots, A_n$  диктуется начальными условиями.

Следует отметить, что все коэффициенты уравнений (7.56) и (7.57) являются некоторыми комбинациями параметров  $L, C, R, M$  и поэтому представляют собой *вещественные числа*. В алгебре доказывается, что при этом корни  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  могут быть либо вещественными, либо группируются в комплексно-сопряженные пары. Согласно формуле (7.58) каждый вещественный корень дает в решение вклад вида  $\exp(\gamma t)$ ; паре корней вида  $\gamma_{1,2} = \alpha + j\omega_0$  отвечает вклад вида  $\exp(\alpha t) (a \cos \omega_0 t + b \sin \omega_0 t)$  с некоторым конкретным набором коэффициентов  $a$  и  $b$ .

Любая пассивная цепь не содержит источников энергии и поэтому всегда является *устойчивой* — собственные колебания в такой цепи при любых начальных условиях либо остаются ограниченными по амплитуде, либо экспоненциально стремятся к нулю с ростом времени. Необходимым и достаточным условием устойчивости линейной цепи служит следующее требование: ни один из корней характеристического уравнения не должен иметь положительную вещественную часть.

Линейные активные цепи могут оказаться неустойчивыми. Рассмотрим, например, последовательный колебательный контур, в котором параметр  $R$  представляет собой сумму сопротивления потерь  $R_{\text{п}} > 0$  и отрицательного сопротивления  $R_{\text{отр}} < 0$ , учитывающего энергетический обмен внешнего источника с данной цепью:

$$R = R_{\text{п}} + R_{\text{отр}}. \quad (7.59)$$

Если добиться равенства  $R = 0$ , то в контуре наблюдается *регенерация* сопротивления потерь и цепь оказывается на границе режима устойчивости.

При  $R < 0$  имеет место неравенство

$$\operatorname{Re} \gamma_{1,2} = -\alpha = -R/(2L) > 0$$

[см. формулу (7.41)]. Такой контур становится неустойчивой цепью. Амплитуда колебаний в нем нарастает по экспоненциальному закону до тех пор, пока не произойдет «насыщение» под действием тех или иных нелинейных факторов.

Неустойчивые колебательные цепи служат моделями важных радиотехнических устройств — автогенераторов гармонических колебаний.

Активные цепи часто строят на базе операционных усилителей (ОУ) — микроэлектронных элементов с двумя входами, инвертирующим (1) и неинвертирующим (2). Выходное напряжение ОУ

$$u_{\text{вых}} = K_0 (u_{\text{вх}2} - u_{\text{вх}1}),$$

где  $K_0$  — коэффициент усиления элемента. Современные ОУ, имея

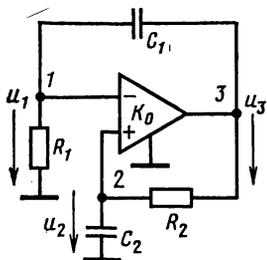


Рис. 7.9. Схема цепи с операционным усилителем

высокое входное и низкое выходное сопротивления, приближаются по своим свойствам к идеальным ИНУН; обычно  $K_0 \gg 1$ .

Исследуем устойчивость активной цепи с ОУ, схема которой приведена на рис. 7.9. Для этого запишем вначале три уравнения состояния, которые связывают между собой напряжения в узлах 1, 2 и 3:

$$u_3 = K_0(u_2 - u_1), \quad (7.60)$$

$$C_1 \frac{du_3}{dt} - C_1 \frac{du_1}{dt} = \frac{u_1}{R},$$

$$C_2 \frac{du_2}{dt} = \frac{u_3 - u_2}{R_2}.$$

Второе и третье уравнения в этой системе отображают тот факт, что входы ОУ не потребляют тока и поэтому ток в  $C_1$  равен току в  $R_1$ , а ток в  $C_2$  — току в  $R_2$ .

Если объединить первое и третье уравнения, то можно записать

$$C_2 \frac{du_2}{dt} = \frac{(K_0 - 1)u_2 - K_0 u_1}{R_2},$$

и выразить переменную  $u_1$  через  $u_2$ :

$$u_1 = -\frac{R_2 C_2}{K_0} \frac{du_2}{dt} + \frac{K_0 - 1}{K_0} u_2; \quad (7.61)$$

значит,

$$\frac{du_1}{dt} = -\frac{R_2 C_2}{K_0} \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{K_0 - 1}{K_0} \frac{du_2}{dt}. \quad (7.62)$$

Объединим первое и второе уравнения из системы (7.60):

$$C_1 K_0 \frac{du_2}{dt} - C_1 (K_0 + 1) \frac{du_1}{dt} = \frac{u_1}{R_1}. \quad (7.63)$$

Подставив сюда выражения (7.61) и (7.62), после элементарных преобразований получим дифференциальное уравнение относительно напряжения  $u_2$ :

$$\tau_1 \tau_2 (K_0 + 1) \frac{d^2 u_2}{dt^2} + (\tau_1 + \tau_2) \frac{du_2}{dt} - (K_0 - 1) u_2 = 0. \quad (7.64)$$

Здесь введены постоянные времени  $\tau_1 = R_1 C_1$  и  $\tau_2 = R_2 C_2$ .

Видно, что рассматриваемая цепь является системой второго порядка, так как допускает два независимых начальных условия — напряжения на обоих конденсаторах.

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\tau_1 \tau_2 (K_0 + 1) \gamma^2 + (\tau_1 + \tau_2) \gamma - (K_0 - 1) = 0. \quad (7.65)$$

В этом квадратном уравнении коэффициенты при  $\gamma^2$  и при  $\gamma$  всегда положительны. Свободный член положителен, если  $K_0 < 1$  и отрицателен, если  $K_0 > 1$ .

Прямым расчетом легко убедиться, что корни уравнения  $\gamma^2 + a\gamma + b = 0$  имеют отрицательные вещественные части при  $a > 0$  и  $b > 0$ . Если же  $a > 0$ , но  $b < 0$ , то вещественная часть одного из корней положительна. Отсюда сразу следует условие устойчивости изучаемой цепи

$$K_0 < 1. \quad (7.66)$$

Отметим в заключение, что поиск корней характеристического уравнения высокой степени даже численными методами — непросто задача. Тем не менее, удается, используя специально разработанные критерии устойчивости, судить о характере расположения корней лишь по совокупности коэффициентов уравнения. Подробно этот вопрос изучается в курсе «Радиотехнические цепи и сигналы» [4], [5].

### ВОПРОСЫ

1. Как формулируется задача Коши для дифференциального уравнения, описывающего состояние линейной электрической цепи?
2. Каков физический смысл постоянной времени для цепи первого порядка?
3. Что такое коэффициент затухания колебательного контура?
4. Как влияют потери на частоту собственных колебаний контура? Как связаны между собой добротность, частота собственных колебаний и постоянная времени контура?
5. Чем отличаются друг от друга четные и нечетные моды в системе связанных колебательных контуров?
6. Какие электрические цепи называют устойчивыми? Какими должны быть корни характеристического уравнения для устойчивой цепи?

## 8. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ

Важной областью применения линейных цепей является обработка разнообразных сигналов в радиотехнических устройствах, системах автоматики и компьютерах. Так, с помощью линейных цепей осуществляют частотную фильтрацию полезного сигнала, искаженного действием помех. Применяя линейные цепи, удается также изменять формы сигналов.

Обычно сигналы представляют собой *импульсы*, т. е. колебания конечной длительности. Под действием внешних сигналов в линейной цепи возбуждаются как собственные, так и вынужденные ко-

лебания. Наложение этих двух колебаний определяет собой нестационарный процесс в цепи.

Исследование нестационарных процессов проводят, опираясь на математическую модель цепи в форме ее дифференциального уравнения. Теория цепей предоставляет богатый материал, иллюстрирующий технические приложения этого фундаментального раздела математики.

### 8.1. ВОЗДЕЙСТВИЕ ИСТОЧНИКА СТУПЕНЧАТОГО СИГНАЛА НА ЦЕПИ ПЕРВОГО ПОРЯДКА

Простейшим сигналом, играющим при этом весьма важную роль в технических приложениях, является *функция включения*, называемая также *функцией Хевисайда*

$$\sigma(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ 1, & t > 0. \end{cases} \quad (8.1)$$

Такую математическую модель часто используют для описания импульсных колебаний.

Нестационарный процесс, возникающий в линейной цепи под действием такого ступенчатого сигнала, поданного на вход, принято называть *переходным процессом*. Этот термин подчеркивает, что в системе наблюдается переход из одного стационарного состояния в другое.

**Воздействие скачка ЭДС на последовательную RC-цепь.** Схема изучаемой цепи приведена на рис. 8.1,а. Ток в цепи согласован по

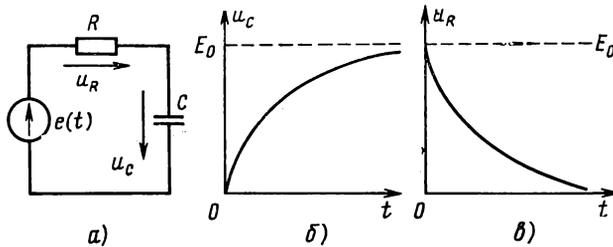


Рис. 8.1. Переходный процесс в RC-цепи:

а — схема цепи; б, в — временные диаграммы напряжений на конденсаторе и резисторе

направлению с напряжениями. Поэтому из равенства  $u_R + u_C = e$  следует дифференциальное уравнение цепи

$$RC \frac{d u_C}{d t} + u_C = e(t). \quad (8.2)$$

К этому уравнению необходимо добавить начальное условие

$$u_C|_{t=0} = U_0, \quad (8.3)$$

где  $U_0$  — исходное напряжение на конденсаторе, зависящее от предыстории процесса при  $t < 0$ .

Будем изучать переходный процесс в данной цепи, положив, что

$$e(t) = E_0 \sigma(t), \quad (8.4)$$

где  $E_0$  — некоторая известная величина.

Итак, равенства (8.2) — (8.3) определяют задачу Коши для неоднородного дифференциального уравнения первого порядка с постоянными коэффициентами; задачу требуется решить при  $t > 0$ .

Через всю теорию линейных дифференциальных уравнений красной нитью проходит фундаментальный принцип: решение неоднородного уравнения, удовлетворяющее заданным начальным условиям, всегда следует искать *в виде суммы какого-либо частного решения* этого неоднородного уравнения *и общего решения* соответствующего однородного уравнения, у которого правая часть равна нулю [6].

В физических задачах правая часть дифференциального уравнения описывает действие возбуждающего источника. Решение неоднородного уравнения обычно называют *вынужденным колебанием*, а решение однородного уравнения — *собственным колебанием*. Таким образом, в нашем случае

$$u_C(t) = u_{C \text{ вын}}(t) + u_{C \text{ соб}}(t). \quad (8.5)$$

Часто вынужденную составляющую решения удастся определить непосредственно, не используя каких-либо общих математических приемов. Например, уравнение (8.2) с правой частью вида (8.4) удовлетворяется тождественно, если считать, что при  $t > 0$

$$u_{C \text{ вын}}(t) = E_0 = \text{const}. \quad (8.6)$$

Действительно, при этом конденсатор заряжен до напряжения источника, ток отсутствует и цепь находится в равновесии.

Тогда

$$u_C(t) = E_0 + A \exp(-t/(RC)),$$

причем постоянную  $A$  следует подобрать так, чтобы выполнялось условие (8.3). Для этого нужно, чтобы  $U_0 = E_0 + A$ , т. е.  $A = U_0 - E_0$ . Окончательное решение имеет вид

$$u_C(t) = U_0 \exp\left(-\frac{t}{RC}\right) + E_0 \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{RC}\right)\right]. \quad (8.7)$$

Видно, что процесс в цепи есть сумма двух независимых компонентов по числу слагаемых в правой части формулы (8.7). Первое слагаемое описывает свободную разрядку конденсатора в цепи без источника. Второе слагаемое отвечает вынужденному процессу — зарядке конденсатора, имеющего нулевое начальное напряжение, от источника постоянной ЭДС через резистор.

На рис. 8.1,б изображена осциллограмма нестационарного напряжения на конденсаторе, имеющая место при нулевых начальных условиях ( $U_0=0$ ). Кривая рассчитана по формуле

$$u_C(t) = E_0 [1 - \exp(-t/(RC))]. \quad (8.8)$$

Данное напряжение стремится к стационарному значению  $u_C(\infty) = E_0$ . Время установления, за которое напряжение достигает уровня  $0,9 E_0$ , составляет  $t_{уст} = 2,303 RC$  (гл. 7).

Чтобы создавать импульсные устройства с высоким быстродействием, нужно стремиться сокращать как значения паразитных емкостей, так и номиналы тех резисторов, через которые осуществляется их зарядка. Пусть, например  $R = 0,68 \text{ кОм}$ ,  $C = 25 \text{ пФ}$ . Тогда  $t_{уст} = 2,303 \cdot 680 \cdot 25 \cdot 10^{-11} = 3,9 \cdot 10^{-8} \text{ с} \approx 0,04 \text{ мкс}$ . Ясно, что такая цепь непригодна для неискаженного воспроизведения импульсов наносекундной длительности.

Если начальное условие нулевое, то напряжение на резисторе при  $t > 0$

$$u_R(t) = E_0 - u_C(t) = E_0 \exp(-t/(RC)). \quad (8.9)$$

Соответствующий график приведен на рис. 8.1,в. Данное напряжение пропорционально зарядному току конденсатора  $i(t) = = u_R(t)/R$ .

Необходимо отметить, что напряжение на конденсаторе при нестационарном процессе всегда *непрерывно* во времени. Дело в том, что скачкообразное изменение этого напряжения в соответствии с равенств. м

$$u_C(t) = \frac{1}{C} \int i(\xi) d\xi$$

потребовало бы бесконечно большого импульса тока за исчезающе малый интервал времени, что физически нереализуемо.

**Влияние начального условия.** Для случая  $U_0 \neq 0$  формулу (8.7) удобно переписать так:

$$u_C(t) = E_0 + (U_0 - E_0) \exp(-t/\tau). \quad (8.10)$$

Здесь и в дальнейшем  $\tau = RC$  — постоянная времени данной цепи.

Видно, что при любом значении  $U_0$  выходное напряжение на конденсаторе стремится к стационарному уровню  $E_0$ . Кривая 1 на рис. 8.2,а соответствует случаю  $U_0 > E_0$ , кривая 2 — случаю  $U_0 < E_0$ .

Ток в цепи также связан с начальным условием:

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = \frac{E_0 - U_0}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (8.11)$$

Соответствующие графики изображены на рис. 8.2,б. Если  $U_0 > E_0$  (кривая 1), то ток во все моменты времени отрицателен. Это означает, что предварительно заряженный конденсатор в ходе нестационарного процесса разряжается через источник ЭДС. Если же  $U_0 <$

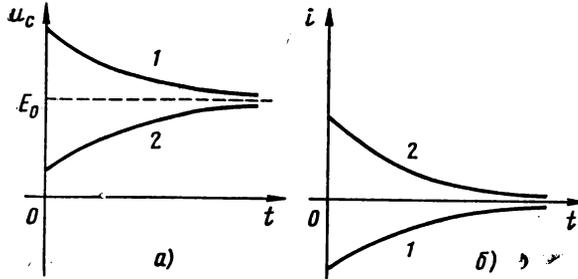


Рис. 8.2. Переходный процесс в  $RC$ -цепи при ненулевом начальном условии: а — временные диаграммы напряжения на конденсаторе; б — временные диаграммы тока

$< E_0$  (кривая 2), то ток положителен; имеет место зарядка конденсатора.

**Воздействие скачка ЭДС на последовательную  $RL$ -цепь.** Изучим переходный процесс в цепи, схема которой изображена на рис. 8.3,а, при действии на входе скачкообразного источника ЭДС ви-

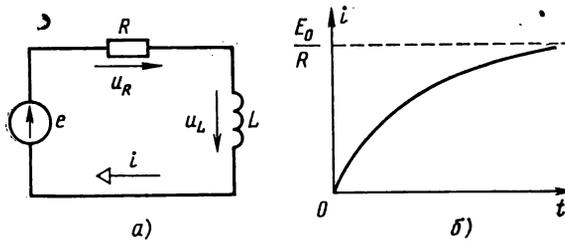


Рис. 8.3. Переходный процесс в  $RL$ -цепи: а — схема цепи; б — временная диаграмма тока

да  $e(t) = E_0 \sigma(t)$ . В качестве независимой переменной здесь удобно выбрать ток  $i(t)$ ; на основании равенства  $u_L + u_R = e$  имеем следующее дифференциальное уравнение

$$L \frac{di}{dt} + Ri = E_0 \sigma(t), \quad (8.12)$$

которое следует дополнить начальным условием

$$i|_{t=0} = I_0, \quad (8.13)$$

где  $I_0$  — ток, который определяет начальный запас энергии в индуктивном элементе.

Методика решения начальной задачи (8.12) — (8.13) остается прежней. Вынужденная составляющая тока — это тот ток, который установится в стационарном режиме, когда ЭДС самоиндукции станет пренебрежимо малой. Понятно, что

$$i_{\text{вын}}(t) = E_0/R = \text{const}. \quad (8.14)$$

Свободная составляющая тока представляет собой общее решение однородного дифференциального уравнения

$$L di_{св}/dt + Ri_{св} = 0,$$

имеющее вид

$$i_{св}(t) = A \exp(-t/\tau), \quad (8.15)$$

где  $\tau = L/R$  — постоянная времени  $RL$ -цепи;  $A$  — произвольная постоянная.

Для того, чтобы функция

$$i(t) = E_0/R + A \exp(-t/\tau)$$

удовлетворяла условию (8.13), необходимо выбрать  $A = I_0 - E_0/R$ . Поэтому окончательный вид решения поставленной задачи Коши таков:

$$i(t) = I_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{E_0}{R} \left[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]. \quad (8.16)$$

На рис. 8.3,б приведена осциллограмма тока, наблюдаемого в  $RL$ -цепи при переходном процессе с нулевым начальным условием ( $I_0 = 0$ ). Ток изменяется монотонно и достигает уровня  $0,9 E_0/R$  за время установления  $t_{уст} = 2,303 \tau = 2,303 L/R$ .

С конечной длительностью переходного процесса в  $RL$ -цепи приходится считаться, создавая высокоскоростные импульсные устройства. Дело в том, что реальные цепи имеют некоторую паразитную индуктивность, которая влияет на длительность фронта импульсного колебания в цепи. Если, например,  $L = 0,1$  мкГн,  $R = 20$  Ом, то  $t_{уст} = 2,303 \cdot 10^{-7} / 20 = 1,15 \cdot 10^{-8}$  с. Ясно, что такую цепь не следует применять в конструкции быстродействующего компьютера с тактовой частотой порядка 10 МГц или выше.

Отметим в заключение, что в нестационарном режиме ток в индуктивном элементе всегда непрерывен. Это связано с тем, что скачкообразное изменение тока привело бы к бесконечно большому значению ЭДС самоиндукции.

## 8.2. ВОЗДЕЙСТВИЕ ИСТОЧНИКА СТУПЕНЧАТОГО СИГНАЛА НА ЦЕПИ ВТОРОГО ПОРЯДКА

Более разнообразными оказываются переходные процессы в цепях, описываемых линейными дифференциальными уравнениями второго порядка с постоянными коэффициентами.

**Воздействие скачка ЭДС на последовательный колебательный контур.** Рассмотрим колебательный  $LCR$ -контур (рис. 8.4,а), возбуждаемый источником ЭДС вида  $e(t) = E_0 \sigma(t)$ .

Успешность анализа нестационарного процесса в цепи часто определяется удачным выбором той динамической переменной, относительно которой составляется дифференциальное уравнение. В

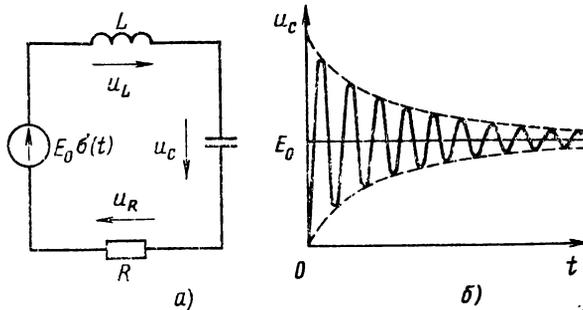


Рис. 8.4. Переходный процесс в последовательном колебательном контуре: а — схема цепи; б — временная диаграмма напряжения на конденсаторе

данном случае целесообразно в качестве такой переменной взять напряжение  $u_C$  на конденсаторе контура. При этом ток  $i = C du_C/dt$ , а напряжения на остальных элементах

$$u_R = Ri = RC \, du_C/dt;$$

$$u_L = L di/dt = LC d^2 u_C/dt^2.$$

Дифференциальное уравнение рассматриваемой цепи записывается в виде

$$LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E_0 \sigma(t)$$

или

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E_0 \sigma(t), \quad (8.17)$$

где  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  — частота собственных колебаний в контуре без потерь;  $\alpha = R/(2L)$  — коэффициент затухания.

Исходное состояние цепи задано, если известны значения  $u_C(0) = U_0$  и  $i(0) = I_0$ . Таким образом, уравнению (8.17) должны быть сопоставлены два начальных условия, накладываемые на искомую функцию и на ее производную:

$$u_C|_{t=0} = U_0, \quad (8.18)$$

$$du_C/dt|_{t=0} = I_0/C. \quad (8.19)$$

Равенства (8.17) — (8.19) формулируют задачу Коши, решение которой полностью описывает переходный процесс в последовательном колебательном контуре.

Ступенчатый характер входного сигнала позволяет сразу записать одно из частных решений неоднородного уравнения (8.17)

$$u_{C \text{ вын}}(t) = E_0 = \text{const}. \quad (8.20)$$

Действительно, по истечении достаточного промежутка времени любые нестационарные колебания в контуре с потерями затухнут, и конденсатор окажется заряженным до напряжения входного источника.

Задача о собственных колебаниях в контуре с потерями рассматривалась ранее в гл. 7. Полученные результаты позволяют искать общее решение однородного дифференциального уравнения в виде

$$u_{с\text{св}}(t) = A_1 \exp(\gamma_1 t) + A_2 \exp(\gamma_2 t), \quad (8.21)$$

где  $A_{1,2}$  — произвольные постоянные,  $\gamma_{1,2}$  — корни характеристического уравнения задачи.

Представив искомое решение задачи Коши в форме

$$u_c(t) = E_0 + A_1 \exp(\gamma_1 t) + A_2 \exp(\gamma_2 t)$$

и воспользовавшись начальными условиями, приходим к следующей системе алгебраических уравнений относительно неизвестных  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{aligned} E_0 + A_1 + A_2 &= U_0, \\ \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 &= I_0/C, \end{aligned} \quad (8.22)$$

откуда легко находим

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{\gamma_2(U_0 - E_0) - I_0/C}{\gamma_2 - \gamma_1}, \\ A_2 &= \frac{\gamma_1(U_0 - E_0) - I_0/C}{\gamma_1 - \gamma_2}. \end{aligned} \quad (8.23)$$

В прикладном отношении наиболее значим случай колебательного контура с малыми потерями, когда  $\gamma_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_c$ , где  $\omega_c = \sqrt{\omega^2_0 - \alpha^2}$  — частота собственных колебаний с учетом затухания (гл. 7). При этом  $\gamma_1 - \gamma_2 = j2\omega_c$ , так что

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{(\alpha + j\omega_c)(U_0 - E_0) - I_0/C}{j2\omega_c}, \\ A_2 &= \frac{(-\alpha + j\omega_c)(U_0 - E_0) - I_0/C}{j2\omega_c}. \end{aligned}$$

Выполнив некоторые алгебраические преобразования с использованием формул Эйлера, получаем окончательное решение задачи

$$\begin{aligned} u_c(t) &= E_0 + e^{-\alpha t} \left\{ (U_0 - E_0) \cos \omega_c t + \right. \\ &\left. + \frac{1}{\omega_c} \left[ \frac{I_0}{C} + \alpha(U_0 - E_0) \right] \sin \omega_c t \right\}. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Особенно простой вид данная формула имеет при нулевых начальных условиях, когда  $U_0 = I_0 = 0$ :

$$u_C(t) = E_0 \left[ 1 - e^{-\alpha t} \left( \cos \omega_c t + \frac{\alpha}{\omega_c} \sin \omega_c t \right) \right]. \quad (8.25)$$

Можно заметить, что высокочастотный множитель, стоящий в круглых скобках, содержит два слагаемых, которые сдвинуты по фазе на  $90^\circ$  друг относительно друга. При этом, если добротность контура достаточно велика и  $\alpha/\omega_c \ll 1$ , то синусоидальным слагаемым можно пренебречь и записать, что

$$u_C(t) = E_0 [1 - \exp(-\alpha t) \cos \omega_0 t]. \quad (8.26)$$

Соответствующий график изображен на рис. 8.4,б. Интересно и важно заметить, что в начале переходного процесса, когда множитель  $\exp(-\alpha t)$  весьма близок к единице, амплитуда (размах) высокочастотного колебания практически равна значению  $E_0$ .

Для оценки длительности переходного процесса в контуре вводят понятие времени установления  $t_{уст} = 4,606 Q/\omega_0$  (гл. 7).

**Пример 8.1.** Последовательный колебательный контур имеет параметры:  $Q = 125$ ,  $\omega_0 = 5,5 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}$ . Контур возбуждается за счет скачкообразного включения источника ЭДС  $E_0 = 15 \text{ В}$ . Начальные условия нулевые. Определить промежуток времени  $t_0$ , по истечении которого амплитуда высокочастотного колебания на конденсаторе станет равной  $3 \text{ В}$ .

Постоянная времени данного контура  $\tau_k = 2Q/\omega_0 = 250/(5,5 \cdot 10^6) = 4,54 \cdot 10^{-5} \text{ с}$ ; коэффициент затухания  $\alpha = 1/\tau_k = 2,2 \cdot 10^4 \text{ с}^{-1}$ . В соответствии с формулой (8.26) мгновенные значения амплитуды (огibaющей) процесса изменяются по закону  $E_0 \exp(-\alpha t)$ , откуда следует уравнение  $15 \exp(-2,2 \cdot 10^4 t_0) = 3$ . Решив это уравнение, находим, что  $t_0 = (-\ln 0,2)/(2,2 \cdot 10^4) = 7,31 \cdot 10^{-5} \text{ с} = 73,1 \text{ мкс}$ . За это время происходит примерно 64 полных периода собственных колебаний контура.

**Воздействие скачка ЭДС на трансформатор с резистивной нагрузкой.** Еще одним примером цепи второго порядка служит трансформатор, нагруженный на резистор с сопротивлением  $R_H$  (рис. 8.5) Будем считать, что генератор сигнала на входе имеет ЭДС вида  $e(t) = E_0 \delta(t)$  и активное внутреннее сопротивление  $R_r$ .

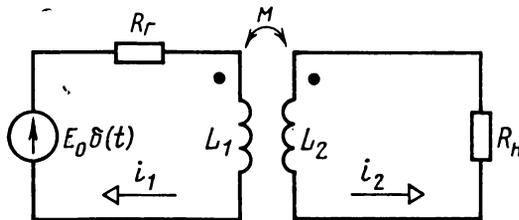


Рис. 8.5. Трансформатор с резистивной нагрузкой

Пусть токи  $i_1$  и  $i_2$  ориентированы вдоль контуров так, как это показано на рисунке, а катушки  $L_1$  и  $L_2$  включены согласно. По второму закону Кирхгофа можно записать следующую систему линейных дифференциальных уравнений относительно токов, справедливую при  $t > 0$

$$L_1 \frac{d i_1}{d t} + R_r i_1 + M \frac{d i_2}{d t} = E_0, \quad (8.27)$$

$$L_2 \frac{d i_2}{d t} + R_n i_2 + M \frac{d i_1}{d t} = 0.$$

Перекрестные члены в каждом из уравнений этой системы учитывают взаимное влияние одного контура на другой.

Выберем следующий путь исследования данной цепи — сведем систему (8.27) к одному дифференциальному уравнению второго порядка относительно тока  $i_1$  в первом контуре. Для этого сначала продифференцируем оба уравнения по времени

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{d t^2} + R_r \frac{d i_1}{d t} + M \frac{d^2 i_2}{d t^2} = 0, \quad (8.28)$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{d t^2} + R_n \frac{d i_2}{d t} + M \frac{d^2 i_1}{d t^2} = 0.$$

Из первого уравнения системы (8.28) определяем

$$\frac{d^2 i_2}{d t^2} = - \frac{L_1}{M} \frac{d^2 i_1}{d t^2} - \frac{R_r}{M} \frac{d i_1}{d t}, \quad (8.2)$$

а из первого уравнения системы (8.27) находим

$$\frac{d i_2}{d t} = \frac{E_0}{M} - \frac{L_1}{M} \frac{d i_1}{d t} - \frac{R_r}{M} i_1. \quad (8.30)$$

Подставляя выражения (8.29) и (8.30) во второе уравнение из системы (8.28), получаем дифференциальное уравнение, эквивалентное исходной системе

$$(L_1 L_2 - M^2) \frac{d^2 i_1}{d t^2} + (L_1 R_n + L_2 R_r) \frac{d i_1}{d t} + R_n R_r i_1 = R_n E_0. \quad (8.31)$$

Целесообразно ввести вспомогательные параметры:  $k_c = M/\sqrt{L_1 L_2}$  — коэффициент связи трансформатора,  $\tau_1 = L_1/R_r$  и  $\tau_2 = L_2/R_n$  — постоянные времени первичного и вторичного контуров соответственно. Тогда уравнение (8.31) примет следующий вид

$$(1 - k_c^2) \frac{d^2 i_1}{d t^2} + \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \frac{d i_1}{d t} + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} i_1 = \frac{E_0}{L_1 \tau_2}. \quad (8.32)$$

Для того, чтобы сформулировать задачу Коши, предположим, что начальный запас энергии в системе отсутствует и поэтому

$$i_1|_{t=0} = i_2|_{t=0} = 0. \quad (8.33)$$

Тогда в соответствии с равенствами (8.27) в момент времени  $t=0$  между производными от токов имеют место соотношения

$$\begin{aligned} L_1 \frac{d i_1}{d t} + M \frac{d i_2}{d t} &= E_0, \\ L_2 \frac{d i_2}{d t} + M \frac{d i_1}{d t} &= 0, \end{aligned}$$

из которых видно, что

$$\left. \frac{d i_1}{d t} \right|_{t=0} = \frac{E_0}{L_1(1-k_c^2)}. \quad (8.34)$$

Итак, задача Коши задается формулами (8.32) — (8.34).

Как и ранее, целесообразно начать с поиска такого вынужденного решения уравнения (8.31) или (8.32), которое отвечает стационарному состоянию системы. Обратившись к схеме на рис. 8.5, легко видеть, что

$$i_{1 \text{ вын}}(t) = E_0/R_r = \text{const}, \quad (8.35)$$

так как именно такой постоянный ток установится в первичной цепи трансформатора спустя достаточное время после момента включения.

Собственные колебания в цепи описываются решениями уравнения (8.32) с нулевой правой частью и имеют вид

$$i_{1 \text{ соб}}(t) = A_1 \exp(\gamma_1 t) + A_2 \exp(\gamma_2 t). \quad (8.36)$$

Здесь  $A_{1,2}$  — произвольные постоянные,  $\gamma_{1,2}$  — корни характеристического уравнения

$$(1-k_c^2) \gamma^2 + \left( \frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) \gamma + \frac{1}{\tau_1 \tau_2} = 0. \quad (8.37)$$

Применив начальные условия (8.33) и (8.34) к равенству (8.36), получаем следующую систему линейных уравнений относительно постоянных  $A_1$  и  $A_2$ :

$$\begin{aligned} A_1 + A_2 &= -E_0/R_r, \\ \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 &= E_0/[L_1(1-k_c^2)]. \end{aligned}$$

Данная система имеет очевидное решение

$$\begin{aligned} A_1 &= \frac{E_0}{\gamma_1 - \gamma_2} \left[ \frac{1}{L_1(1-k_c^2)} + \frac{\gamma_2}{R_r} \right], \\ A_2 &= \frac{E_0}{\gamma_2 - \gamma_1} \left[ \frac{1}{L_1(1-k_c^2)} + \frac{\gamma_1}{R_r} \right]. \end{aligned}$$

Подставив эти результаты в формулу (8.36), находим окончательное выражение для тока в первом контуре:

$$i_1(t) = \frac{E_0}{R_r} + \frac{E_0}{\gamma_1 - \gamma_2} \times \\ \times \left\{ \left[ \frac{1}{L_1(1-k_c^2)} + \frac{\gamma_2}{R_r} \right] e^{\gamma_1 t} - \left[ \frac{1}{L_1(1-k_c^2)} + \frac{\gamma_1}{R_r} \right] e^{\gamma_2 t} \right\}. \quad (8.38)$$

Для того чтобы изучить изменение формы сигнала при прохождении его через цепь с индуктивной связью, следует, прежде всего, найти ток  $i_2$  во втором контуре. Воспользовавшись формулой (8.30), подставим ее во второе уравнение из системы (8.27). При этом получим

$$i_2(t) = \frac{R_r L_2}{MR_H} i_1 + \frac{1}{MR_H} (L_1 L_2 - M^2) \frac{d i_1}{dt} - \frac{L_2 E_0}{MR_H}.$$

Если теперь найти производную по времени от тока  $i_1$ , определяемого равенством (8.38), то после довольно громоздких выкладок будем иметь

$$i_2(t) = \frac{R_r L_2 E_0}{MR_H(\gamma_1 - \gamma_2)} \left\{ \left[ \frac{1}{L_1(1-k_c^2)} + \frac{\gamma_2}{R_r} \right] e^{\gamma_1 t} - \right. \\ \left. - \left[ \frac{1}{L_1(1-k_c^2)} + \frac{\gamma_1}{R_r} \right] e^{\gamma_2 t} \right\} + \frac{L_1 L_2 (1-k_c^2) E_0}{MR_H(\gamma_1 - \gamma_2)} \times \\ \times \left\{ \gamma_1 \left[ \frac{1}{L_1(1-k_c^2)} + \frac{\gamma_2}{R_r} \right] e^{\gamma_1 t} - \gamma_2 \left[ \frac{1}{L_1(1-k_c^2)} + \frac{\gamma_1}{R_r} \right] e^{\gamma_2 t} \right\}. \quad (8.39)$$

Получение формул (8.38) и (8.39) потребовало настойчивости и известного навыка математических преобразований. Анализ этих формул в общем виде довольно затруднителен. Поэтому обратимся к исследованию конкретной цепи.

**Пример 8.2.** Имеется цепь с двумя индуктивно связанными катушками (рис. 8.5). В момент времени  $t=0$  цепь возбуждается со стороны первичной обмотки источником скачкообразной ЭДС вида  $e(t)=100\sigma(t)$  В. Параметры цепи:  $L_1=L_2=3$  мГн,  $R_r=50$  Ом,  $R_H=600$  Ом,  $k_c=0,5$ . Рассчитать и построить графики токов  $i_1(t)$  и  $i_2(t)$ . Найти амплитуду импульса напряжения на резисторе нагрузки.

Прежде всего, находим значение постоянных времени  $\tau_1=L_1/R_r=6 \cdot 10^{-5}$  с,  $\tau_2=L_2/R_H=5 \cdot 10^{-6}$  с. Обращаем внимание на то, что эти постоянные времени различаются примерно на порядок.

При заданных параметрах цепи характеристическое уравнение (8.37) приобретает вид

$$\gamma^2 + 2,888 \cdot 10^5 \gamma + 4,444 \cdot 10^9 = 0.$$

Это уравнение имеет два вещественных отрицательных корня:  $\gamma_1 = -1,63 \cdot 10^4$  с<sup>-1</sup>,  $\gamma_2 = -2,725 \cdot 10^5$  с<sup>-1</sup>. Подстановка численных значений корней в формулы

(8.38) и (8.39) приводит к следующим расчетным формулам (время измеряется в секундах, а ток — в амперах):

$$i_1 = 2 - 3,9 \cdot 10^4 [5005,5 \exp(-1,63 \cdot 10^4 t) + 118,4 \exp(-2,725 \cdot 10^5 t)];$$

$$i_2(t) = 8,67 \cdot 10^{-2} [\exp(-2,725 \cdot 10^5 t) - \exp(-1,63 \cdot 10^4 t)].$$

На рис. 8.6 изображена рассчитанная осциллограмма тока  $i_1$ , на рис. 8.7 — осциллограмма тока  $i_2$ . Видно, что ток  $i_1$  плавно стремится к стационарному значению 2 А. Поведение этого тока мало отличается от поведения тока в простой  $RL$ -цепи при том же источнике возбуждения. Гораздо интереснее кривая, описывающая ток  $i_2$  — здесь имеется участок быстрого изменения (фронт импульса), вслед за которым располагается область сравнительно медленного изменения. При этом быстрое движение в цепи имеет характерный временной масштаб, равный  $\tau_2$ ; оценкой длительности медленной стадии процесса является постоянная времени  $\tau_1$ . Ток  $i_2$  отрицателен; это означает, что ЭДС, индуцированная во втором контуре, обуславливает более высокий потенциал *верхнего зажима* катушки  $L_2$  по сравнению с потенциалом нижнего зажима. В результате фактически ток  $i_2$  направлен в сторону, противоположную той, которая выбрана изначально в качестве положительной.

Из рис. 8.7 видно, что импульсное значение модуля тока составляет приблизительно 70 мА, поэтому на резисторе с сопротивлением 600 Ом будет наблюдаться импульс напряжения с амплитудой 42 В.

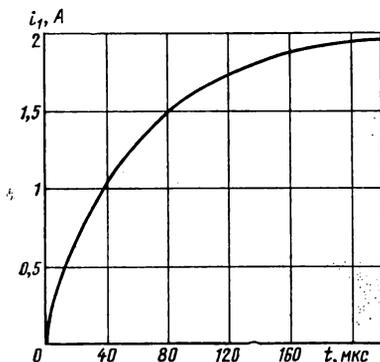


Рис. 8.6. Временная диаграмма тока в первичной обмотке трансформатора

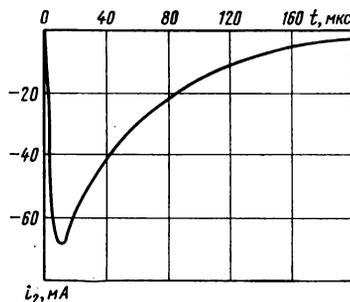


Рис. 8.7. Временная диаграмма тока во вторичной обмотке трансформатора

### 8.3. ВОЗДЕЙСТВИЕ ИСТОЧНИКА ПРОИЗВОЛЬНОГО ВИДА НА ЛИНЕЙНУЮ ЦЕПЬ

Изученные в предыдущих параграфах задачи о воздействии на линейные цепи источников со скачкообразным изменением мгновенных значений вводят в круг методов анализа нестационарных процессов в цепях, однако никак не исчерпывают всего разнообразия ситуаций, встречающихся в радиотехнике и смежных областях.

Один из ключевых этапов исследования — поиск частного решения неоднородного уравнения, выполнялся до сих пор, по сути дела, нематематическими приемами, основанными на физических представлениях о характере установившегося режима в цепи. Однако в теории дифференциальных уравнений существует регулярный метод, называемый *вариацией произвольных постоянных*, который позволяет находить решения неоднородных уравнений в самой общей постановке.

Рассмотрим этот метод и его конкретные применения.

**Воздействие источника ЭДС произвольного вида на последовательную RC-цепь.** Предположим, что в RC-цепи, схема которой была приведена на рис. 8.1, ЭДС источника напряжения изменяется во времени некоторым произвольным образом. Чтобы получить частное решение дифференциального уравнения такой цепи [см. формулу (8.2)]

$$\tau \frac{d u_C}{dt} + u_C = e(t), \quad (8.40)$$

попытаемся искать это решение в виде произведения неизвестной пока функции  $F(t)$  на функцию  $\exp(-t/\tau)$ , которая заведомо служит решением соответствующего однородного уравнения:

$$u_C(t) = F(t) \exp(-t/\tau). \quad (8.41)$$

В этом приеме и состоит сущность метода вариации.

Если выражение (8.41) подставить в уравнение (8.40), то слагаемые, содержащие саму функцию  $F(t)$  в левой части, сократятся, так что

$$\tau \frac{dF}{dt} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = e(t).$$

Значит,

$$\frac{dF}{dt} = \frac{1}{\tau} e(t) \exp\left(\frac{t}{\tau}\right),$$

откуда

$$F(t) = \frac{1}{\tau} \int_a^t e(\xi) \exp\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi, \quad (8.42)$$

где  $a$  — любое фиксированное число, выбор которого диктуется удобством расчетов. Ясно, однако, что если  $e(t)$  — импульсное колебание, то точка с координатой  $a$  на оси времени *не должна оказаться правее точки начала импульса*. В частности, если входной сигнал начинается в момент времени  $t=0$ , то следует положить  $a=0$ .

Таким образом, в соответствии с формулой (8.41) искомое решение таково:

$$u_C(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e(\xi) \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau}\right) d\xi. \quad (8.43)$$

Важно отметить, что если ищется решение при нулевом начальном условии, то формула (8.43) удовлетворяет этому требованию *автоматически*. Рассмотрим некоторые примеры.

Возбуждение  $RC$ -цепи источником линейно нарастающей ЭДС. Будем полагать, что  $e(t) = Vt\sigma(t)$ , где  $V$  — параметр с размерностью В/с, который характеризует скорость нарастания входного сигнала. Воспользовавшись формулой (8.43), находим закон изменения напряжения на конденсаторе при нулевом начальном условии:

$$u_C(t) = \frac{V}{\tau} \left[ \int_0^t \xi \exp\left(-\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right).$$

В интеграле полезно сделать подстановку  $x = \xi/\tau$  и записать

$$u_C(t) = V\tau \left[ \int_0^{t/\tau} x \exp(x) dx \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (8.44)$$

Интегрируя по частям, имеем

$$\int_0^{t/\tau} x \exp(x) dx = \left(\frac{t}{\tau} - 1\right) \exp\left(\frac{t}{\tau}\right) + 1.$$

Если теперь подставить этот результат в выражение (8.44), то приходим к следующей формуле

$$u_C(t) = V\tau \left[ \frac{t}{\tau} - 1 + \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (8.45)$$

На рис. 8.8,а изображена зависимость нормированного напряжения  $u_C/(V\tau)$  от безразмерного отношения  $t/\tau$ . Отметим, что если  $t/\tau \gg 1$ , то экспоненциальный член в равенстве (8.45) становится

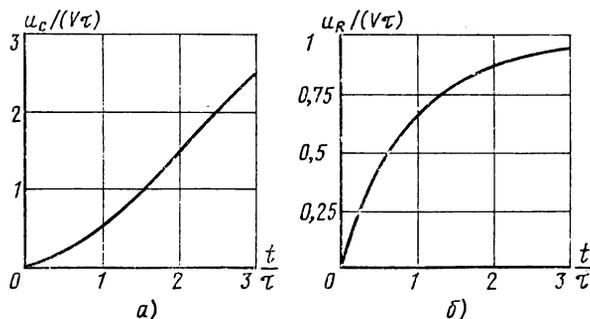


Рис. 8.8. Временные диаграммы напряжений на элементах  $RC$ -цепи, возбуждаемой источником линейно нарастающей ЭДС:

а — на конденсаторе; б — на резисторе

пренебрежимо малым. Напряжение на выходе изменяется по линейному закону

$$u_C(t) \approx V(t - \tau) \quad (8.46)$$

с той же скоростью, что и напряжение на входе, будучи, однако, сдвинутым на  $\tau$  секунд в сторону запаздывания.

Напряжение на резисторе  $RC$ -цепи

$$u_R(t) = e(t) - u_C(t) = V\tau[1 - \exp(-t/\tau)]. \quad (8.47)$$

График отношения  $u_R/(V\tau)$  представлен на рис. 8.8, б. Если  $t/\tau \gg 1$ , то  $u_R \approx V\tau = \text{const}$ . Это значит, что по окончании начальной стадии нестационарного процесса в цепи устанавливается практически постоянный ток  $i = u_R/R = VC$ , значение которого не зависит от сопротивления резистора.

Возбуждение  $RC$ -цепи экспоненциальным импульсом ЭДС. На практике часто приходится иметь дело с входным сигналом вида  $e(t) = E_0 \exp(-\beta t) \sigma(t)$ , где  $\beta > 0$  — некоторая постоянная с размерностью  $\text{с}^{-1}$ . Подобное колебание (рис. 8.9, а) называют экспоненциальным импульсом, начинающимся в момент времени  $t = 0$ .

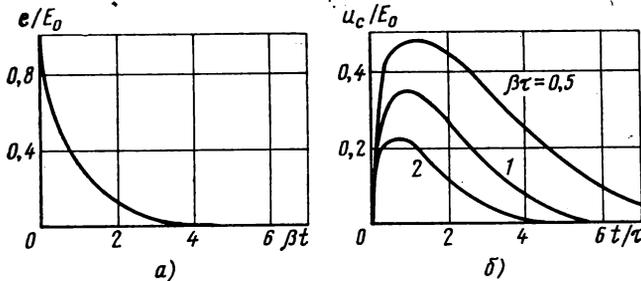


Рис. 8.9. Нестационарный процесс в  $RC$ -цепи, возбуждаемой экспоненциальным импульсом ЭДС:

а — входной сигнал; б — временные диаграммы напряжения на конденсаторе при различных значениях параметра  $\beta\tau$

Чтобы найти напряжение на конденсаторе  $RC$ -цепи при подаче на ее вход такого импульса ЭДС, обратимся снова к формуле (8.43):

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{E_0}{\tau} \int_0^t \exp(-\beta\xi) \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau}\right) d\xi = \\ &= \frac{E_0}{\tau} \left\{ \int_0^t \exp\left[\left(\frac{1}{\tau} - \beta\right)\xi\right] d\xi \right\} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \end{aligned}$$

Выполнив элементарное интегрирование, приходим к следующему результату:

$$u_C(t) = E_0 \frac{\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - \exp(-\beta t)}{\beta\tau - 1}. \quad (8.48)$$

Следует заметить, что при  $\beta = 1/\tau$  в выражении (8.48) возникает неопределенность типа 0/0. Раскрывая ее по правилу Лопиталя, находим, что в этом частном случае

$$u_C(t) = E_0 \frac{t}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \quad (8.49)$$

На рис. 8.8,б изображен ряд кривых, построенных по формулам (8.48) и (8.49) при различных значениях параметра  $\beta\tau$ . Следует обратить внимание на то, что из-за инерционных свойств  $RC$ -цепи происходит сглаживание импульса, а также задержка его во времени по отношению ко входному импульсному колебанию.

**Пример 8.3.** Имеется  $RC$ -цепь с постоянной времени  $\tau = 3 \cdot 10^{-6}$  с. Ко входу цепи приложен экспоненциальный импульс ЭДС, длительность  $\tau_n$  которого, определяемая по спаду мгновенного значения сигнала в 10 раз относительно первоначального уровня, составляет  $5 \cdot 10^{-6}$  с. Определить момент времени  $t_0$ , в который напряжение на конденсаторе достигает максимума.

Параметр  $\beta$  находим из равенства  $\beta\tau_n = 2,303$ , откуда  $\beta = 4,606 \cdot 10^5$  с $^{-1}$ . В точке  $t_0$  производная от функции, стоящей в числителе формулы (8.48), обращается в нуль, поэтому величина  $t_0$  должна быть корнем уравнения

$$-\frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t_0}{\tau}\right) + \beta \exp(-\beta t_0) = 0.$$

Подставив сюда числовые значения  $\beta$  и  $\tau$ , находим, что  $t_0 = 2,53 \cdot 10^{-6}$  с = 2,53 мкс. Таким образом, максимальный отклик на выходе будет наблюдаться приблизительно в середине отрезка времени существования сигнала на входе.

**Возбуждение  $RC$ -цепи импульсом ЭДС конечной длительности.** Только что рассмотренный экспоненциальный импульс, строго говоря, имеет неограниченную протяженность во времени. Импульсным колебанием в узком смысле называют сигнал *конечной длительности*, который начинается, скажем, при  $t=0$  и оканчивается в момент времени  $t=\tau_n$ . Иными словами, функция  $e(\xi)$  в формуле (8.43) обращается в нуль при  $\xi > \tau_n$ . Это дает возможность записать данную формулу так:

при  $0 < t < \tau_n$

$$u_C(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^t e(\xi) \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau}\right) d\xi; \quad (8.50)$$

при  $t > \tau_n$

$$u_C(t) = \frac{1}{\tau} \int_0^{\tau_n} e(\xi) \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau}\right) d\xi. \quad (8.51)$$

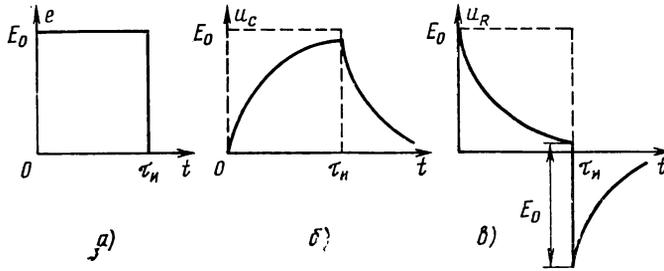


Рис. 8.10. Воздействие прямоугольного импульса ЭДС на  $RC$ -цепь: а — сигнал на входе; б, в — временные диаграммы напряжений на конденсаторе и резисторе

Пусть, например,  $RC$ -цепь возбуждается импульсом ЭДС прямоугольной формы (рис. 8.10,а), который представляет собой разность двух функций включения, сдвинутых по времени на отрезок  $\tau_n$ . Используя формулы (8.50) и (8.51), получаем, что при  $0 < t \leq \tau_n$

$$u_C(t) = \frac{E_0}{\tau} \left[ \int_0^t \exp\left(-\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = E_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]. \quad (8.52)$$

После окончания импульса на входе, при  $t > \tau_n$

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{E_0}{\tau} \left[ \int_0^{\tau_n} \exp\left(-\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \\ &= E_0 \left[ \exp\left(-\frac{\tau_n}{\tau}\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \\ &= E_0 \left[ 1 - \exp\left(-\frac{\tau_n}{\tau}\right) \right] \exp\left(-\frac{t - \tau_n}{\tau}\right). \end{aligned} \quad (8.53)$$

Соответствующий график изображен на рис. 8.10,б.

Напряжение на резисторе  $u_R = e(t) - u_C(t)$ , т. е. при  $0 < t \leq \tau_n$

$$u_R(t) = E_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right); \quad (8.54)$$

при  $t > \tau_n$

$$u_R(t) = E_0 \left[ \exp\left(-\frac{\tau_n}{\tau}\right) - 1 \right] \exp\left(-\frac{t - \tau_n}{\tau}\right). \quad (8.55)$$

Результаты расчетов по формулам (8.54) и (8.55) представлены на рис. 8.10,в.

Следует отметить, что напряжение на резисторе представляет собой разрывную функцию. В моменты начала и окончания входного импульса это напряжение скачком изменяется на величину  $E_0$ ; при  $t > \tau_n$  напряжение  $u_R$  отрицательно, так как направления зарядного и разрядного токов конденсатора противоположны.

#### 8.4. ОПЕРАТОРНЫЙ МЕТОД ИССЛЕДОВАНИЯ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ ПРОИЗВОЛЬНОГО ПОРЯДКА

Обобщая предыдущие результаты, можно утверждать, что для анализа нестационарного процесса в линейной цепи  $n$ -го порядка необходимо решить неоднородное дифференциальное уравнение вида

$$\frac{d^n x}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} x}{dt^{n-1}} + \dots + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \quad (8.56)$$

относительно некоторой выбранной динамической переменной  $x$ . Такой переменной может служить, например, ток или напряжение на каком-либо участке цепи, а также любая линейная комбинация токов и (или) напряжений.

Коэффициенты уравнения  $\{a_{n-1}, \dots, a_1, a_0\}$  являются постоянными вещественными числами. Уравнению (8.56) нужно сопоставить  $n$  начальных условий, которые задают значение функции  $x(t)$  и ее  $n-1$  производной при  $t=0$ . Правая часть  $f(t)$  уравнения описывает действие возбуждающего источника сигнала. Часто можно полагать, что до начала действия источника цепь находилась в состоянии покоя. При этом все начальные условия должны быть нулевыми.

Чтобы найти решение задачи Коши для уравнения (8.56), можно воспользоваться описанным ранее методом вариации постоянных. Однако процедура решения получается при этом достаточно громоздкой [6]. Гораздо быстрее приводит к цели *операторный метод* решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, созданный, главным образом, крупным английским ученым Оливером Хевисайдом.

В основе этого метода лежит понятие дифференциального оператора

$$p = \frac{d}{dt}, \quad (8.57)$$

который выступает как некоторый абстрактный символ. Говорят, что оператор  $p$  *действует* на ту функцию, которая записывается правее него. Например,  $px = dx/dt$ . Оператор  $p$  является линейным, и его действия сочетаются между собой и с постоянными величинами таким же точно образом, как будто эти символы являются обычными алгебраическими множителями. Так, в частности,

$$\begin{aligned} (p+3)x &= px + 3x = \frac{dx}{dt} + 3x; \\ (p+1)(p+2)x &= (p+1)(px + 2x) = \\ p(px + 2x) + px + 2x &= p^2x + 2px + px + 2x = \\ &= \frac{d^2x}{dt^2} + 3 \frac{dx}{dt} + 2x \end{aligned}$$

и т. д.

Дифференциальное уравнение (8.56), записанное в символической операторной форме, приобретает вид

$$(p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0)x = f(t) \quad (8.58)$$

и формально становится алгебраическим равенством

$$\Phi_n(p)x = f(t), \quad (8.59)$$

где  $\Phi_n(p)$  — многочлен  $n$ -й степени по степеням оператора  $p$ . Этот сложный дифференциальный оператор действует на неизвестную функцию  $x(t)$  таким образом, что в результате получается заданная функция  $f(t)$ .

Наряду с оператором  $p$  вводят также обратный оператор  $p^{-1}$ , такой, что

$$p^{-1}(px) = p(p^{-1}x) = x.$$

Ясно, что действие оператора  $p^{-1}$  сводится к вычислению неопределенного интеграла

$$p^{-1}[f(t)] = \int f(t) dt + C = \int_a^t f(\xi) d\xi, \quad (8.60)$$

где  $C$  и  $a$  — некоторые постоянные числа.

Допустив существование сложных дифференциальных операторов, составляемых как рациональные выражения по степеням  $p$ , можно формально решить уравнение (8.59), применив обратный оператор  $\Phi_n^{-1}(p)$  к обеим частям этого равенства:

$$\Phi_n^{-1}(p)\Phi_n(p)x(t) = \Phi_n^{-1}(p)f(t),$$

откуда

$$x(t) = \Phi_n^{-1}(p)f(t), \quad (8.61)$$

где

$$\Phi_n^{-1}(p) = \frac{1}{p^n + a_{n-1}p^{n-1} + \dots + a_1p + a_0}. \quad (8.62)$$

Постараемся теперь придать оператору  $\Phi_n^{-1}(p)$  содержательный смысл. Для этого, следуя Хевисайду, рассмотрим простейший оператор такого вида, имеющий запись  $(p-\alpha)^{-1}$ , где  $\alpha$  — некоторое число. Этот оператор, будучи применен к результату действия оператора  $(p-\alpha)$ , воспроизводит исходную функцию:

$$(p-\alpha)^{-1}(p-\alpha)x = x.$$

Значит, действие  $(p-\alpha)^{-1}f(t)$  равносильно решению дифференциального уравнения  $(p-\alpha)x = f(t)$ , которое в обычной форме записывается так:

$$\frac{dx}{dt} - \alpha x = f(t). \quad (8.63)$$

Частное решение такого неоднородного уравнения находят уже описанным ранее методом вариации постоянных. Читатель легко проверит, что решение уравнения (8.63), удовлетворяющее нулевому начальному условию, имеет вид

$$x = (p - \alpha)^{-1} f(t) = \exp(\alpha t) \int_0^t f(\xi) \exp(-\alpha \xi) d\xi. \quad (8.64)$$

Следующий шаг анализа — приведенные обратного оператора вида (8.62) к линейной комбинации более простых операторов. Это осуществляется следующим образом. Пусть

$$\gamma^n + a_{n-1}\gamma^{n-1} + \dots + a_1\gamma + a_0 = 0$$

— характеристическое уравнение однородной задачи. Положим для определенности, что все корни  $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$  этого уравнения различны. Несколько более сложный и, к тому же, реже встречающийся на практике случай кратных корней рассмотрен в Приложениях. Тогда

$$\Phi_n^{-1}(p) = \frac{1}{(p - \gamma_1)(p - \gamma_2)\dots(p - \gamma_n)}$$

или, после разложения на простые дроби,

$$\Phi_n^{-1}(p) = \frac{A_1}{p - \gamma_1} + \frac{A_2}{p - \gamma_2} + \dots + \frac{A_n}{p - \gamma_n}, \quad (8.65)$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — некоторые постоянные коэффициенты. Отсюда на основании равенства (8.64) можно сразу записать окончательное решение, удовлетворяющее нулевым начальным условиям:

$$\begin{aligned} x(t) &= A_1 \exp(\gamma_1 t) \int_0^t f(\xi) \exp(-\gamma_1 \xi) d\xi + \\ &+ A_2 \exp(\gamma_2 t) \int_0^t f(\xi) \exp(-\gamma_2 \xi) d\xi + \dots \\ &+ A_n \exp(\gamma_n t) \int_0^t f(\xi) \exp(-\gamma_n \xi) d\xi. \end{aligned} \quad (8.66)$$

Таким образом, решение задачи Коши операторным методом сводится к набору стандартных процедур. Следует однако иметь в виду, что поиск корней характеристического уравнения достаточно высокого порядка может оказаться непростой проблемой, требующей использования компьютера.

Описанный здесь операторный метод решения задачи Коши очень важен в идейном отношении как пример метода, основанного на *декомпозиции*, т. е. на мысленном представлении сложной системы в виде объединения более простых систем.

Рассмотрим решение конкретной задачи операторным методом.

**Воздействие экспоненциального импульса ЭДС на последовательный колебательный контур.** Пусть последовательный колебательный контур (рис. 8.4,а) возбуждается импульсным источником ЭДС вида  $e(t) = E_0 \exp(-\beta t) \sigma(t)$ . Начальные условия считаются нулевыми. Дифференциальное уравнение данной цепи, записанное относительно напряжения  $u_C$  [см. формулу (8.17)], имеет вид

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + 2\alpha \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E_0 \exp(-\beta t), \quad (8.67)$$

где  $\alpha = R/(2L)$ ;  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .

В операторной форме уравнение (8.67) запишется так:

$$(p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2) u_C = \omega_0^2 E_0 \exp(-\beta t). \quad (8.68)$$

Обратный оператор рассматриваемой задачи

$$\Phi_2^{-1}(p) = \frac{1}{p^2 + 2\alpha p + \omega_0^2} = \frac{A_1}{p - \gamma_1} + \frac{A_2}{p - \gamma_2}.$$

Здесь  $\gamma_{1,2} = -\alpha \pm j\omega_c$  — корни характеристического уравнения  $\gamma^2 + 2\alpha\gamma + \omega_0^2 = 0$ . Найдя обычным способом значения постоянных

$$A_1 = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2}; \quad A_2 = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1}$$

и воспользовавшись общей формулой (8.66), получаем

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{\omega_0^2 E_0}{\gamma_1 - \gamma_2} \exp(\gamma_1 t) \int_0^t \exp[-(\beta + \gamma_1)\xi] d\xi + \\ &+ \frac{\omega_0^2 E_0}{\gamma_2 - \gamma_1} \exp(\gamma_2 t) \int_0^t \exp[-(\beta + \gamma_2)\xi] d\xi = \\ &= \frac{\omega_0^2 E_0}{2j\omega_c} \left[ \frac{e^{\gamma_1 t} - e^{-\beta t}}{\beta + \gamma_1} - \frac{e^{\gamma_2 t} - e^{-\beta t}}{\beta + \gamma_2} \right]. \end{aligned}$$

Выполнив ряд алгебраических преобразований, находим, что

$$\begin{aligned} u_C(t) &= \frac{\omega_0^2 E_0}{\omega_c^2 [(\beta - \alpha)^2 + \omega_c^2]} \times \\ &\times [(\beta - \alpha) \exp(-\alpha t) \sin \omega_c t + \omega_c \exp(-\beta t) - \omega_c \exp(-\alpha t) \cos \omega_c t]. \end{aligned} \quad (8.69)$$

Интересно отметить, что если  $\beta \rightarrow 0$ , то экспоненциальный импульс в пределе превращается в ступенчатый импульс включения. Если к тому же добротность контура велика, то  $\omega_c \rightarrow \omega_0$ ,  $\alpha/\omega_0 \ll 1$  и из выражения (8.69) следует, что

$$u_C(t) = E_0 [1 - \exp(-\alpha t) \cos \omega_0 t].$$

Этот результат, естественно, совпадает с тем, который дается формулой (8.26).

### 8.5. ИМПУЛЬСНАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА ЛИНЕЙНОЙ ЦЕПИ. ИНТЕГРАЛ ДЮАМЕЛЯ

Электрические цепи первого и более высокого порядка служат примерами *динамических систем*, т. е. физических объектов, обладающих известной инерционностью. Например, простейшая  $RC$ -цепь имеет единственный характерный временной масштаб — постоянную времени  $\tau$ . В пределах отрезка времени длительностью  $\tau$  или менее относительное изменение напряжения на конденсаторе невелико.

Представляет большой интерес рассмотреть воздействие на  $RC$ -цепь источника такой импульсной ЭДС  $e(t)$ , длительность которой  $\tau_n \ll \tau$ . Для этого обратимся к формуле (8.43). Полагая, что  $t > \tau_n$ , запишем ее следующим образом:

$$u_C(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \int_0^{\tau_n} e(\xi) \exp\left(\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi. \quad (8.70)$$

Но, так как на протяжении всего отрезка времени  $[0, \tau_n]$  имеет место неравенство  $\xi/\tau \ll 1$ , то  $\exp(\xi/\tau) \approx 1$ . Поэтому приближенно

$$u(t) = \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \int_0^{\tau_n} e(\xi) d\xi = \frac{\Pi_e}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), \quad (8.71)$$

где

$$\Pi_e = \int_0^{\tau_n} e(\xi) d\xi$$

— площадь импульса.

Эта формула имеет принципиальное значение. Оказывается, реакция инерционной цепи на короткое импульсное воздействие зависит *не от формы входного импульса, а лишь от его площади*.

**Пример 8.4.** Последовательная  $RC$ -цепь с параметрами  $R=2,7$  кОм,  $C=0,03$  мкФ возбуждается импульсом ЭДС, который имеет длительность  $0,5$  мкс и амплитуду  $E_0=50$  В. Найти мгновенное значение напряжения на конденсаторе в момент окончания входного импульса.

Здесь постоянная времени  $\tau=RC=8,1 \cdot 10^{-5}$  с. Условие  $\tau_n \ll \tau$  выполняется. Площадь входного импульса  $\Pi_e=50 \cdot 5 \cdot 10^{-7}=2,5 \cdot 10^{-5}$  В·с. Значит,  $u_C(0)=\Pi_e/\tau=0,31$  В.

**Общий случай.** Пусть линейная цепь  $n$ -го порядка, описываемая дифференциальным уравнением (8.56), находится под действием импульсного источника  $f(t)$ . Будем считать, что длительность  $\tau_n$  этого сигнала значительно меньше всех характерных масштабных интервалов времени, присущих данной цепи, т. е.

$$\tau_n \ll 1/|\gamma_k| \quad (8.72)$$

для всех корней с номерами от 1 до  $n$ . Тогда экспоненциальные сомножители во всех подынтегральных выражениях из формулы (8.66) можно приближенно считать равными единице. При этом реакция цепи  $n$ -го порядка на короткое импульсное воздействие

$$x(t) = \Pi_f \sum_{k=1}^n A_k \exp(\nu_k t), \quad (8.73)$$

где  $\Pi_f$  — площадь входного сигнала.

Физический смысл формулы (8.73) прост и нагляден — короткий импульс представляет собой «толчок», возбуждающий все колебательные моды, свойственные рассматриваемой цепи. Амплитуды возбужденных мод пропорциональны площади входного сигнала и коэффициентам  $A_k$ , которые получаются при разложении обратного оператора задачи на простые дроби.

**Понятие дельта-функции.** В 30-х годах нашего века известный физик Поль Дирак, один из создателей квантовой механики, ввел в научный обиход новый математический объект — так называемую дельта-функцию  $\delta(t)$ . По определению, дельта-функция представляет собой абстрактную модель бесконечно короткого импульса, возникающего в момент времени  $t=0$ , равного нулю всюду за исключением этой точки, но, тем не менее, имеющего единичную площадь:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(t) dt = 1. \quad (8.74)$$

Наглядно функцию  $\delta(t)$  можно представить так. Пусть имеется прямоугольный импульс длительностью  $\Delta$  и амплитудой  $1/\Delta$ . Если теперь выполнить предельный переход  $\Delta \rightarrow 0$ , то возникающий при этом бесконечно короткий и бесконечно высокий импульс и представляет собой один из способов реализации дельта-функции.

Важно отметить, что в соответствии с формулой (8.74) функция  $\delta(t)$  имеет физическую размерность  $c^{-1}$ , т. е. *размерность частоты*. Поэтому если мы используем символическую запись для ЭДС импульсного источника вида  $e(t) = \delta(t)$ , то это означает, что в правой части подразумевается единичный множитель с размерностью  $B \cdot c$ .

Точка на оси времени, в которой возникает дельта-функция, может быть любой. Так, символом  $\delta(t-t_0)$  обозначают дельта-функцию, возникающую в момент времени  $t=t_0$ .

**Импульсная характеристика цепи.** По определению так называют функцию  $h(t)$  — реакцию цепи на входное воздействие вида дельта-функции, возникающее в момент времени  $t=0$  при нулевых начальных условиях.

Общая формула для вычисления импульсной характеристики произвольной линейной цепи  $n$ -го порядка вытекает из выражения (8.73)

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \sum_{k=1}^n A_k \exp(\gamma_k t). \end{cases} \quad (8.75)$$

Тот факт, что значения функции  $h(t)$  обращаются в нуль на полубесконечной оси  $t < 0$ , связан с общефизическим принципом причинности: реакция на выходе не может возникнуть до того, как будет подано воздействие на вход.

Найдем явные выражения функции  $h(t)$  для двух простых цепей.

Импульсная характеристика последовательной  $RC$ -цепи. В соответствии с равенством (8.71), положив численное значение площади  $\Pi_e = 1$ , имеем

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{1}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right), & t > 0. \end{cases} \quad (8.76)$$

Соответствующий график представлен на рис. 8.11,а. Импульсная характеристика  $RC$ -цепи оказывается разрывной функцией; скачок от нуля до уровня  $1/\tau$  происходит в момент времени  $t=0$ .

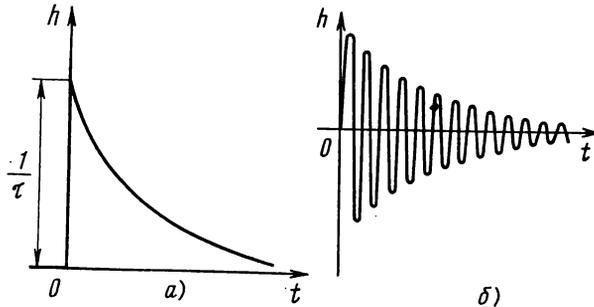


Рис. 8.11. Временные диаграммы импульсных характеристик: а —  $RC$ -цепи; б — последовательного колебательного контура

Импульсная характеристика последовательного колебательного контура. Для контура, изображенного на рис. 8.4,а, импульсная характеристика  $h(t)$  представляет собой частное решение уравнения

$$\frac{d^2 h}{dt^2} + 2\alpha \frac{dh}{dt} + \omega_0^2 h = \omega_0^2 \delta(t) \quad (8.77)$$

[см. формулу (8.17)] при нулевых начальных условиях. Коэффициенты

$$A_1 = \frac{1}{\gamma_1 - \gamma_2} = \frac{1}{2j\omega_c}; \quad A_2 = \frac{1}{\gamma_2 - \gamma_1} = -\frac{1}{2j\omega_c}$$

для рассматриваемой цепи были определены ранее при решении уравнения (8.67). Подставив их в формулу (8.75), находим

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{\omega_0^2}{\omega_c} \exp(-\alpha t) \sin \omega_c t, & t > 0. \end{cases} \quad (8.78)$$

График этой функции (рис. 8.11,б) является непрерывной осциллирующей кривой.

**Интеграл Дюамеля.** Введя понятие импульсной характеристики цепи, можно получить очень полезную форму записи выходного сигнала при любой возбуждающей функции. Действительно, комбинируя равенства (8.66) и (8.75), а также изменяя порядок следования операций суммирования и интегрирования, получаем

$$x(t) = \int_0^t f(\xi) h(t-\xi) d\xi. \quad (8.79)$$

В математике говорят, что такой интеграл представляет собой *свертку* функций  $f(t)$  и  $h(t)$ . В теории цепей, а также во многих областях физики формулу (8.79) называют *интегралом Дюамеля* или *интегралом суперпозиции*.

Чтобы понять смысл этого выражения, обратимся к рис. 8.12. Любой возбуждающий сигнал  $f(t)$  можно представить как объединение (суммирование) бесконечно коротких прямоугольных импульсов длительностью  $dt$  каждый. Амплитуды этих импульсов равны  $f(t)$ , а соответствующие площади представляют собой произведения  $f(t) dt$ .

Если мы интересуемся значением реакции цепи  $x(t)$  в некоторый фиксированный момент времени  $t$ , то благодаря линейности цепи эта реакция будет суммой (в пределе — интегралом) всех элементарных реакций от импульсов, существовавших «в прошлом» на отрезке  $[0, t]$ . Импульсная характеристика  $h(t-\xi)$  играет при этом роль весовой функции. Если эта функция убывает, как в случае  $RC$ -цепи, то вклады от более ранних участков входного колебания становятся все менее ощутимыми.

Рассмотрим конкретный пример вычисления интеграла Дюамеля.

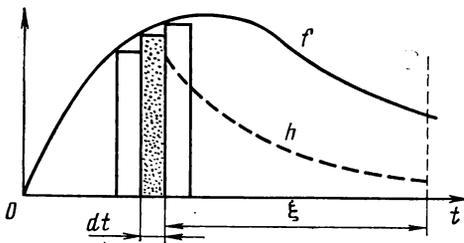


Рис. 8.12. К выводу интеграла Дюамеля

**Воздействие треугольного (пилообразного) импульса ЭДС на RC-цепь.** Пусть возбуждающий сигнал имеет вид

$$e(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ E_0 \left(1 - \frac{t}{\tau_{и}}\right), & 0 < t < \tau_{и}, \\ 0, & t > \tau_{и}. \end{cases} \quad (8.80)$$

Подобный треугольный импульс изображен пунктиром на рис. 8.13. Если выходным сигналом цепи служит напряжение  $u_c(t)$  на

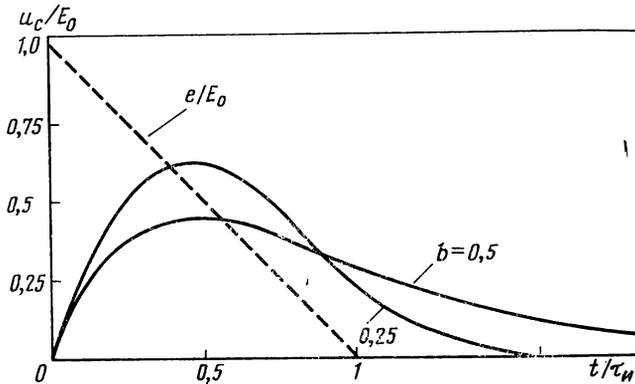


Рис. 8.13. Возбуждение RC-цепи импульсом ЭДС треугольной формы

конденсаторе, то импульсная характеристика дается формулой (8.76). Подставляя ее вместе с моделью сигнала (8.80) в формулу интеграла Дюамеля (8.79), на отрезке  $[0, \tau_{и}]$  получаем

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \frac{E_0}{\tau} \int_0^t \left(1 - \frac{\xi}{\tau_{и}}\right) \exp\left(-\frac{t-\xi}{\tau}\right) d\xi = \\ &= E_0 \left[1 + \frac{\tau}{\tau_{и}} - \frac{t}{\tau_{и}} - \left(1 + \frac{\tau}{\tau_{и}}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]. \end{aligned} \quad (8.81)$$

На полубесконечном интервале  $t > \tau_{и}$

$$\begin{aligned} u_c(t) &= \frac{E_0}{\tau} \left[ \int_0^{\tau_{и}} \left(1 - \frac{\xi}{\tau_{и}}\right) \exp\left(-\frac{\xi}{\tau}\right) d\xi \right] \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) = \\ &= E_0 \left\{ \frac{\tau}{\tau_{и}} \left[ \exp\left(\frac{\tau_{и}}{\tau}\right) - 1 \right] - 1 \right\} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right). \end{aligned} \quad (8.82)$$

На рис. 8.13 приведены кривые, построенные по формулам (8.81) и (8.82) для двух значений параметра  $b = \tau/\tau_{и}$ , численно

равных 0,25 и 0,5. Видно, что  $RC$ -цепь осуществляет «сглаживание» входного сигнала, которое тем заметнее, чем больше постоянная времени по сравнению с длительностью входного импульса.

Интересно отметить, что в начальной стадии процесса  $e > u_c$ . Это означает, что напряжение  $u_R$  на резисторе также положительно; происходит зарядка конденсатора. Начиная с некоторого момента времени выполняется обратное неравенство  $u_c > e$ . При этом происходит разрядка конденсатора.

### 8.6. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛАПЛАСА

Работы Хевисайда и других ученых, в которых была заложена основа операторного метода решения дифференциальных уравнений, намного определили свое время. Их общетеоретическое значение стало понятным лишь в последние десятилетия. Современникам же представлялось, что операторный метод, хотя и обеспечивает безупречные результаты, обоснован недостаточно строго. Поэтому была предпринята еще одна попытка создать вариант операторного метода на базе теории линейных интегральных преобразований.

**Преобразование Лапласа.** Ниже приводится ряд фактов, касающихся этого интегрального преобразования. Более подробные сведения можно найти, например, в [7].

Пусть  $f(t)$  — функция, тождественно обращающаяся в нуль при  $t < 0$  и возрастающая при  $t > 0$  не быстрее, чем по экспоненте  $\exp(ct)$ , где  $c > 0$  — некоторый постоянный параметр, называемый показателем роста. В математике функции с такими свойствами принято называть *оригиналами*. Понятно, что практически любые функции, возникающие при исследовании нестационарных процессов в реальных цепях, принадлежат к этому классу.

Сопоставим оригиналу  $f(t)$  его *изображение*

$$F(p) = \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt. \quad (8.83)$$

Данная формула определяет собой *прямое преобразование Лапласа*. Изображение является функцией комплексной переменной  $p$ . Эта функция аналитична, т. е. бесконечно дифференцируема в полуплоскости  $\operatorname{Re} p > c$ . Краткая запись  $f(t) \leftrightarrow F(p)$  означает взаимно-однозначное соответствие между оригиналом и изображением.

Преобразование Лапласа — удобный инструмент для решения линейных дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами. Действительно, пусть имеется производная  $g(t) = df/dt$  от некоторого оригинала  $f(t)$ . Изображение  $G(p) \leftrightarrow g(t)$  вычисляется так:

$$G(p) = \int_0^{\infty} \frac{df}{dt} \exp(-pt) dt = \\ = f(t) \exp(-pt) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} f(t) \exp(-pt) dt = pF(p) - f(0). \quad (8.84)$$

Если положить для простоты, что  $f(0) = 0$ , то можно утверждать следующее: дифференцирование функции  $f(t)$  по времени (в пространстве оригиналов) равносильно *умножению* ее изображения  $F(p)$  на переменную  $p$ . Поэтому переменная  $p$ , стоящая как сомножитель, служит оператором дифференцирования в пространстве изображений.

Налицо формальное сходство такой символики с той, которая используется в методе Хевисайда. Однако содержательная трактовка оператора  $p$  здесь различна, и это различие всегда можно рассмотреть из контекста решаемой задачи.

Аналогичным образом, если  $f(t) \leftrightarrow F(p)$ , то производная  $q(t) = d^n f/dt^n$  имеет изображение

$$Q(p) = p^n F(p) - p^{n-1} f(0) - p^{n-2} f'(0) - \dots \\ - p f^{(n-2)}(0) - f^{(n-1)}(0). \quad (8.85)$$

Положим, что требуется решить дифференциальное уравнение второго порядка

$$\frac{d^2 x}{dt^2} + a_1 \frac{dx}{dt} + a_0 x = f(t) \quad (8.86)$$

с начальными условиями, которые определяют значения  $x(0)$  и  $x'(0)$ . Применим преобразование Лапласа к обеим частям этого равенства, имея в виду соответствия  $x(t) \leftrightarrow X(p)$  и  $f(t) \leftrightarrow F(p)$ :

$$(p^2 + a_1 p + a_0) X(p) - p x(0) - x'(0) - a_1 x(0) = F(p). \quad (8.87)$$

Изображение неизвестной функции получается отсюда чисто алгебраическим путем:

$$X(p) = \frac{F(p) + (p + a_1) x(0) + x'(0)}{p^2 + a_1 p + a_0}. \quad (8.88)$$

Если теперь удастся тем или иным способом вычислить оригинал  $x(t)$ , то поставленная задача будет решена полностью, причем, и это следует подчеркнуть, метод преобразования Лапласа дает возможность автоматически учесть начальные условия, так что отпадает необходимость добавлять решение однородного уравнения.

Равенство (8.83) можно рассматривать как *интегральное уравнение* относительно неизвестного оригинала. В математике доказано, что решение этого уравнения дается формулой

$$f(t) = \frac{1}{2\pi j} \int_{a-j\infty}^{a+j\infty} F(p) \exp(pt) dp, \quad (8.89)$$

определяющей обратное преобразование Лапласа. Интегрирование проводится по любой вертикальной оси, абсцисса которой удовлетворяет неравенству  $a > c$ .

При решении многих задач, встречающихся в технике, удается применить декомпозиционный подход — разложить полученное изображение на простые дроби и получить искомый оригинал как сумму более простых колебаний. Чаще же всего пользуются готовыми таблицами преобразований Лапласа. В Приложениях имеется такая таблица, позволяющая решать достаточно широкий круг задач из области теории цепей.

Приведем краткий перечень преобразований Лапласа от часто встречающихся функций.

а) Преобразование от дельта-функции. Так как длительность дельта-импульса бесконечно мала, а площадь равна единице, то

$$\delta(t - t_0) \longleftrightarrow \int_0^{\infty} \delta(t - t_0) \exp(-pt) dt = \exp(-pt_0).$$

Если же  $t_0 = 0$ , то

$$\delta(t) \longleftrightarrow 1. \quad (8.90)$$

б) Преобразование от постоянной величины. Непосредственным расчетом убеждаемся, что если  $E_0 = \text{const}$ , то для такой постоянной функции

$$E_0 \longleftrightarrow \frac{E_0}{p}. \quad (8.91)$$

в) Преобразование от экспоненциальной функции. Подставляя экспоненту в основную формулу (8.83), находим соответствие

$$\exp(at) \longleftrightarrow \frac{1}{p - a}, \quad (8.92)$$

где  $a$  — любое комплексное число.

г) Преобразование от интеграла. Применяв прием интегрирования по частям, получаем следующий закон соответствия:

$$\int_0^t f(\xi) d\xi \longleftrightarrow \frac{1}{p} F(p), \quad (8.93)$$

где  $f(\xi) \longleftrightarrow F(p)$ .

**Теоремы запаздывания и смещения.** Пусть установлено соответствие между оригиналом  $f(t)$  и его изображением  $F(p)$ . Найдем изображение  $Q(p)$  функции  $q(t) = f(t - \tau) \sigma(t - \tau)$ , которая получается из исходной путем сдвига вправо (в сторону запаздывания) на интервал  $\tau$ . В данном случае

$$\begin{aligned}
 Q(p) &= \int_{\tau}^{\infty} f(t - \tau) \exp(-pt) dt = \\
 &= \exp(-p\tau) \int_0^{\infty} f(\xi) \exp(-p\xi) d\xi = \exp(-p\tau) F(p). \quad (8.94)
 \end{aligned}$$

Равенство (8.94) называют *теоремой запаздывания*. В соответствии с этой теоремой множитель  $\exp(-p\tau)$  представляет собой *оператор запаздывания* в пространстве изображений.

Аналогичным образом убеждаемся, что функции  $q(t) = \exp(-\lambda t)f(t)$  отвечает изображение

$$Q(p) = F(p + \lambda). \quad (8.95)$$

Данную формулу называют *теоремой смещения*.

**Операторное сопротивление и операторная проводимость.** В рамках метода преобразования Лапласа удастся найти простую связь между напряжением и током на элементе линейной цепи.

Пусть имеется индуктивный элемент с параметром  $L$ . Напряжение  $u(t)$  и ток  $i(t)$  связаны между собой известной формулой  $u = L di/dt$ . Преобразовав обе части этого равенства по Лапласу, получаем следующий закон связи между изображениями

$$U(p) = pLI(p) - Li(0). \quad (8.96)$$

При нулевом значении начального тока

$$U(p) = pLI(p). \quad (8.97)$$

Аналогично, для конденсатора имеем формулу  $i = C du/dt$ , поэтому

$$I(p) = pCU(p) - Cu(0), \quad (8.98)$$

или, если  $u(0) = 0$ ,

$$I(p) = pCU(p). \quad (8.99)$$

Отношение изображения напряжения к изображению тока при нулевых начальных условиях называют *операторным сопротивлением (импедансом)*  $Z(p)$  двухполюсника. Из формулы (8.97) видно, что для индуктивного элемента

$$Z(p) = pL, \quad (8.100)$$

в то время как для конденсатора на основании выражения (8.99)

$$Z(p) = 1/(pC). \quad (8.101)$$

Величину  $Y(p)$ , обратную по отношению к операторному сопротивлению, называют *операторной проводимостью*. Для индуктивного элемента

$$Y(p) = 1/(pL), \quad (8.102)$$

для конденсатора

$$Y(p) = pC. \quad (8.103)$$

Исключительно важно отметить, что формулы (8.100) — (8.103) переходят в обычные формулы метода комплексных амплитуд, применяемые для гармонических колебаний, если операторную переменную  $p$  заменить на переменную  $j\omega$ . Именно это обстоятельство сделало операторный метод столь популярным среди специалистов в области радиотехники и связи.

Операторные характеристики сложных линейных двухполюсников находят, пользуясь обычными правилами преобразования сопротивлений и проводимостей при последовательном и параллельном соединении. Например, для цепи, схема которой приведена на рис. 8.14,а, входное операторное сопротивление

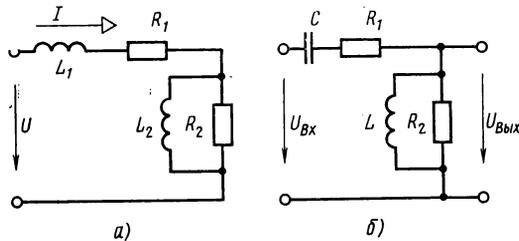


Рис. 8.14. К вычислению операторных характеристик цепей:  
а — двухполюсника; б — четырехполюсника

$$Z_{\text{вх}}(p) = pL_1 + R_1 + \frac{pL_2R_2}{pL_2 + R_2} = \frac{p^2L_1L_2 + p[L_2(R_1 + R_2) + L_1R_2] + R_1R_2}{pL_2 + R_2}.$$

**Передаточные функции цепей.** При исследовании нестационарных процессов в многополюсниках большое значение приобретают безразмерные величины — отношения изображений двух напряжений или двух токов в различных участках цепи, например, на выходе и на входе. Такие отношения называют *передаточными функциями* цепи.

Так, для четырехполюсника можно ввести передаточную функцию по напряжению

$$K_U(p) = U_{\text{вых}}(p)/U_{\text{вх}}(p) \quad (8.104)$$

или по току

$$K_I(p) = I_{\text{вых}}(p)/I_{\text{вх}}(p). \quad (8.105)$$

В качестве примера рассмотрим четырехполюсник, изображенный на рис. 8.14,б. Здесь

$$K_U(p) = Z_2(p)/[Z_1(p) + Z_2(p)],$$

где

$$Z_1(p) = R_1 + \frac{1}{pC} = \frac{1 + pR_1C}{pC},$$

$$Z_2(p) = \frac{pLR_2}{R_2 + pL}.$$

Выполнив несложные преобразования, находим, что для данной цепи

$$K_U(p) = \frac{p^2 LCR_2}{p^2 LC(R_1 + R_2) + p(L + R_1R_2C) + R_2}. \quad (8.106)$$

Зная передаточную функцию цепи, а также располагая изображением сигнала на входе, по формулам (8.104) или (8.105) находим изображение выходного сигнала, которое однозначно связано с выходным колебанием при нулевых начальных условиях.

При ненулевых начальных условиях потребуется учесть дополнительные члены в изображениях токов и напряжений [см. формулы (8.96) и (8.98)]. Принципиально новых моментов в процедуре решения при этом не возникает.

**Импульсная характеристика сложной RC-цепи.** Как пример использования метода преобразования Лапласа, решим задачу об импульсной характеристике RC-цепи с двумя резисторами и двумя конденсаторами, возбуждаемой источником ЭДС (рис. 8.15,а).

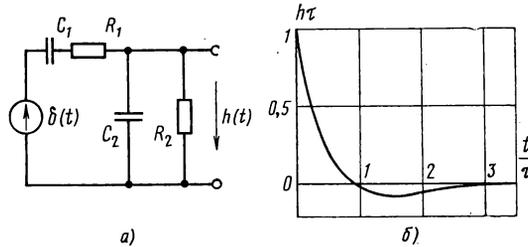


Рис. 8.15. Сложная RC-цепь:

а — принципиальная схема; б — импульсная характеристика

Так как дельта-функция имеет единичное изображение, то на основании формулы (8.104) изображение искомой импульсной характеристики совпадает с передаточной функцией  $K_U(p)$ . Значит, задача сводится к поиску передаточной функции цепи и нахождению соответствующего оригинала.

Рассматриваемая цепь является резистивно-емкостным делителем напряжения. Поэтому, вводя вспомогательные величины — импедансы отдельных составных частей цепи

$$Z_1(p) = R_1 + \frac{1}{p C_1} = \frac{1 + p R_1 C_1}{p C_1},$$

$$Z_2(p) = \frac{R_2/(p C_2)}{R_2 + 1/(p C_2)} = \frac{R_2}{1 + p R_2 C_2},$$

получаем передаточную функцию по напряжению

$$K_U(p) = \frac{p R_2 C_1}{p R_2 C_1 + (1 + p R_1 C_1)(1 + p R_2 C_2)}. \quad (8.107)$$

Для сокращения записи целесообразно ввести постоянные времени  $\tau_1 = R_1 C_1$ ,  $\tau_2 = R_2 C_2$ ,  $\tau' = R_2 C_1$ . Тогда

$$K_U(p) = \frac{p \tau'}{p \tau' + 1 + p(\tau_1 + \tau_2) + p^2 \tau_1 \tau_2} = \frac{p \tau' / (\tau_1 \tau_2)}{p^2 + p \frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau'}{\tau_1 \tau_2} + \frac{1}{\tau_1 \tau_2}}. \quad (8.108)$$

Используя таблицу преобразований Лапласа, можно было бы получить результат непосредственно отсюда. Тем не менее, с методической точки зрения целесообразно провести поэтапное решение. Оно включает в себя представление передаточной функции вида (8.108) как суммы простых дробей:

$$K_U(p) = \frac{A}{p - p_1} + \frac{B}{p - p_2}, \quad (8.109)$$

где

$$p_{1,2} = -\frac{\tau_1 + \tau_2 + \tau'}{2 \tau_1 \tau_2} \pm \sqrt{\frac{(\tau_1 + \tau_2 + \tau')^2}{4 \tau_1^2 \tau_2^2} - \frac{1}{\tau_1 \tau_2}}$$

— корни знаменателя передаточной функции.

Не определенные заранее коэффициенты  $A$  и  $B$  находят по обычным правилам:

$$A = \frac{p_1 \tau' / (\tau_1 \tau_2)}{p_1 - p_2},$$

$$B = -\frac{p_2 \tau' / (\tau_1 \tau_2)}{p_1 - p_2}.$$

Переход от равенства (8.108) к формуле (8.109) представляет собой, по сути дела, декомпозицию передаточной функции.

Воспользовавшись законом соответствия (8.92), приходим к окончательному результату

$$h(t) = \begin{cases} 0, & t < 0, \\ \frac{\tau'}{\tau_1 \tau_2 (p_1 - p_2)} [p_1 \exp(p_1 t) - p_2 \exp(p_2 t)], & t > 0. \end{cases} \quad (8.110)$$

На рис. 8.15,б изображен график, рассчитанный по данной формуле для цепи с параметрами  $R_1=R_2=3,6$  кОм,  $C_1=C_2=5,1$  нФ. При этом  $\tau_1=\tau_2=\tau'=\tau=18,36$  мкс,  $p_1=-2,618/\tau$ ,  $p_2=-0,382/\tau$ . Сравнивая эту кривую с той, которая относится к случаю простой  $RC$ -цепи (рис. 8.11,а), видим, что для данной цепи второго порядка импульсная характеристика является знакопеременной функцией времени.

**Воздействие импульса включения гармонической ЭДС на  $RL$ -цепь.** В качестве последнего примера, иллюстрирующего метод преобразования Лапласа, изучим задачу о воздействии источника гармонической ЭДС  $e(t)=E_m \sin \omega t \sigma(t)$ , начинающего действовать в момент времени  $t=0$ , на  $RL$ -цепь (рис. 8.16,а). Предполагается, что начальный ток в цепи равен нулю.

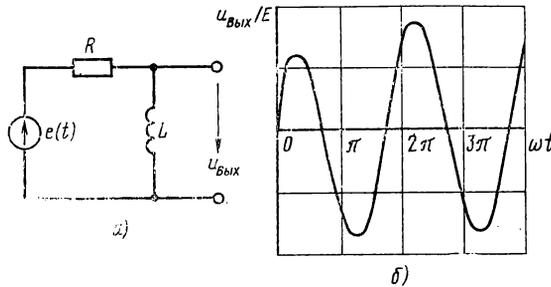


Рис. 8.16. Возбуждение  $RL$ -цепи импульсом включения гармонической ЭДС:  
а — схема цепи; б — временная диаграмма выходного напряжения

При данной конфигурации цепи передаточная функция по напряжению

$$K_U(p) = pL / (R + pL) = p / (p + \alpha), \quad (8.111)$$

где параметр  $\alpha = 1/\tau = R/L$ .

Изображение входного сигнала находим по таблице:

$$e(t) \leftrightarrow E_m \omega / (p^2 + \omega^2). \quad (8.112)$$

Изображение выходного сигнала

$$U_{\text{вых}}(p) = K_U(p) U_{\text{вх}}(p) = \frac{E_m \omega p}{(p + \alpha)(p^2 + \omega^2)}. \quad (8.113)$$

Вновь обратившись к таблице соответствий между изображениями и оригиналами, получаем формулу, определяющую выходной сигнал при  $t > 0$ :

$$u_{\text{вых}}(t) = \frac{E_m \omega}{\alpha^2 + \omega^2} [-\alpha \exp(-\alpha t) + \alpha \cos \omega t + \omega \sin \omega t]. \quad (8.114)$$

На рис. 8.16,б изображена осциллограмма этого сигнала, рассчитанная по формуле (8.114) для частного случая  $\alpha = \omega$ . Видно,

что в начале переходного процесса кривая несимметрична относительно оси времени; спустя несколько периодов в цепи устанавливается стационарный режим.

### В О П Р О С Ы

1. В каком виде следует искать общее решение неоднородного линейного дифференциального уравнения?

2. Почему при нестационарных процессах токи в индуктивных элементах и напряжения на емкостных элементах должны изменяться непрерывно?

3. Опишите основные этапы процедуры решения дифференциального уравнения операторным методом.

4. Что такое импульсная характеристика линейной цепи? Дайте наглядное определение понятия дельта-функции.

5. Какое ограничение накладывает принцип причинности на возможный вид импульсной характеристики?

6. Как определяются операторные сопротивление и проводимость двухполюсника?

## 9. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ЦЕПИ, СИНТЕЗ ПАССИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Как указывалось в гл. 8, исчерпывающие сведения о нестационарных процессах в линейных цепях можно получить, располагая подходящими функциями цепи. Так, для двухполюсника необходимо знать сопротивление  $Z(p)$  или проводимость  $Y(p)$ . Применительно к случаю четырехполюсника полная математическая модель заключена в элементах его матрицы, например,  $Z_{ij}(p)$  ( $i, j = 1, 2$ ), рассматриваемых в зависимости от параметра  $p$ . Важно отметить, что все эти функции можно изучать безотносительно метода преобразования Лапласа, переходя от частотной переменной  $j\omega$ , фигурировавшей ранее в рамках метода комплексных амплитуд, к новой переменной

$$p = \sigma + j\omega, \quad (9.1)$$

получившей название *комплексной частоты*.

Следует, конечно, иметь в виду, что подлинный физический смысл имеет лишь круговая частота  $\omega$ , выступающая как мнимая часть комплексной частоты. Однако переход от параметра  $j\omega$  к параметру  $p$ , или, как говорят в математике, *аналитическое продолжение* функций цепи с чисто мнимой оси  $j\omega$  на всю комплексную плоскость  $p$ , имеет глубокое значение. Этот прием дает возможность изучать частотные свойства электрических цепей с помощью хорошо разработанных и очень мощных средств теории функций комплексного переменного.



где  $m$  и  $n$  — некоторые положительные целые числа, определяемые внутренней конфигурацией схемы двухполюсника и характером входящих в него элементов. Совокупности коэффициентов  $\{a_k\}$  и  $\{b_k\}$  некоторым образом выражаются через вещественные параметры  $R, L, C, M$  и поэтому также представляют собой вещественные числа.

Функции вида (9.5) в математике называют *дробно-рациональными функциями*. По основной теореме алгебры каждый многочлен  $n$ -й степени имеет ровно  $n$  корней, которые в общем случае являются комплексными числами. Таким образом, на основании формулы (9.5) можно записать

$$Z(p) = Z_0 \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}, \quad (9.6)$$

где  $Z_0$  — некоторая постоянная соответствующей размерности. Множество корней числителя  $z_i$  представляет собой совокупность *нулей* входного сопротивления двухполюсника. Корни же знаменателя  $p_i$  образуют множество *полюсов* входного сопротивления. В совокупности нули и полюсы называют *особыми точками*. Очевидно, что нули сопротивления служат полюсами проводимости и наоборот.

Известно, что дробно-рациональные функции являются аналитическими функциями, которые можно дифференцировать любое число раз на всей комплексной плоскости  $p$  за исключением точек полюсов. Из формулы (9.6) следует, что для полного описания аналитической функции  $Z(p)$  нужно задать постоянную  $Z_0$ , а также совокупности чисел  $z_1, z_2, \dots, z_m$  и  $p_1, p_2, \dots, p_n$ .

**Расположение нулей и полюсов входного сопротивления.** Особые точки входного сопротивления двухполюсника должны быть такими, чтобы данная цепь, по условию не содержащая внутри себя источников, непрерывно подводящих энергию, была устойчивой.

Пусть зажимы двухполюсника разомкнуты (холостой ход) и на них имеется некоторое напряжение. Поскольку ток в цепи отсутствует, то поведение двухполюсника описывается характеристическим уравнением

$$I(p)/U(p) = 1/Z(p) = 0, \quad (9.7)$$

корнями которого служат полюсы входного сопротивления  $Z(p)$ . В соответствии с принципом операторного метода любое напряжение на зажимах двухполюсника, находящегося в режиме холостого хода и обладающего некоторым запасом энергии в реактивных элементах, описывается формулой

$$u(t) = A_1 e^{p_1 t} + A_2 e^{p_2 t} + \dots + A_n e^{p_n t},$$

где  $A_1, A_2, \dots, A_n$  — коэффициенты, зависящие от начальных условий. Условием устойчивости двухполюсника в режиме холостого хода служит неравенство

$$\operatorname{Re} p_i \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (9.8)$$

Аналогично, рассматривая тот же двухполюсник в режиме короткого замыкания, когда  $U=0$ , но  $I \neq 0$ , получаем второе характеристическое уравнение

$$U(p)/I(p) = Z(p) = 0. \quad (9.9)$$

Его корни — это нули сопротивления (т. е. полюсы проводимости), которые должны удовлетворять условию

$$\operatorname{Re} z_i \leq 0, \quad i=1, 2, \dots, m. \quad (9.10)$$

Итак, как полюсы так и нули сопротивления устойчивого линейного двухполюсника не должны располагаться в правой полуплоскости комплексной частоты  $p$ . Так как коэффициенты многочленов, входящих в числитель и знаменатель формулы (9.5), представляют собой вещественные числа, то особые точки сопротивления всегда либо вещественны, либо образуют комплексносопряженные пары. Графически особые точки любых функций цепи отображают на так называемой карте нулей и полюсов; обычно полюс изображают звездочкой, а нуль — кружком.

**Пример 9.1.** Построить карту нулей и полюсов для сопротивления  $Z(p)$  последовательного колебательного контура с параметрами  $L=0,8$  мГн,  $C=2$  нФ,  $R=30$  Ом.

Здесь

$$Z(p) = pL + R + \frac{1}{pC} = \frac{p^2 LC + pRC + 1}{pC}.$$

Видно, что имеется один полюс в точке  $p=0$  и два нуля  $z_{1,2}$ , координаты которых определяются корнями квадратного уравнения

$$z^2 LC + zRC + 1 = 0,$$

т. е.

$$z^2 + 3,75 \cdot 10^4 z + 6,25 \cdot 10^{11} = 0.$$

Решая это уравнение, находим

$$z_{1,2} = -1,875 \cdot 10^4 \pm j 7,903 \cdot 10^6 \text{ с}^{-1}.$$

Эскиз соответствующей карты нулей и полюсов приведен на рис. 9.1.

Предельным идеализированным случаем является чисто реактивный двухполюсник. Из-за отсутствия омических потерь нули и полюсы располагаются здесь только на мнимой оси  $j\omega$ .

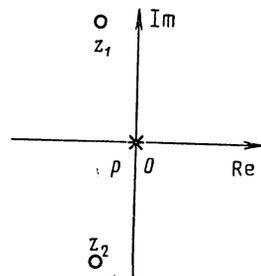


Рис. 9.1. Карта нулей и полюсов для сопротивления последовательного контура

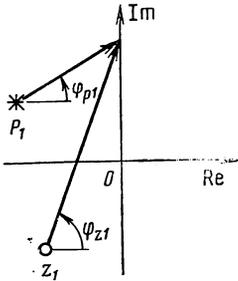


Рис. 9.2. К доказательству теоремы о числе нулей и полюсов входного сопротивления двухполюсника

как легко видеть, фазовый угол сопротивления

$$\arg Z = \sum_{k=1}^m \varphi_{zk} - \sum_{l=1}^n \varphi_{pl},$$

т. е. нули увеличивают, а полюсы уменьшают значение аргумента сопротивления.

Пассивный двухполюсник на любой частоте в среднем всегда поглощает энергию от внешних источников. Это значит, что вещественная часть сопротивления  $Z(j\omega)$  положительна, откуда следует неравенство

$$-\pi/2 \leq \arg Z \leq \pi/2. \quad (9.12)$$

Устремим теперь частоту  $\omega$  к бесконечности. При этом аргументы векторов, проведенных как из полюсов, так и из нулей будут стремиться к  $\pi/2$ . Таким образом,

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \arg Z = (m - n) \pi/2. \quad (9.13)$$

Поэтому числа  $m$  и  $n$  могут либо совпадать, либо отличаться на единицу.

В теории цепей функция  $Z(p)$ , аналитическая в правой полуплоскости и имеющая неотрицательную вещественную часть на мнимой оси  $j\omega$ , носит специальное название *положительной вещественной функции* [8].

Наглядная формулировка доказанной теоремы состоит в следующем: при неограниченном увеличении частоты любой пассивный двухполюсник ведет себя либо как резистор (степени числителя и знаменателя в формуле (9.6) совпадают), либо как конденсатор (степень знаменателя на единицу превышает степень числителя), либо, наконец, как индуктивный элемент, если имеет место обратное соотношение.

**Теорема о числе нулей и полюсов.** Дополнительные сведения о характере функции  $Z(p)$  дает следующая теорема: числа нулей и полюсов сопротивления устойчивого двухполюсника не могут отличаться более чем на единицу.

Для доказательства запишем сопротивление двухполюсника на некоторой физической частоте  $\omega$  в виде

$$Z(j\omega) = |Z| \exp(j \arg Z). \quad (9.11)$$

Отобразим эту формулу геометрически, положив в равенстве (9.6)  $p = j\omega$  и проведя из всех нулей и полюсов векторы, концы которых сходятся в точке текущей частоты на мнимой оси (рис. 9.2). При этом,

**Связь между вещественной и мнимой частями входного сопротивления двухполюсника.** Рассмотрим пассивный двухполюсник, образованный параллельным соединением элементов  $R$  и  $L$  (рис. 9.3). Легко проверить, что при вещественной частоте  $\omega$  входное сопротивление данной цепи

$$Z(j\omega) = R(j\omega) + jX(j\omega) = \frac{\omega^2 RL^2}{R^2 + \omega^2 L^2} + j \frac{\omega LR^2}{R^2 + \omega^2 L^2}.$$

Обращает на себя внимание то, что параметры  $R$  и  $L$  одновременно входят как в вещественную, так и в мнимую части входного сопротивления. Цепи, составленные таким образом, что каждый из входящих элементов влияет на обе части входного сопротивления  $Z(j\omega)$ , принято называть *цепями минимального сопротивления*. Смысл термина состоит в том, что такие цепи, по определению, не содержат никаких последовательно включенных резисторов или последовательно включенных реактивных элементов, которые могли бы влиять на одну из частей входного сопротивления.

Для цепей минимального сопротивления удастся установить однозначную связь между функциями  $R(j\omega)$  и  $X(j\omega)$ . Зафиксируем частоту  $\omega$  и рассмотрим интеграл

$$\oint \frac{Z(p)}{p - j\omega} dp = 0,$$

взятый по замкнутому контуру в правой полуплоскости (рис. 9.4). Полюс, возникающий при  $p = j\omega$ , обходится по полуокружности  $C_1$  малого радиуса. Интеграл по дуге  $C_2$  неограниченно большого радиуса пренебрежимо мал в силу аналитичности функции  $Z(p)$  справа от мнимой оси. Поэтому

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(j\xi) d\xi}{\xi - \omega} + \int_{C_1} \frac{Z(p) dp}{p - j\omega} = 0.$$

Подынтегральная функция  $Z(p)/(p - j\omega)$  в окрестности полюса  $p = j\omega$  стремится к бесконечности равномерно. Поэтому согласно

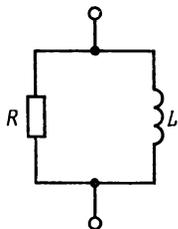


Рис. 9.3. Параллельная  $RL$ -цепь

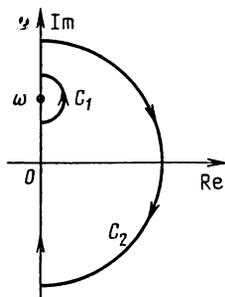


Рис. 9.4. Выбор контура интегрирования

теореме Коши, приняв во внимание, что дуга  $C_1$  есть полуокружность, а вычет в точке полюса равен  $Z(j\omega)$ , можно переписать последнюю формулу в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{Z(j\xi) d\xi}{\xi - \omega} + j\pi Z(j\omega) = 0.$$

Отсюда, разделяя вещественную и мнимую части, получаем

$$\begin{aligned} X(j\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{R(j\xi) d\xi}{\xi - \omega}, \\ R(j\omega) &= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{X(j\xi) d\xi}{\omega - \xi}. \end{aligned} \quad (9.14)$$

Найденные формулы в математике называют *парой интегральных преобразований Гильберта*.

**Пример 9.2.** Дана параллельная  $RC$ -цепь, для которой

$$R(j\omega) = \frac{R}{1 + \omega^2 (RC)^2}, \quad (9.15)$$

$$X(j\omega) = \frac{-\omega R^2 C}{1 + \omega^2 (RC)^2}. \quad (9.16)$$

Убедиться в том, что, зная вещественную часть сопротивления этой цепи, можно восстановить мнимую часть посредством преобразования Гильберта.

Введя обозначение  $\alpha = 1/(RC)$  и подставив (9.15) в (9.14), получаем:

$$X(j\omega) = \frac{1}{\pi RC^2} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{(\alpha^2 + \xi^2)(\xi - \omega)}. \quad (9.17)$$

Подинтегральная функция раскладывается в сумму элементарных дробей:

$$\frac{1}{(\alpha^2 + \xi^2)(\xi - \omega)} = \frac{a\xi + b}{\omega^2 + \xi^2} + \frac{c}{\xi - \omega},$$

где

$$a = -\frac{1}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad b = -\frac{\omega}{\alpha^2 + \omega^2}, \quad c = -a.$$

Отдельные интегралы имеют вид

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\xi - \omega} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\xi d\xi}{\alpha^2 + \xi^2} = 0, \quad \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\xi}{\alpha^2 + \xi^2} = \frac{\pi}{\alpha}.$$

Подставив их в выражение (9.17), приходим к формуле (9.16), что и требовалось доказать.

**Свойства сопротивления реактивного двухполюсника.** Важное положение теории цепей, называемое теоремой Фостера [8], касается частотных свойств сопротивления чисто реактивного двухполюсника. Формулировка данной теоремы такова: если  $Z(j\omega) = jX(j\omega)$ , то реактивное сопротивление  $X(j\omega)$  является неубываю-

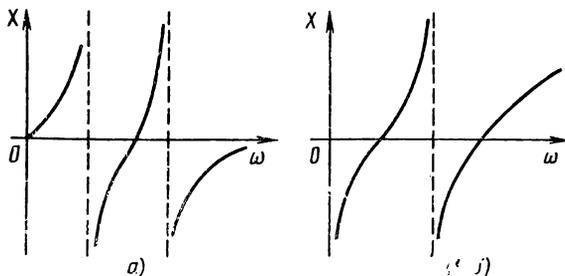


Рис. 9.5. Частотные зависимости сопротивлений реактивных двухполюсников: а — нули сопротивления на нулевой и бесконечно высокой частотах; б — полюсы сопротивления на указанных частотах

щей функцией частоты, т. е.  $dX/d\omega > 0$ . Примеры частотных зависимостей сопротивлений некоторых реактивных двухполюсников изображены на рис. 9.5, а, б.

**Пример 9.3.** Дана функция

$$Z(p) = \frac{p(p^2 + 1)}{p^2 + 4}.$$

Проверить, может ли она описывать сопротивление некоторого чисто реактивного двухполюсника.

Функция  $Z(p)$  имеет три нуля:  $z_1=0$ ,  $z_2=j$  и  $z_3=-j$ , а также два полюса:  $p_1=2j$  и  $p_2=-2j$ . Особые точки расположены на мнимой оси (характерно для реактивных цепей); число полюсов на единицу меньше числа нулей. Тем не менее цепь, описываемая приведенной функцией, не существует из-за того, что на мнимой оси подряд расположены три нуля. В промежутке между ними реактивное сопротивление должно достигать либо минимума, либо максимума. Понятно, что требование теоремы Фостера выполнено быть не может.

Итак, для реактивного сопротивления справедливы следующие положения:

- а) точки  $p=0$  и  $p=\infty$  являются особыми точками (нулями или полюсами) функции  $Z(p)$ ;
- б) на оси  $j\omega$  нули и полюсы сопротивления расположены в чередующемся порядке.

## 9.2. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ

Любые функции цепи для четырехполюсника, такие как входное сопротивление  $Z_{вх}=U_1/I_1$ , передаточное сопротивление  $Z_{п}=U_2/I_1$  или передаточную функцию по напряжению  $K=U_2/U_1$  можно получить, зная ту или иную матрицу четырехполюсника. Например, если выходной порт линейного четырехполюсника с известной А-матрицей нагружен на двухполюсник с сопротивлением  $Z_n$ , то

$$Z_{\text{вх}} = \frac{A_{11} Z_{\text{н}} + A_{12}}{A_{21} Z_{\text{н}} + A_{22}}, \quad (9.18)$$

$$K = \frac{Z_{\text{н}}}{A_{11} Z_{\text{н}} + A_{12}}. \quad (9.19)$$

Как элементы матрицы, так и сопротивление двухполюсника представляют собой дробно-рациональные функции комплексной частоты. Поэтому, например, передаточная функция  $K(p)$  может быть записана в нуль-полюсном представлении:

$$K(p) = K_0 \frac{(p - z_1)(p - z_2) \dots (p - z_m)}{(p - p_1)(p - p_2) \dots (p - p_n)}, \quad (9.20)$$

где  $K_0$  — некоторая постоянная величина.

Чтобы выяснить, как влияет расположение особых точек передаточной функции на устойчивость цепи, предположим, что входной порт четырехполюсника замкнут накоротко, т. е.  $U_1 = 0$ , в то время как  $U_2 \neq 0$  из-за некоторого запаса энергии в реактивных элементах. Данный режим описывается характеристическим уравнением

$$U_1/U_2 = 1/K(p) = 0, \quad (9.21)$$

из которого следует, что полюсы  $p_1, p_2, \dots, p_n$  передаточной функции являются корнями характеристического уравнения. Для устойчивости линейного четырехполюсника требуется, чтобы полюсы его передаточной функции располагались в левой полуплоскости. Как крайний случай, полюсы передаточной функции идеализированного чисто реактивного четырехполюсника могут размещаться на мнимой оси  $j\omega$  плоскости комплексной частоты.

В отличие от полюсов, нули функции  $K(p)$  могут располагаться в обеих полуплоскостях переменной  $p$ . Действительно, характеристическое уравнение  $K(p) = 0$  означает, что при некотором  $U_1 \neq 0$  изображение выходного напряжения  $U_2 = 0$ . Это никак не противоречит требованию устойчивости цепи.

Для четырехполюсника жесткого ограничения на числа нулей и полюсов не существует. Это связано с тем, что на фазовый угол частотного коэффициента передачи нельзя наложить каких-либо энергетических соотношений. Однако частотные коэффициенты передачи реальных цепей всегда стремятся к нулю при неограниченном росте частоты. Поэтому обычно требуют, чтобы число полюсов функции  $K(p)$  превышало число нулей, т. е. в бесконечно удаленной точке комплексной плоскости должен существовать не полюс, а нуль передаточной функции.

**Минимально-фазовые и неминимально-фазовые цепи.** Говорят, что четырехполюсник, не имеющий нулей передаточной функции в правой полуплоскости, является *минимально-фазовой цепью*. Если же нули в правой полуплоскости имеются, то такой четырехполюсник называют *неминимально-фазовой цепью*.

Данная терминология связана со следующим обстоятельством. Предположим, что нули  $z_1$  и  $z_2$  некоторой передаточной функции располагаются в обеих полуплоскостях (рис. 9.6). Пусть  $p=j\omega$ , т. е. цепь находится под гармоническим внешним воздействием. Указанным точкам соответствуют два вектора на комплексной плоскости:  $V_1=j\omega-z_1$  и  $V_2=j\omega-z_2$ , которые отвечают некоторым сомножителям в числителе формулы (9.20). При изменении частоты  $\omega$  оба вектора поворачиваются и изменяют свою длину. Разница между ними состоит в том, что вектор  $V_1$  с изменением частоты от  $-\infty$  до  $+\infty$  увеличивает фазовый угол частотного коэффициента передачи на  $\pi$  радиан, в то время как вектор  $V_2$  при тех же условиях уменьшает угол на ту же величину. Коэффициент передачи четырехполюсника является дробно-рациональной функцией, изменению аргумента которой

$$\Delta \arg K(j\omega) \Big|_{\omega=-\infty}^{\omega=+\infty} = \Delta \arg(\text{числит.}) - \Delta \arg(\text{знаменат.}).$$

Поэтому при одинаковом числе нулей и полюсов неминимально-фазовая цепь обеспечивает большее по абсолютному значению изменение фазы коэффициента передачи по сравнению с минимально-фазовой цепью.

Расположение нулей функции  $K(p)$  связано с топологической структурой цепи. Было показано, что минимально-фазовым будет любой четырехполюсник, у которого прохождение сигнала со входа на выход можно полностью прекратить путем разрыва лишь одной ветви. Например, минимально-фазовыми цепями будут любые четырехполюсники лестничной структуры (рис. 9.7).

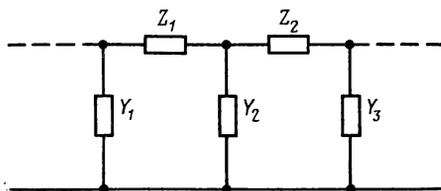


Рис. 9.7. Цепь лестничной структуры

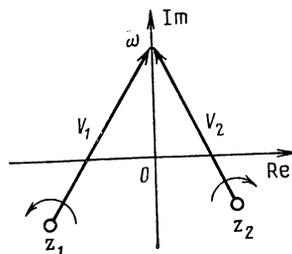


Рис. 9.6. Влияние нулей сопротивления, располагающихся в левой и правой полуплоскостях

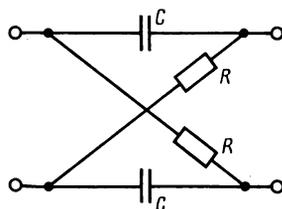


Рис. 9.8. Симметричный мостовой RC-четырёхполюсник

Неминимально-фазовые четырехполюсники имеют, как правило, структуру мостовых (скрещенных) цепей, в которых сигнал на выход проходит по двум или более независимым каналам. Прос-

тейшая неминимально-фазовая цепь — симметричный мостовой  $RC$ -четырёхполюсник (рис. 9.8). Для этой цепи передаточная функция по напряжению

$$K(p) = \frac{pRC - 1}{pRC + 1} \quad (9.22)$$

имеет единственный нуль  $z = 1/(RC)$ , располагающийся в правой полуплоскости.

**Связь между АЧХ и ФЧХ минимально-фазового четырёхполюсника.** Передаточная функция  $K(p)$  любого устойчивого четырёхполюсника в правой полуплоскости переменной  $p$  не имеет полюсов и поэтому является аналитической функцией в этой области. Если к тому же этот четырёхполюсник представляет собой минимально-фазовую цепь, то его передаточная функция в правой полуплоскости не имеет и нулей. Значит, аналитической оказывается функция

$$\ln K(p) = \ln |K(p)| + j \arg K(p).$$

Поэтому можно использовать, как и в случае двухполюсника, формулы преобразования Гильберта и записать связь между модулем и аргументом частотного коэффициента передачи:

$$\arg K(j\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln |K(j\xi)|}{\xi - \omega} d\xi, \quad (9.23)$$

$$\ln |K(j\omega)| = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\arg K(j\xi)}{\omega - \xi} d\xi.$$

Таким образом, если АЧХ четырёхполюсника минимально-фазового типа задана, то его ФЧХ жестко связана с ней. Если же четырёхполюсник принадлежит к классу цепей неминимальной фазы, то АЧХ и ФЧХ можно выбирать независимо друг от друга.

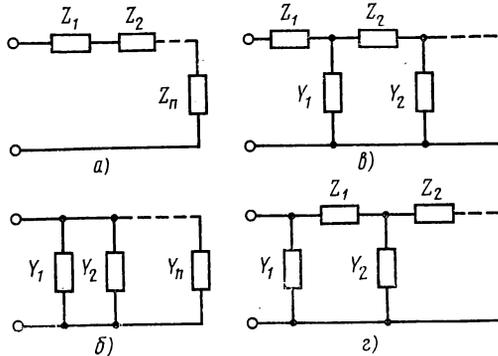
### 9.3. СИНТЕЗ ПАССИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ

Классическая задача синтеза двухполюсника формулируется следующим образом: задана одна из функций цепи,  $Z(p)$  или  $Y(p)$ . Выполняются все условия, гарантирующие принадлежность ее к функциям физически реализуемых устойчивых двухполюсников. Требуется найти структуру цепи и номиналы входящих в нее элементов.

Обычно, проводя синтез, задаются той или иной структурой цепи. Процедура синтеза неоднозначна, и может оказаться, что одну и ту же функцию можно реализовать несколькими способами. Тогда предпочтение отдадут тому варианту, который требует, например, меньшего числа элементов.

**Основная идея синтеза.** Любой метод синтеза двухполюсника основан на том, что заданная функция  $Z(p)$  или  $Y(p)$  подвергается

Рис. 9.9. Некоторые важнейшие структуры цепей: *а* — последовательная; *б* — параллельная; *в* — лестничная с Т-образными звеньями; *г* — лестничная с П-образными звеньями



ся ряду последовательных преобразований. На каждом этапе выделяя определенное выражение, которое можно однозначно сопоставить с тем или иным физическим элементом цепи. Характер преобразований заранее устанавливается выбранной структурой цепи (рис. 9.9, *а—г*).

Легко видеть, что для схемы *а*

$$Z(p) = Z_1 + Z_2 + \dots + Z_n; \quad (9.24)$$

для схемы *б*

$$Y(p) = Y_1 + Y_2 + \dots + Y_n; \quad (9.25)$$

для схемы *в*

$$Z(p) = Z_1 + \frac{1}{Y_1 + \frac{1}{Z_2 + \dots}}; \quad (9.26)$$

для схемы *г*

$$Y(p) = Y_1 + \frac{1}{Z_1 + \frac{1}{Y_2 + \dots}}. \quad (9.27)$$

Выражения вида (9.26) и (9.27) называют *цепными* или *непрерывными дробями*.

Если все компоненты  $Z_1, Z_2, \dots, Z_n$  и  $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$  идентифицированы с некоторыми известными элементами, то задача синтеза двухполюсников решена.

**Синтез реактивных двухполюсников.** Изучим основные приемы синтеза реактивных двухполюсников, образующихся из элементов типа  $L$  и  $C$ . Реактивные двухполюсники со структурами *а* и *б* принято называть *цепями Фостера*. Лестничные цепи вида *в* и *г* называют *цепями Кауэра*.

Обратимся к конкретным примерам синтеза.

**Пример 9.4.** Входное сопротивление задано в виде

$$Z(p) = \frac{(p^2 + 1)(p^2 + 25)}{p(p^2 + 4)} = \frac{p^4 + 26p^2 + 25}{p^3 + 4p}. \quad (9.28)$$

Построить двухполюсник типа Фостера, имеющий такое сопротивление.

Разделив в формуле (9.28) числитель на знаменатель, выделяем первый элемент цепи:

$$Z(p) = p + \frac{22p^2 + 25}{p^3 + 4p} = p + Z'(p),$$

который оказывается индуктивной катушкой с параметром 1 Гн (здесь и в дальнейшем числовые значения выбраны из соображения наглядности расчетов).

Далее входное сопротивление  $Z'(p)$  можно разложить на простые дроби:

$$Z'(p) = \frac{25}{4p} + \frac{63p/4}{p^2 + 4} = \frac{25}{4p} + Z''(p).$$

Первое слагаемое в правой части соответствует конденсатору с емкостью  $4/25$  Ф.

Для того чтобы найти последний элемент цепи, отвечающий сопротивлению  $Z''(p)$ , целесообразно перейти от сопротивления к проводимости:

$$Y''(p) = 1/Z''(p) = \frac{p^2 + 4}{63p/4} = \frac{4p}{63} + \frac{16}{63p}.$$

Можно заметить, что этой проводимости соответствует параллельное соединение конденсатора с емкостью  $4/63$  Ф и катушки с индуктивностью  $63/16$  Гн. Схема цепи приведена на рис. 9.10.

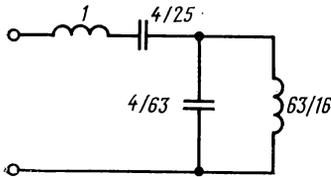


Рис. 9.10. Схема двухполюсника типа Фостера

Для синтеза реактивного двухполюсника по методу Кауэра нужно представить задаваемое сопротивление (или проводимость) в виде цепной дроби. Соответствующая вычислительная процедура получила название *деление — обращение остатка*.

**Пример 9.5.** Найти схему Кауэра, реализующую сопротивление вида (9.28).

Будем делить числитель на знаменатель, начиная со старших степеней:

$$\frac{p^4 + 26p^2 + 25}{p^3 + 4p} \Big| \frac{p^3 + 4p}{p}. \quad (9.29)$$

Как и в схеме Фостера, первым элементом будет последовательно включенная катушка с индуктивностью 1 Гн.

Записывая

$$Z(p) = p + \frac{1}{\frac{p^3 + 4p}{22p^2 + 25}},$$

видим, что знаменатель в формуле (9.29) должен быть разделен на остаток. В этом и заключается процедура обращения остатка. Дальнейшие этапы синтеза чередуются:

*деление:*

$$\begin{array}{r} - \quad p^3 + 4p \mid \frac{22p^2 + 25}{63p/22} , \\ \quad \frac{p^3 + \frac{25p}{22}}{63p/22} \end{array}$$

*обращение остатка:*

$$\begin{array}{r} - \quad \frac{22p^2 + 25}{25} \mid \frac{63p/22}{484p/63} , \\ \quad \frac{22p^2}{25} \end{array}$$

*деление:*

$$63p/22 \mid \frac{25}{63p/550} .$$

Объединив все эти результаты, запишем функцию  $Z(p)$  в виде цепной дроби

$$Z(p) = p + \frac{1}{\frac{p}{22} + \frac{1}{\frac{484}{63}p + \frac{1}{\frac{63p}{550}}}}$$

которой отвечает схема Кауэра, приведенная на рис. 9.11 слева.

Два предыдущих примера наглядно показывают, что синтез двухполюсников осуществляется неоднозначно. Можно найти еще одну цепь с таким же входным сопротивлением, применив метод Кауэра и начиная деление не с высших, а с низших степеней.

**Пример 9.6.** Найти цепь с входным сопротивлением вида (10.28), используя метод Кауэра и начиная деление с низших степеней многочленов.

Записывая

$$Z(p) = \frac{25 + 26p^2 + p^4}{4p + p^3} ,$$

выполняя деление и обращение остатка, получаем

$$Z(p) = \frac{25}{4p} + \frac{1}{\frac{16}{79p} + \frac{1}{\frac{6241}{252p} + \frac{79p}{63}}} .$$

Данной цепной дроби отвечает реактивный двухполюсник, схема которого приведена на рис. 9.11 справа.



Рис. 9.11. Схемы двухполусников типа Кауэра

Метод Кауэра особенно удобен тем, что эта процедура относительно легко алгоритмизируется и может послужить основой создания эффективных программ для компьютера. Однако необходимо иметь в виду, что на каком-либо этапе процесса последовательного деления остаток может оказаться отрицательным. Формально это означает отрицательное значение соответствующего реактивного элемента цепи, а фактически говорит о нереализуемости синтезируемой структуры. Иногда удается избежать этой трудности, начав, например, деление не с высших, а с низших степеней. В общем случае приходится использовать более сложные процедуры синтеза, описанные в специальной литературе.

### В О П Р О С Ы

1. Как определяется понятие комплексной частоты?
2. Каков общий вид произвольной функции цепи?
3. Перечислите основные закономерности расположения нулей и полюсов импеданса устойчивого линейного двухполусника.
4. Дайте определение понятия положительной вещественной функции.
5. Какие двухполусники называют цепями минимального сопротивления?
6. Как выглядят формулы связи между вещественной и мнимой частями сопротивления линейного двухполусника?
7. Каковы отличительные свойства передаточной функции минимально-фазового четырехполусника?
8. Перечислите этапы синтеза двухполусника по методам Фостера и Кауэра.

## 10. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ

Среди электрических цепей, применяемых в радиоэлектронике, особое место занимают *линии передачи* — системы, предназначенные для соединения источника сигналов и приемника, разнесенных в пространстве. Линией передачи служит, например, пара проводников длиной  $l$ , протяженная вдоль оси  $z$ . В практически интересных случаях поперечный размер линии  $d \ll l$ .

Известно, что скорость света  $c = 3 \cdot 10^8$  м/с является предельной скоростью распространения электромагнитных возмущений. Эта

скорость весьма велика, однако часто встречаются ситуации, когда время распространения сигнала вдоль линии  $t=l/c$  соизмеримо с длительностью передаваемого колебания. При этом уже нельзя считать, что процессы в различных сечениях линии протекают по одному и тому же закону. Таким образом, линия передачи достаточно большой длины не является квазистационарной цепью (гл. 1).

Теория линий передачи должна быть построена таким образом, чтобы учитывать эффект конечной скорости распространения сигналов. Следует исходить из того, что в неквазистационарных цепях невозможно выделить области пространства, в которых локализовались бы только энергия электрического поля или только энергия магнитного поля. Вместо этого вводят представление о распределении напряжения и тока вдоль оси. На этом основании линии передачи, длины которых соизмеримы с длиной волны, называют *цепями с распределенными параметрами*.

### 10.1. РЕГУЛЯРНАЯ ЛИНИЯ ПЕРЕДАЧИ И ЕЕ ПАРАМЕТРЫ

Так принято называть линию, у которой поперечная конфигурация проводников неизменна по длине, а параметры заполняющей среды, такие как относительная диэлектрическая проницаемость  $\epsilon$  и относительная магнитная проницаемость  $\mu$ , постоянны в пространстве. Будем вначале полагать, что источники, создающие токи и напряжения в линии, находятся вне рассматриваемой области пространства. В этом смысле можно говорить о том, что будут изучаться свободные колебания распределенных систем.

**Первичные параметры линии передачи.** Чтобы описать распределенную систему в терминах теории цепей, принято вводить погонные характеристики линий передачи.

Наличие токов в проводниках связано с существованием магнитного поля. Поэтому отрезок линии имеет некоторую индуктивность; при каскадном соединении отрезков их индуктивности складываются. Пусть  $L_1$  — погонная индуктивность (Гн/м) регулярной линии, которая численно равна индуктивности отрезка линии длиной 1 м. Тогда бесконечно малый отрезок длиной  $dz$  будет иметь индуктивность  $L_1 dz$ .

Подобно конденсатору, линия передачи способна также запасать энергию электрического поля. Это свойство характеризуют параметром  $C_1$  — погонной емкостью линии (Ф/м); каждому отрезку длиной  $dz$  отвечает емкость  $C_1 dz$ .

Проводники реальной линии имеют некоторое активное сопротивление, которое учитывают, вводя погонное сопротивление потерь  $R_1$  (Ом/м). Наконец, степень неидеальности изолятора линии характеризуют погонной проводимостью утечки  $G_1$  (См/м).

В теории распределенных цепей погонные характеристики линий принято называть их *первичными параметрами*.

Значения погонных параметров зависят от конфигурации проводников в поперечном сечении и от свойств заполняющего диэлектрика. Формулы для расчета этих параметров получают методами теории электромагнитного поля.

**Коаксиальная линия передачи.** Регулярная коаксиальная линия передачи (рис. 10.1,а) — это система из двух металлических

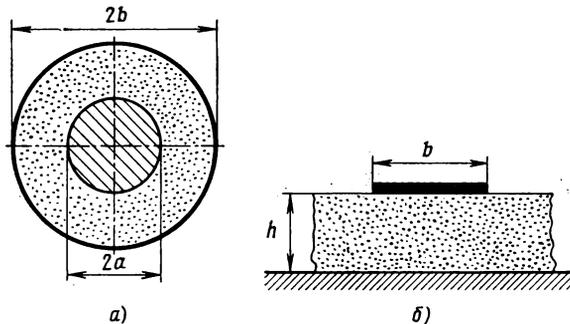


Рис. 10.1. Конструкции некоторых линий передачи:  
а — коаксиальная линия; б — микрополосковая линия

цилиндров, пространство между которыми заполнено диэлектриком. Коаксиальные линии широко используют для передачи сигналов в диапазоне частот от нескольких герц до десятков гигагерц. Распространены гибкие коаксиальные кабели, в которых диэлектриком служит полиэтилен ( $\epsilon=2,25$ ) или фторопласт ( $\epsilon=2,08$ ).

Погонную индуктивность коаксиальной линии определяют по формуле

$$L_1 = \frac{\mu_0}{2\pi} \ln \left( \frac{b}{a} \right), \quad (10.1)$$

где  $a$  и  $b$  — радиусы внутреннего и внешнего проводников,  $\mu_0 = 1,2566 \cdot 10^{-6}$  Гн/м — магнитная постоянная вакуума.

Чтобы найти погонную емкость коаксиальной линии, следует воспользоваться известной из курса физики формулой емкости цилиндрического конденсатора

$$C_1 = \frac{2\pi\epsilon\epsilon_0}{\ln(b/a)}, \quad (10.2)$$

где  $\epsilon_0 = 8,842 \cdot 10^{-12}$  Ф/м — фундаментальная константа, называемая электрической постоянной вакуума.

Погонное сопротивление потерь коаксиальной линии зависит от частоты. Это связано с тем, что на высоких частотах ток проводимости «вытесняется» на поверхность проводника (поверхностный эффект). Расчетная формула имеет вид

$$R_1 = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{\omega\mu_0}{2\sigma}} \left( \frac{1}{a} + \frac{1}{b} \right), \quad (10.3)$$

где  $\sigma$  — удельная объемная проводимость металла. Токоведущие поверхности обычно выполняют из меди ( $\sigma=5,7 \cdot 10^7$  См/м) или серебра ( $\sigma=6,1 \cdot 10^7$  См/м).

Погонную проводимость утечки для любой линии рассчитывают по формуле

$$G_1 = \omega C_1 \operatorname{tg} \delta, \quad (10.4)$$

где  $\delta$  — угол диэлектрических потерь заполняющего материала. Диэлектрики, применяемые в радиоэлектронных цепях, имеют достаточно малые углы потерь. Так, для полиэтилена на радиочастотах  $\delta \approx 2 \cdot 10^{-4}$  радиан.

**Микрополосковая линия передачи.** В интегральных устройствах СВЧ-диапазона применяют микрополосковые линии передачи. Поперечное сечение такой линии изображено на рис. 10.1,б. Линия представляет собой полоску хорошо проводящего металла шириной  $b$ , расположенную над проводящим основанием и отделенную от него слоем высококачественного диэлектрика толщиной  $h$ . Диэлектриком чаще всего служит двуокись алюминия (сапфир, поликор) с параметрами  $\varepsilon=9,5$ ,  $\delta=10^{-5}$ .

Задача о расчете первичных параметров микрополосковой линии передачи является весьма сложной, так как приходится учитывать искажение структуры поля вблизи краев полоски. Приближенные формулы, позволяющие проводить расчеты с точностью 10—20% и пригодные при условии  $h \ll b$ , имеют вид

$$L_1 = \mu_0 h / b, \quad (10.5)$$

$$C_1 = \varepsilon \varepsilon_0 b / h, \quad (10.6)$$

$$R_1 = \frac{1}{b} \sqrt{2\omega\mu_0/\sigma}, \quad (10.7)$$

$$G_1 = \omega C_1 \operatorname{tg} \delta. \quad (10.8)$$

**Пример 10.1.** Электронный вольтметр подключен к параллельному колебательному контуру отрезком коаксиального кабеля длиной 1,5 м. Параметры кабеля:  $a=0,25$  мм,  $b=2,5$  мм,  $\varepsilon=2,25$ . Контур имеет емкость  $C=250$  пФ и настроен на частоту  $f=3$  МГц. Оценить влияние кабеля на работу устройства.

Длина кабеля значительно меньше длины волны. Поэтому кабель приближенно ведет себя как квазистационарная цепь. По формулам (10.1) и (10.2) находим  $L_1=0,46$  мкГн/м,  $C_1=54,3$  пФ/м. Отрезок кабеля может быть эквивалентно представлен Г-образным четырехполюсником, который состоит из последовательно включенного индуктивного элемента с  $L=0,69$  мкГн и параллельно включенного емкостного элемента с  $C=81,45$  пФ. Модули соответствующих реактивных сопротивлений  $|X_L|=2\pi fL=13$  Ом,  $|X_C|=1/(2\pi fC)=651$  Ом. В первом приближении влиянием индуктивного сопротивления линии можно пренебречь и считать, что кабель добавляет к емкости контура примерно 80 пФ. Поэтому контурную емкость нужно будет сократить, чтобы поддержать резонансную частоту неизменной.

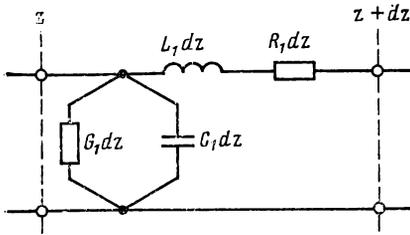


Рис. 10.2. К выводу телеграфных уравнений

Рассмотренный пример демонстрирует определенные трудности, возникающие при измерениях на высоких частотах.

**Телеграфные уравнения.** На рис. 10.2 изображена схема, описывающая явления в бесконечно малом отрезке регулярной линии передачи. Данная схема содержит в себе воображаемые двухполюсники типа  $L$ ,  $C$ ,  $R$  и  $G$  и

поэтому может анализироваться обычными методами теории цепей.

Для того чтобы получить дифференциальные уравнения регулярной линии передачи, следует записать условия электрического равновесия в элементарном отрезке длиной  $dz$ , а затем перейти к пределу при  $dz \rightarrow 0$ .

На основании второго закона Кирхгофа напряжение в сечении с координатой  $z$  складывается из напряжения в сечении с координатой  $z + dz$  и напряжения на последовательном соединении элементов  $R_1 dz$  и  $L_1 dz$ :

$$u(z, t) = u(z + dz, t) + R_1 dz \cdot i(z + dz, t) + L_1 dz \frac{\partial i(z + dz, t)}{\partial t}. \quad (10.9)$$

На основании первого закона Кирхгофа токи в узле с координатой  $z$  удовлетворяют соотношению

$$i(z, t) = i(z + dz, t) + G_1 dz \cdot u(z, t) + C_1 dz \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}. \quad (10.10)$$

Следует обратить внимание на то, что в формулах (10.9) и (10.10) использованы частные производные по времени, так как функции  $u(z, t)$  и  $i(z, t)$  зависят от двух аргументов.

Перепишем два последних уравнения следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{u(z + dz, t) - u(z, t)}{dz} &= -R_1 i(z + dz, t) - L_1 \frac{\partial i(z + dz, t)}{\partial t}, \\ \frac{i(z + dz, t) - i(z, t)}{dz} &= -G_1 u(z, t) - C_1 \frac{\partial u(z, t)}{\partial t}. \end{aligned}$$

Переходя к пределу при  $dz \rightarrow 0$ , получим отсюда систему двух линейных дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

$$\begin{aligned} \frac{\partial u}{\partial z} &= -R_1 i - L_1 \frac{\partial i}{\partial t}, \\ \frac{\partial i}{\partial z} &= -G_1 u - C_1 \frac{\partial u}{\partial t}. \end{aligned} \quad (10.11)$$

Эти уравнения вывел английский физик В. Томсон (лорд Кельвин) в середине XIX в. при изучении электромагнитных процессов в трансконтинентальных кабельных линиях телеграфной связи. Поэтому они получили название *телеграфных уравнений*.

Систему (10.11) нетрудно свести к одному дифференциальному уравнению второго порядка относительно напряжения или тока. Для этого достаточно, например, продифференцировать первое уравнение по  $z$ , второе уравнение по  $t$ , а затем из двух полученных равенств исключить смешанную производную. В результате получаем уравнение относительно напряжения в линии

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = R_1 G_1 u + (R_1 C_1 + L_1 G_1) \frac{\partial u}{\partial t} + L_1 C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (10.12)$$

Совершенно аналогично выглядит дифференциальное уравнение относительно тока

$$\frac{\partial^2 i}{\partial z^2} = R_1 G_1 i + (R_1 C_1 + L_1 G_1) \frac{\partial i}{\partial t} + L_1 C_1 \frac{\partial^2 i}{\partial t^2}. \quad (10.13)$$

## 10.2. ВОЛНОВЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ БЕЗ ПОТЕРЬ

Телеграфные уравнения (10.11), а также эквивалентные им уравнения (10.12) или (10.13) описывают все многообразие явлений, которые можно наблюдать в линиях передачи. Найдем общий вид решений таких уравнений для случаев, часто встречающихся в радиотехнических приложениях, когда первичные параметры  $R_1$  и  $G_1$ , учитывающие потери энергии в линии, можно положить равными нулю. Данное предположение позволяет существенно упростить уравнение (10.12) и записать его в виде

$$\frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = L_1 C_1 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (10.14)$$

Подобные уравнения в математической физике называют *волновыми уравнениями*.

Изыскный способ получения общего решения волнового уравнения основан на использовании операторного метода. Сущность его заключается в следующем. Применим интегральное преобразование Лапласа по переменной  $t$  к обеим частям уравнения (10.14):

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} \int_0^{\infty} u(z, t) e^{-pt} dt = L_1 C_1 p^2 \int_0^{\infty} u(z, t) e^{-pt} dt. \quad (10.15)$$

Здесь без ограничения общности положено, что начальные распределения напряжения  $u(z, 0)$  и производной  $\partial u(z, 0)/\partial t$  обращаются в нуль. Действительно, всегда можно считать, что начальный запас энергии в линии обусловлен не напряжением, а током  $i(z, 0)$ .

Интегралы в формуле (10.15) являются изображениями искомого решения, которые в дальнейшем будем обозначать символом  $U(z, p)$ .

Заметим, что величина  $p$  служит не переменной, по которой проводится дифференцирование, а свободным параметром. Поэтому можно, заменяя знак частной производной на знак обыкновенной производной, записать следующее дифференциальное уравнение относительно изображения напряжения в линии

$$\frac{d^2 U}{dz^2} - p^2 L_1 C_1 U = 0. \quad (10.16)$$

Итак, применив преобразование Лапласа, удается свести проблему решения уравнения с частными производными к гораздо более простой задаче решения дифференциального уравнения с обыкновенной производной второго порядка.

Так как коэффициенты уравнения (10.16) для регулярной линии передачи не зависят от  $z$ , то общее решение этого уравнения находится элементарно:

$$U(z, p) = A_1(p) \exp(-p \sqrt{L_1 C_1} z) + A_2(p) \exp(p \sqrt{L_1 C_1} z). \quad (10.17)$$

Здесь  $A_1(p)$  и  $A_2(p)$  — произвольные функции переменной  $p$ .

Пусть оригиналом по отношению к  $A_1(p)$  является некоторая функция  $f_1(t)$ . На основании теоремы запаздывания (гл. 8) первому слагаемому в правой части формулы (10.17) отвечает оригинал  $f_1(t - \sqrt{L_1 C_1} z)$ . Аналогично, если  $f_2(t)$  — оригинал по отношению к изображению  $A_2(p)$ , то второе слагаемое описывает функцию  $f_2(t + \sqrt{L_1 C_1} z)$ .

Таким образом, решение волнового уравнения для линии без потерь при  $t \geq 0$  имеет вид

$$u(z, t) = f_1(t - \sqrt{L_1 C_1} z) + f_2(t + \sqrt{L_1 C_1} z). \quad (10.18)$$

**Понятие одномерного волнового процесса.** Аргументы функций  $f_1$  и  $f_2$  в формуле (10.18) имеют весьма характерный вид. Это позволяет выяснить наглядный смысл полученного решения. Например, аргумент первого слагаемого

$$\xi = t - \sqrt{L_1 C_1} z$$

остаётся постоянным, если при увеличении  $t$  значение  $z$  возрастает со скоростью

$$v = 1/\sqrt{L_1 C_1}. \quad (10.19)$$

Это означает, что если при  $t=0$  зафиксировать некоторый «профиль»  $f_1(z, 0)$ , то спустя  $t$  секунд этот профиль без деформации переместится в сторону увеличения координаты  $z$  на расстояние  $l=vt$  (рис. 10.3,а).

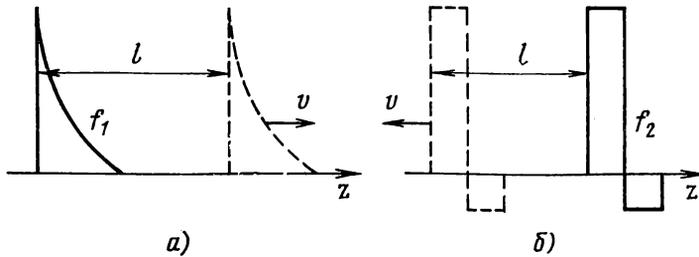


Рис. 10.3. Волны общего вида в линии передачи:  
а — прямая волна; б — обратная волна

Аналогично, рассматривая аргумент второго слагаемого

$$\eta = t + \sqrt{L_1 C_1} z,$$

убеждаемся, что профиль  $f_2(z, 0)$  с ростом  $t$  без деформации перемещается в сторону уменьшения  $z$  с той же скоростью  $v$  (рис. 10.3,б).

Говорят, что выражение вида

$$u(z, t) = f_1(t - z/v) + f_2(t + z/v) \quad (10.20)$$

с произвольными функциями  $f_1$  и  $f_2$  описывает *одномерный волновой процесс* общего вида. Функция  $f_1$  характеризует *прямую*, а функция  $f_2$  — *обратную волну* (термины связаны с конкретным выбором положительного направления вдоль оси распространения  $z$  и поэтому, конечно, условны).

В соответствии с формулой (10.19) скорость распространения прямой и обратной волн зависит от значений первичных параметров  $L_1$  и  $C_1$ . Обратившись к формулам (10.1) и (10.2), а также (10.5) и (10.6), можно заметить, что для изученных ранее регулярных линий передачи эта скорость совпадает со скоростью света в заполняющем диэлектрике.

**Волновое сопротивление линии передачи без потерь.** Примечательно, что напряжение  $u$  и ток  $i$  входят в телеграфные уравнения (10.11) весьма симметричным образом. Это наводит на мысль о том, что между распределениями напряжения и тока вдоль линии должна существовать тесная связь.

Действительно, представив напряжение в виде

$$u = f_1(\xi) + f_2(\eta), \quad (10.21)$$

будем искать ток по формуле

$$i = Af_1(\xi) + Bf_2(\eta), \quad (10.22)$$

где  $A$  и  $B$  — неизвестные пока постоянные коэффициенты.

Положив в уравнениях (10.11)  $R_1 = G_1 = 0$ , подставим выражения (10.21) и (10.22) в первое уравнение полученной системы:

$$-\sqrt{L_1 C_1} \frac{\partial f_1}{\partial \xi} + \sqrt{L_1 C_1} \frac{\partial f_2}{\partial \eta} = -L_1 A \frac{\partial f_1}{\partial \xi} - L_1 B \frac{\partial f_2}{\partial \eta}.$$

Так как функции  $f_1$  и  $f_2$  полностью произвольны, данное равенство будет выполняться тождественно лишь в том случае, если

$$A = \sqrt{C_1/L_1}; \quad B = -\sqrt{C_1/L_1}.$$

Таким образом, ток и напряжение прямой волны пропорциональны друг другу:

$$u_{\text{пр}}/i_{\text{пр}} = Z_{\text{в}} = \sqrt{L_1/C_1}, \quad (10.23)$$

где  $Z_{\text{в}}$  — размерная величина, получившая название *волнового сопротивления* регулярной линии передачи.

Аналогично, между током и напряжением обратной волны имеет место следующая связь:

$$u_{\text{обр}}/i_{\text{обр}} = -Z_{\text{в}} = -\sqrt{L_1/C_1}. \quad (10.24)$$

Различие знаков в формулах (10.23) и (10.24) имеет принципиальное значение. Если зафиксировать некоторое сечение линии с координатой  $z = z_0$ , то ток, втекающий со стороны области с координатами  $z < z_0$ , согласован по направлению с тем напряжением, которое существует в выбранном сечении. Это означает, что полубесконечная линия, располагающаяся при  $z > z_0$ , в случае прямой волны ведет себя подобно нагрузке, а в случае обратной волны — подобно генератору. Значит, прямая волна переносит мощность в сторону увеличения координаты  $z$ , а обратная волна — в противоположном направлении.

Расчетные формулы, по которым находят волновые сопротивления (Ом), таковы:

коаксиальная линия

$$Z_{\text{в}} = \frac{60}{\sqrt{\epsilon}} \ln \left( \frac{b}{a} \right); \quad (10.25)$$

микростриповая линия

$$Z_{\text{в}} = \frac{120\pi}{\sqrt{\epsilon}} \frac{h}{b}. \quad (10.26)$$

Линии, применяемые в радиотехнике, имеют волновые сопротивления от нескольких десятков до нескольких сотен ом. Следует особо подчеркнуть: волновое сопротивление является коэффициентом пропорциональности между напряжением и током в бегущей волне. Этот параметр никак не связан с омическими потерями в линии передачи.

**Решение задачи Коши.** Для регулярной линии передачи можно сформулировать задачу Коши, позволяющую учесть влияние

начальных условий на процесс свободных колебаний в распределенной цепи (сравните с гл. 7). Для этого необходимо располагать функциями  $u(z, 0)$  и  $i(z, 0)$ , которые описывают начальные распределения напряжения и тока при  $t=0$ .

В общем случае происходит возбуждение как прямой, так и обратной волны. Действительно, имеют место два очевидных равенства

$$f_1(z, 0) + f_2(z, 0) = u(z, 0),$$

$$f_1(z, 0) - f_2(z, 0) = Z_B i(z, 0),$$

из которых следует, что начальный профиль прямой волны

$$f_1(z, 0) = 1/2[u(z, 0) + Z_B i(z, 0)], \quad (10.27)$$

в то время как начальный профиль обратной волны

$$f_2(z, 0) = 1/2[u(z, 0) - Z_B i(z, 0)]. \quad (10.28)$$

Подбирая должным образом функции  $u(z, 0)$  и  $i(z, 0)$ , можно селективно возбуждать либо прямую, либо обратную волну. В этом смысле данные волны подобны двум независимым модам в системе связанных колебательных контуров (гл. 7).

Отметим, что задача о распространении импульсных колебаний вдоль распределенных цепей становится гораздо сложнее, если учитывать влияние потерь. Здесь по мере распространения происходит не только уменьшение амплитуды импульса, но и трансформация его формы. Более подробно этот вопрос освещен в [9].

### 10.3. ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Очень часто приходится иметь дело с гармоническим режимом линии передачи при известной частоте колебаний  $\omega$ . В этом случае

$$\begin{aligned} u(z, t) &= \operatorname{Re}[\dot{U}(z) \exp(j\omega t)], \\ i(z, t) &= \operatorname{Re}[I(z) \exp(j\omega t)]. \end{aligned} \quad (10.29)$$

Подставив эти равенства в систему телеграфных уравнений (10.11), после сокращения на общий множитель  $\exp(j\omega t)$  имеем следующую систему уравнений

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{U}}{dz} &= -Z_1 \dot{I}, \\ \frac{dI}{dz} &= -Y_1 \dot{U} \end{aligned} \quad (10.30)$$

относительно комплексных амплитуд  $\dot{U}(z)$  и  $I(z)$ . Здесь введены комплексные, зависящие от частоты первичные параметры

$$Z_1 = R_1 + j\omega L; \quad Y_1 = G_1 + j\omega C_1. \quad (10.31)$$

Если продифференцировать по  $z$  обе части уравнений, входящих в систему (10.30), то получается одно дифференциальное уравнение второго порядка либо относительно напряжения, либо относительно тока:

$$\frac{d^2 \dot{U}}{dz^2} - Z_1 Y_1 \dot{U} = 0, \quad (10.32)$$

$$\frac{d^2 \dot{I}}{dz^2} - Z_1 Y_1 \dot{I} = 0. \quad (10.33)$$

В теории волновых процессов уравнения вида (10.32) или (10.33) носят название *уравнений Гельмгольца* по имени выдающегося немецкого ученого прошлого века. По своей структуре эти уравнения аналогичны тем, которые описывают собственные колебания  $LC$ -контура (гл. 7). Принципиальное отличие состоит в том, что уравнения Гельмгольца определяют не временные, а пространственные характеристики процессов.

В уравнении (10.32) выразим коэффициент  $Z_1 Y_1$  через новый параметр  $\gamma$ , определяемый следующим образом:

$$\gamma = \sqrt{Z_1 Y_1}. \quad (10.34)$$

Данную величину, в общем случае комплексную, называют *коэффициентом распространения* гармонической волны в рассматриваемой линии передачи на заданной частоте. В развернутой форме

$$\gamma = \alpha + j\beta. \quad (10.35)$$

Здесь  $\alpha$  — *коэффициент ослабления*,  $\beta$  — *коэффициент фазы*. Обе эти величины имеют одинаковые размерности  $m^{-1}$ .

Общее решение уравнения Гельмгольца относительно комплексной амплитуды напряжения в линии имеет, очевидно, следующий вид:

$$\dot{U}(z) = A \exp(-\gamma z) + B \exp(\gamma z), \quad (10.36)$$

где комплексные числа  $A$  и  $B$  служат произвольными постоянными.

**Гармонические волны в линии без потерь.** Изучим вначале частный случай линии без омических потерь, для которой  $Z_1 = j\omega L_1$ ,  $Y_1 = j\omega C_1$ . Из формулы (10.34) следует, что здесь величина  $\gamma$  окажется мнимой:

$$\gamma = j\beta = j\omega \sqrt{L_1 C_1}. \quad (10.37)$$

Рассмотрим первое слагаемое в решении (10.36), положив амплитудный коэффициент равным вещественному числу  $U_m$ . При этом

$$\dot{U}(z) = U_m \exp(-j\beta z), \quad (10.38)$$

или, переходя от комплексной амплитуды к мгновенному значению напряжения,

$$u(z, t) = U_m \cos(\omega t - \beta z). \quad (10.39)$$

Выражения вида (10.38) или (10.39) описывают гармоническую волну, распространяющуюся вдоль линии передачи без затухания в сторону возрастания координаты  $z$ .

Действительно, изобразим графически то распределение напряжения вдоль линии, которое существует в момент времени  $t=0$  (рис. 10.4). Эта «мгновенная фотография» представляет собой косинусоидальную функцию  $u(z, 0) = U_m \cos \beta z$ , пространственный период которой

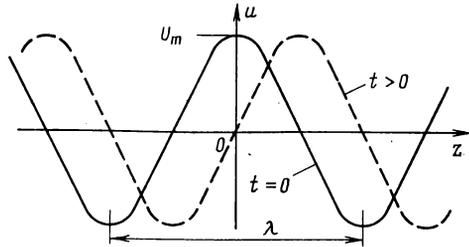


Рис. 10.4. Гармоническая волна в линии передачи

$$\lambda = 2\pi/\beta \quad (10.40)$$

называют *длиной волны* в линии передачи. Если теперь на этом же чертеже изобразить кривую  $u(z, t)$ , отвечающую моменту времени  $t > 0$ , то можно заметить, что она расположится *правее* исходной.

Аргумент гармонической функции вида (10.39) называют *полной фазой*:

$$\Phi = \omega t - \beta z. \quad (10.41)$$

Условие вида  $\Phi = \text{const}$  является уравнением, которое определяет положение точек равных фаз во времени и пространстве. Скорость перемещения точки равной фазы  $v_\Phi$  называют *фазовой скоростью*. Для того чтобы найти ее, следует выразить  $z$  из формулы (10.41), а затем результат продифференцировать:

$$v_\Phi = \omega/\beta. \quad (10.42)$$

Для линии без потерь  $\beta = \omega \sqrt{L_1 C_1}$  и поэтому

$$v_\Phi = 1/\sqrt{L_1 C_1}, \quad (10.43)$$

что, естественно, совпадает с результатом, который дается формулой (10.19).

Аналогично исследуются гармонические волны, которые соответствуют второму слагаемому в формуле (10.36). При этом

$$\dot{U}(z) = \dot{U}_m \exp(j\beta z), \quad (10.44)$$

$$u(z, t) = U_m \cos(\omega t + \beta z). \quad (10.45)$$

Положение точек равных фаз определяется здесь уравнением  $\omega t + \beta z = \text{const}$ , из которого видно, что с ростом  $t$  координата  $z$  должна уменьшаться. Поэтому формулы (10.44) и (10.45) соответствуют волнам, которые распространяются в отрицательном направлении оси  $z$  с той же скоростью  $v_\phi$ .

Итак, волны вида  $\exp(-j\beta z)$  являются прямыми, а вида  $\exp(j\beta z)$  — обратными волнами.

**Гармонические волны в линии с потерями.** Если считать, что  $\gamma$  — комплексная величина, то амплитуда напряжения прямой волны

$$\dot{U}(z) = U_m \exp(-\alpha z) \exp(-j\beta z), \quad (10.46)$$

откуда

$$u(z, t) = U_m \exp(-\alpha z) \cos(\omega t - \beta z). \quad (10.47)$$

Видно, что амплитуда гармонических колебаний в линии с потерями экспоненциально уменьшается по мере распространения волны:

$$|\dot{U}(z)| = U_m \exp(-\alpha z). \quad (10.48)$$

Отсюда вытекает способ измерения коэффициента  $\alpha$ . Пусть 1 и 2 — точки на оси линии, расстояние между которыми  $l$ . Если волна распространяется по направлению 1—2, причем  $|\dot{U}_1|$  и  $|\dot{U}_2|$  — амплитуды напряжений, измеренные в данных точках, то

$$\alpha = \frac{1}{l} \ln(|\dot{U}_1|/|\dot{U}_2|). \quad (10.49)$$

Величина  $\alpha$  измеряется в особых логарифмических единицах — *неперах на метр* (Нп/м). В радиотехнике чаще используют *погонное затухание*  $\Delta_{\text{пог}}$ , измеряемое в *децибелах на метр* (дБ/м). Связь между этими параметрами такова:

$$\Delta_{\text{пог}} = 8,686\alpha. \quad (10.50)$$

**Пример 10.2.** Линия передачи имеет погонное затухание 0,4 дБ/м; амплитуда гармонического напряжения в начале линии  $|\dot{U}_1| = 250$  В. Вычислить коэффициент затухания, а также выходную амплитуду  $|\dot{U}_2|$  при длинах линии 3 м и 400 м.

По формуле (10.50) находим  $\alpha = \Delta_{\text{пог}}/8,686 = 0,046$  Нп/м. Если длина линии  $l = 3$  м, то значение  $\alpha l = 0,138$  Нп. Значит,  $|\dot{U}_1|/|\dot{U}_2| = \exp(0,138) = 1,14$  и  $|\dot{U}_2| = 219$  В. Уменьшение амплитуды за счет затухания сравнительно невелико.

Если же  $l = 400$  м, то  $\alpha l = 18,4$  Нп. Значит,  $|\dot{U}_1|/|\dot{U}_2| = \exp(18,4) = 9,79 \cdot 10^7$ , так что  $|\dot{U}_2| = 2,55$  мкВ. Амплитуда напряжения на выходе оказывается столь малой, что это может крайне затруднить прием сигналов на выходе.

**Волновое сопротивление линии.** Симметричный вид уравнений (10.30) дает основание считать, что комплексные амплитуды напряжения и тока прямой волны зависят от координаты  $z$  одинаковым образом:

$$\dot{U}_{\text{пр}}(z) = U_m \exp(-\gamma z); \quad i_{\text{пр}} = I_m \exp(-\gamma z).$$

Подставив эти равенства в первое уравнение из системы (10.30), находим, что  $-\gamma U_m = -Z_1 I_m$ , откуда следует формула для расчета волнового сопротивления

$$Z_{\text{в}} = \frac{\dot{U}_{\text{пр}}}{i_{\text{пр}}} = \frac{Z_1}{\gamma} = \sqrt{\frac{Z_1}{Y_1}}. \quad (10.51)$$

В общем случае параметр  $Z_{\text{в}}$  является комплексным. Это физически означает, что в фиксированной точке линии между током и напряжением существует некоторый фазовый сдвиг. Если потери в линии отсутствуют, то, как и ранее [см. формулу (10.23)],  $Z_{\text{в}} = \sqrt{L_1/C_1}$ .

Легко убедиться, что формула связи между комплексными амплитудами напряжения и тока обратной волны отличается лишь знаком:

$$\frac{\dot{U}_{\text{обр}}}{i_{\text{обр}}} = -Z_{\text{в}}. \quad (10.52)$$

**Линия с малыми потерями.** В общем случае коэффициент распространения

$$\gamma = \sqrt{(R_1 + j\omega L_1)(G_1 + j\omega C_1)} \quad (10.53)$$

сложным образом зависит от частоты и первичных параметров линии. Расчет по этой формуле можно существенно упростить, если потери в линии малы, т. е.

$$R_1 \ll \omega L_1; \quad G_1 \ll \omega C_1. \quad (10.54)$$

Чтобы убедиться в этом, представим формулу (10.53) следующим образом

$$\gamma = j\omega \sqrt{L_1 C_1} \sqrt{\left(1 + \frac{R_1}{j\omega L_1}\right) \left(1 + \frac{G_1}{j\omega C_1}\right)},$$

а затем воспользуемся первым членом разложения квадратного корня в ряд Маклорена, пренебрегая в подкоренном выражении величиной второго порядка малости. Тогда

$$\gamma \approx j\beta_0 \left[ 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{R_1}{j\omega L_1} + \frac{G_1}{j\omega C_1} \right) \right],$$

где  $\beta_0 = \omega \sqrt{L_1 C_1}$  — коэффициент фазы в идеализированной линии передачи без потерь. Выделив вещественную и мнимую части, находим

$$\alpha = \frac{1}{2} \beta_0 \left( \frac{R_1}{\omega L_1} + \frac{G_1}{\omega C_1} \right) = \frac{1}{2} \left( \frac{R_1}{Z_{\text{в}0}} + G_1 Z_{\text{в}0} \right); \quad (10.55)$$

$$\beta = \beta_0, \quad (10.56)$$

где  $Z_{\text{в}0}$  — волновое сопротивление линии без потерь.

Интересно отметить, что в первом приближении коэффициент фазы не зависит от затухания в линии.

**Пример 10.3.** Имеется коаксиальный кабель с параметрами:  $a=0,45$  мм,  $b=3$  мм,  $\epsilon=2,25$ ,  $\sigma=5,7 \cdot 10^7$  См/м,  $\text{tg } \delta=3 \cdot 10^{-4}$ . Найти погонное затухание волн в этом кабеле при частоте 50 МГц.

Используя формулы (10.1)—(10.4), находим численные значения первичных параметров линии:  $L_1=3,79 \cdot 10^{-7}$  Гн/м,  $C_1=6,59 \cdot 10^{-11}$  Ф/м,  $R_1=0,76$  Ом/м,  $G_1=6,21 \cdot 10^{-6}$  См/м. Убеждаемся, что неравенства (10.54) действительно выполняются. Согласно формуле (10.25) волновое сопротивление линии без потерь  $Z_{в0}=75,9$  Ом. Применяв равенство (10.55), находим коэффициент ослабления  $\alpha=5,236 \cdot 10^{-3}$  м $^{-1}$ , откуда  $\Delta_{\text{пот}}=8,686\alpha=0,045$  дБ/м.

**Мощность, переносимая бегущей волной.** Обозначим посредством  $U_m$  амплитуду напряжения бегущей волны в линии передачи без потерь. Тогда активная (средняя) мощность, переносимая этой волной,

$$P = \pm U_m I_m / 2 = \pm U_m^2 / (2Z_{в}). \quad (10.57)$$

Выбор знака мощности зависит от направления распространения волны: прямой волне следует сопоставлять положительный, а обратной волне — отрицательный знак.

**Пример 10.4.** Найти амплитуду напряжения между проводниками линии с волновым сопротивлением 50 Ом, если вдоль линии переносится мощность 4 кВт.

На основании формулы (10.57)

$$U_m = \sqrt{2PZ_{в}} = \sqrt{2 \cdot 4 \cdot 10^3 \cdot 50} = 632 \text{ В.}$$

#### 10.4. ЯВЛЕНИЯ В НАГРУЖЕННОЙ ЛИНИИ ПЕРЕДАЧИ

Предположим, что полубесконечная регулярная линия передачи, имеющая волновое сопротивление  $Z_{в}$ , подключена к линейному двухполюснику нагрузки с импедансом  $Z_{н}$  (рис. 10.5). Начало отсчета координаты  $z$  совпадает с зажимами нагрузки. Направления тока и напряжения, условно принятые за положительные, показаны с помощью стрелок.

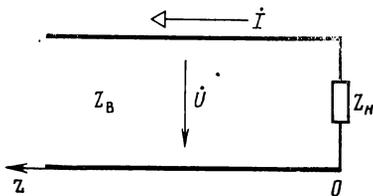


Рис. 10.5. Нагруженная линия передачи

Изучим процессы в такой линии, возбуждаемой внешним гармоническим источником с заданной частотой  $\omega$ .

**Коэффициент отражения.** Будем называть *падающей* ту волну, которая распространяется от источника к нагрузке. Бегущую волну, перемещающуюся от нагрузки к источнику, назовем *отраженной волной*.

Амплитуды напряжения этих волн распределены вдоль координаты  $z$  следующим образом:

$$\begin{aligned} \dot{U}_{\text{пад}}(z) &= \dot{U}_{0 \text{ пад}} \exp(\gamma z), \\ \dot{U}_{\text{отр}}(z) &= \dot{U}_{0 \text{ отр}} \exp(-\gamma z), \end{aligned} \quad (10.58)$$

где  $\dot{U}_{0 \text{ пад}}$  и  $\dot{U}_{0 \text{ отр}}$  — некоторые комплексные числа, отображающие напряжения обеих волн в точке подключения нагрузки.

Комплексные амплитуды токов

$$\begin{aligned} \dot{I}_{\text{пад}}(z) &= -(\dot{U}_{0 \text{ пад}}/Z_{\text{в}}) \exp(\gamma z), \\ \dot{I}_{\text{отр}}(z) &= (\dot{U}_{0 \text{ отр}}/Z_{\text{в}}) \exp(-\gamma z). \end{aligned} \quad (10.59)$$

Волновой процесс в линии есть суперпозиция обеих волн, т. е.

$$\begin{aligned} \dot{U}(z) &= \dot{U}_{\text{пад}}(z) + \dot{U}_{\text{отр}}(z), \\ \dot{I}(z) &= \dot{I}_{\text{пад}}(z) + \dot{I}_{\text{отр}}(z). \end{aligned} \quad (10.60)$$

Оказывается, амплитуды падающей и отраженной волн жестко связаны друг с другом. Чтобы убедиться в этом, обратимся к граничному условию на нагрузке

$$\dot{U}(0)/\dot{I}(0) = -Z_{\text{н}}. \quad (10.61)$$

Отрицательный знак правой части связан с тем, что при тех направлениях тока и напряжения, которые приняты за положительные, увеличение тока ведет к повышению потенциала *не верхнего, а нижнего зажима нагрузки*. Подставляя сюда выражения (10.58) — (10.60), получаем

$$Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}} \frac{\dot{U}_{0 \text{ пад}} + \dot{U}_{0 \text{ отр}}}{\dot{U}_{0 \text{ пад}} - \dot{U}_{0 \text{ отр}}}. \quad (10.62)$$

Введем важный параметр — *коэффициент отражения от нагрузки*

$$\rho = \dot{U}_{0 \text{ отр}}/\dot{U}_{0 \text{ пад}} \quad (10.63)$$

и запишем формулу (10.62) следующим образом:

$$\frac{Z_{\text{н}}}{Z_{\text{в}}} = \frac{1 + \rho}{1 - \rho}. \quad (10.64)$$

Отсюда получаем расчетную формулу, устанавливающую связь между коэффициентом отражения и параметрами цепи

$$\rho = \frac{Z_{\text{н}} - Z_{\text{в}}}{Z_{\text{н}} + Z_{\text{в}}}. \quad (10.65)$$

Если  $Z_{\text{н}} = Z_{\text{в}}$ , то говорят, что линия *согласована* с нагрузкой. При этом  $\rho = 0$ , т. е. отраженная волна отсутствует и вся мощность падающей волны поглощается в нагрузке. *Согласованный режим наиболее благоприятен для передачи мощности от генератора к нагрузке.*

Если  $Z_n=0$ , то имеет место *режим короткого замыкания*. В этом случае  $\rho=-1$ , т. е. отраженная волна по амплитуде совпадает с падающей волной, будучи в то же время сдвинутой по фазе на  $180^\circ$ .

Случай  $Z_n=\infty$  соответствует *режиму холостого хода*. Здесь  $\rho=1$ , т. е. комплексная амплитуда отраженной волны в месте подключения нагрузки в точности равна комплексной амплитуде падающей волны.

Наконец, если линия нагружена на чисто реактивный двухполюсник с импедансом  $Z_n=jX_n$ , то в соответствии с формулой (10.65)  $|\rho|=1$ . Однако фазовый угол коэффициента отражения, а, значит, и фазовый сдвиг между падающей и отраженной волнами зависит от соотношения параметров  $Z_n$  и  $X_n$ .

**Интерференция падающей и отраженной волн.** Пусть в общем случае коэффициент отражения  $\rho=|\rho|\exp(j\varphi_n)$  — комплексное число. Тогда закон распределения напряжения вдоль линии без потерь, для которой  $\gamma=j\beta$ , таков:

$$\begin{aligned}\dot{U}(z) &= \dot{U}_{\text{пад}} \exp(j\beta z) + \dot{U}_{\text{отр}} \exp(-j\beta z) = \\ &= \dot{U}_{\text{пад}} \exp(j\beta z) [1 + \rho \exp(-j2\beta z)].\end{aligned}$$

Отсюда непосредственно следует формула, которая описывает относительное изменение амплитуды напряжения вдоль нагруженной линии передачи

$$\frac{|\dot{U}(z)|}{|\dot{U}_{\text{пад}}|} = \sqrt{1 + 2|\rho| \cos(2\beta z - \varphi_n) + |\rho|^2}. \quad (10.66)$$

Типичный график, построенный в соответствии с данной формулой, изображен на рис. 10.6. Распределение напряжения вдоль линии оказывается периодическим с периодом  $\lambda/2$ . Относительные значения амплитуды колеблются в пределах от  $1+|\rho|$  до  $1-|\rho|$ . В случае, если  $|\rho|=1$ , амплитуда напряжения в минимумах становится равной нулю и вдоль линии устанавливается *стоячая волна*.

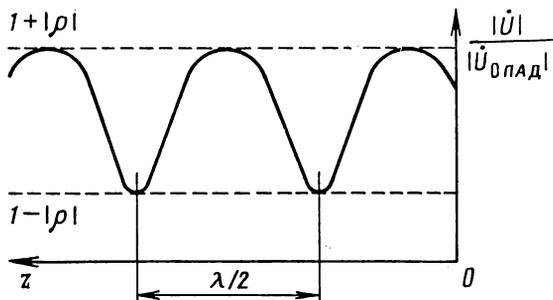


Рис. 10.6. Интерференция падающей и отраженной волн

Существуют приборы, называемые *измерительными линиями*, с помощью которых можно экспериментально изучать пространственное распределение напряжения и получать при этом сведения об импедансе нагрузки.

**Матричное описание отрезка линии передачи.** Рассмотрим конечный отрезок регулярной линии передачи без потерь длиной  $l$  (рис. 10.7). Найдем элементы  $A$ -матрицы такого четырехполюсника, образующие математическую модель (гл. 4)

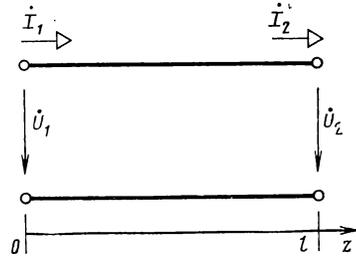


Рис. 10.7. Отрезок линии передачи как четырехполюсник

$$\dot{U}_1 = A_{11}\dot{U}_2 + A_{12}\dot{I}_2,$$

$$\dot{I}_1 = A_{21}\dot{U}_2 + A_{22}\dot{I}_2.$$

Воспользуемся тем, что общее решение уравнения Гельмгольца имеет вид суммы двух волн, распространяющихся в противоположных направлениях:

$$\dot{U}(z) = C_1 e^{-j\beta z} + C_2 e^{j\beta z}, \quad (10.67)$$

$$\dot{I}(z) = \frac{C_1}{Z_B} e^{-j\beta z} - \frac{C_2}{Z_B} e^{j\beta z}.$$

Неизвестные пока коэффициенты  $C_1$  и  $C_2$  можно связать с комплексными амплитудами  $\dot{U}_2$  и  $\dot{I}_2$  в выходном порте четырехполюсника

$$C_1 e^{-j\beta l} + C_2 e^{j\beta l} = \dot{U}_2,$$

$$C_1 e^{-j\beta l} - C_2 e^{j\beta l} = \dot{I}_2 Z_B,$$

откуда

$$C_1 = 1/2 (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_B) e^{j\beta l}, \quad (10.68)$$

$$C_2 = 1/2 (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_B) e^{-j\beta l}.$$

Значит, комплексные амплитуды напряжения и тока в произвольном сечении линии можно получить, подставив коэффициенты (10.68) в систему (10.67):

$$\dot{U}(z) = 1/2 (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_B) e^{j\beta(l-z)} + 1/2 (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_B) e^{-j\beta(l-z)},$$

$$\dot{I}(z) = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_B}{2 Z_B} e^{j\beta(l-z)} - \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_B}{2 Z_B} e^{-j\beta(l-z)}.$$

Напряжение и ток на входе соответствуют значению  $z=0$ :

$$\dot{U}_1 = 1/2 (\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_B) e^{j\beta l} + 1/2 (\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_B) e^{-j\beta l},$$

$$\dot{I}_1 = \frac{\dot{U}_2 + \dot{I}_2 Z_B}{2 Z_B} e^{j\beta l} - \frac{\dot{U}_2 - \dot{I}_2 Z_B}{2 Z_B} e^{-j\beta l}$$

или

$$\begin{aligned}\dot{U}_1 &= \dot{U}_2 \cos \beta l + \dot{I}_2 j Z_B \sin \beta l, \\ \dot{I}_1 &= \dot{U}_2 \frac{j}{Z_B} \sin \beta l + \dot{I}_2 \cos \beta l.\end{aligned}$$

Отсюда видно, что А-матрица отрезка регулярной линии передачи имеет вид

$$A = \begin{bmatrix} \cos \beta l & j Z_B \sin \beta l \\ \frac{j}{Z_B} \sin \beta l & \cos \beta l \end{bmatrix}. \quad (10.69)$$

**Входное сопротивление нагруженного отрезка линии.** Используя формулы (4.54) и (10.69), найдем входное сопротивление отрезка линии, у которого выходной порт 2 замкнут на известное сопротивление  $Z_H$ :

$$Z_{вх} = \frac{Z_H \cos \beta l + j Z_B \sin \beta l}{j (Z_H / Z_B) \sin \beta l + \cos \beta l} = \frac{Z_H + j Z_B \operatorname{tg} \beta l}{1 + j (Z_H / Z_B) \operatorname{tg} \beta l}. \quad (10.70)$$

Видно, что отрезок линии осуществляет трансформацию сопротивления нагрузки, причем закон трансформации определяется безразмерным параметром  $\vartheta = \beta l = 2\pi l / \lambda$ , который называют *электрической длиной* отрезка.

**Пример 10.5.** Найти входное сопротивление отрезка линии передачи длиной  $l = 0,5$  м, нагруженного на двухполюсник с чисто активным сопротивлением  $R_H = 110$  Ом. Волновое сопротивление  $Z_B = 75$  Ом, фазовая скорость волн в линии  $v_\Phi = 2 \cdot 10^8$  м/с, частота колебаний  $f = 80$  МГц.

Коэффициент фазы  $\beta = 2\pi f / v_\Phi = 2,513$  м<sup>-1</sup>. Электрическая длина отрезка  $\vartheta = \beta l = 1,2565$  рад. Используя формулу (10.70), находим

$$Z_{вх} = \frac{110 + j 230,7}{1 + j 4,51} = 53,91 - j 12,44 \text{ Ом.}$$

Если  $\vartheta = n\pi$ , где  $n = 1, 2, \dots$ , то  $Z_{вх} = Z_H$ . Если же  $\vartheta = (2n + 1)\pi/2$ , то тангенсы в формуле (10.70) обращаются в бесконечность и поэтому  $Z_{вх} = Z_B^2 / Z_H$ .

Особо простой вид формула (10.70) приобретает в том случае, когда  $Z_H = 0$ . При этом

$$Z_{вх} = j Z_B \operatorname{tg} \vartheta. \quad (10.71)$$

Если же  $Z_H = \infty$ , то

$$Z_{вх} = -j Z_B \operatorname{ctg} \vartheta. \quad (10.72)$$

Соответствующие графики изображены на рис. 10.8. Входные сопротивления короткозамкнутых и разомкнутых на конце отрезков

линии всегда чисто реактивны и описываются периодически функциями частоты.

Четвертьволновый отрезок короткозамкнутой линии или полуволновый отрезок линии, разомкнутый на одном конце, может служить резонансной системой, аналогичной параллельному колебательному контуру. Колебательные системы, построенные по этому принципу, в радиотехнике называют резонаторами. Они повсеместно используются в цепях сверхвысоких частот.

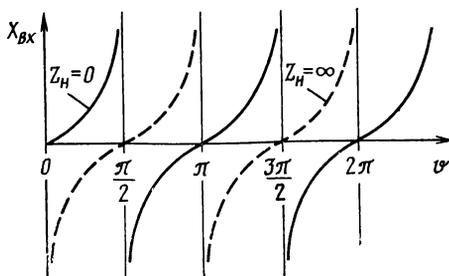


Рис. 10.8. Входное сопротивление отрезка линии как функция электрической длины

### ВОПРОСЫ

1. Какие первичные параметры необходимы для описания свойств линий передачи?
2. Какова математическая форма записи одномерного волнового процесса?
3. Какой физический смысл понятия волнового сопротивления линии передачи?
4. Как определяются понятия коэффициента ослабления, коэффициента фазы, длины волны и фазовой скорости?
5. Как найти коэффициент отражения в линии, если известен импеданс нагрузки и волновое сопротивление?
6. Что такое электрическая длина отрезка линии передачи?
7. Какими функциями описываются входные сопротивления короткозамкнутых и разомкнутых отрезков линии передачи без потерь?
8. Как следует выбирать длину короткозамкнутого отрезка линии передачи для того, чтобы этот отрезок с точки зрения частотной зависимости входного сопротивления был схож с параллельным колебательным контуром, образованным обычными сосредоточенными элементами?

## 11. КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ

Приемы расчета электрических цепей, такие, как метод узловых потенциалов или метод контурных токов, в принципе позволяют провести полный анализ стационарного режима любой электрической цепи. Однако надо иметь в виду, что радиоэлектронные устройства часто представляют собой достаточно сложные цепи с числом компонентов, превышающим несколько сотен. Это обстоятельство существенно усложняет их анализ, так как для решения системы линейных уравнений с несколькими сотнями неизвестных

требуется огромный объем вычислений. Исследователь может встретить большие затруднения даже на предварительном этапе — при составлении такой системы уравнений. Практика последних десятилетий показала, что успешно справиться с подобными задачами можно только при помощи компьютеров.

Другая очень важная сфера применения компьютеров в задачах теории цепей связана с численным решением дифференциальных уравнений, которые описывают нестационарные явления в сложных цепях. Такой подход дает возможность полностью исключить массу трудностей, связанных, например, с поиском корней характеристического уравнения.

Неоспоримое достоинство численных методов анализа цепей состоит в том, что при этом удается эффективно использовать богатый арсенал хорошо отлаженных стандартных подпрограмм.

В настоящей главе будут рассмотрены лишь некоторые принципиальные аспекты данной тематики. Более подробные сведения читатель может получить из литературных источников, например, из [10] и [11].

### 11.1. ОПИСАНИЕ ТОПОЛОГИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ

Каждой цепи присуща определенная геометрическая конфигурация или, что одно и то же, некоторая *топология*. Говоря так, имеют в виду что ряд характеристик — число узлов, число ветвей, а также способ их соединения никак не связаны ни с геометрическими размерами, ни с физическими свойствами тех двухполюсников, которые помещены в ветвях. В математике подробно разработаны приемы описания топологии различных объектов, обладающих цепной структурой.

**Направленный граф цепи.** Рассмотрим цепь, принципиальная схема которой изображена на рис. 11.1,а. Эта цепь содержит заземленный узел, помеченный номером 0, а также три незаземленных узла с номерами 1, 2 и 3. Здесь и в дальнейшем номера узлов на схемах будут изображаться цифрами в кружках. Имеется также шесть ветвей, в каждой из которых включен либо пассивный, либо активный двухполюсник; ветви пронумерованы цифрами от 1 до 6. Стрелки показывают направления токов и напряжений, принятые за положительные.

На рис. 11.1,б изображен *направленный граф* данной цепи, который представляет собой чертеж произвольного вида с тем же числом узловых точек, которые принято называть *вершинами* графа. Геометрическими образами ветвей электрической цепи служат линии, соединяющие вершины и называемые *ребрами* графа. Каждое ребро ориентированного графа снабжено стрелкой, которая направлена так же, как и стрелка тока (напряжения) на принципиальной схеме цепи.

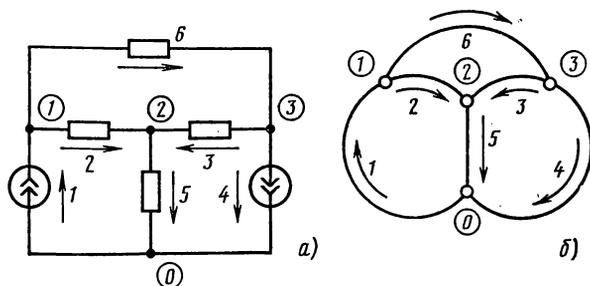


Рис. 11.1. Топологическая структура электрической цепи:

*a* — принципиальная схема; *б* — направленный граф

**Матрица инцидентий.** Направленный граф, содержащий полную информацию о топологии электрической цепи, является геометрическим образом. Чтобы ввести его в компьютер, требуется преобразовать граф в числовую форму. Для этой цели используется так называемая матрица инцидентий (матрицу соединений).

Пусть направленный граф имеет  $m$  ребер и  $n$  вершин, которые отвечают незаземленным узлам цепи. Матрица инцидентий  $F$  данного графа представляет собой прямоугольную таблицу (двумерный массив), имеющую  $m$  столбцов и  $n$  строк. Элемент  $f_{ij}$  матрицы, располагающийся на пересечении  $i$ -й строки и  $j$ -го столбца, определяется так:

$$f_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } j\text{-е ребро не подходит к } i\text{-й вершине графа;} \\ -1, & \text{если } j\text{-е ребро направлено в } i\text{-ю вершину;} \\ +1, & \text{если } j\text{-е ребро направлено из } i\text{-й вершины.} \end{cases}$$

Например, для цепи, изображенной на рис. 11.1, матрица инцидентий

$$F = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \quad (11.1)$$

Следует обратить внимание на то, что в каждом столбце этой матрицы может содержаться не более двух ненулевых элементов; пара элементов  $-1$  и  $+1$  располагается в любом столбце, который соответствует ветви, соединяющей два незаземленных узла. Указанное обстоятельство ведет к сильной разреженности матрицы инцидентий для достаточно сложной цепи.

**Топологическая формулировка законов Кирхгофа.** В дальнейшем символами  $U$  и  $I$  соответственно обозначаются изображения напряжения и тока, хотя все результаты в равной мере справедливы применительно к комплексным амплитудам, а также к мгно-

венным значениям. Поэтому величины  $U$  и  $I$  будем называть просто напряжениями и токами.

Пусть в цепи с  $m$  ветвями существуют токи  $I_1, I_2, \dots, I_m$ . Если имеется  $n$  незаземленных узлов, то в соответствии с первым законом Кирхгофа должны быть справедливы равенства, относящиеся ко всем узлам с номерами от 1 до  $n$ :

$$\begin{aligned} \alpha_{11}I_1 + \alpha_{12}I_2 + \dots + \alpha_{1m}I_m &= 0, \\ \alpha_{21}I_1 + \alpha_{22}I_2 + \dots + \alpha_{2m}I_m &= 0, \\ &\dots \\ \alpha_{n1}I_1 + \alpha_{n2}I_2 + \dots + \alpha_{nm}I_m &= 0. \end{aligned} \tag{11.2}$$

При этом коэффициент  $\alpha_{ij}$  равен нулю, если  $j$ -я ветвь не примыкает к  $i$ -му узлу. Если же  $j$ -я ветвь направлена из  $i$ -го узла, то  $\alpha_{ij} = +1$ ; в случае противоположной ориентации  $j$ -й ветви  $\alpha_{ij} = -1$ .

Таким образом, матрица коэффициентов системы (11.2) в точности совпадает с матрицей инциденций  $F$ , относящейся к графу данной цепи. Матричная запись системы (11.2) имеет вид

$$FI = 0. \tag{11.3}$$

Здесь  $I = [I_1, I_2, \dots, I_{m-1}, I_m]^T$  — вектор-столбец токов в ветвях, представляющий собой матрицу размером  $m \times 1$ . Эта матрица имеет  $m$  строк по числу ветвей цепи и единственный столбец. Для удобства векторы-столбцы принято записывать в одну строку, снабженную индексом  $T$ , который указывает на операцию транспонирования, т. е. взаимной замены строк на столбцы.

Теперь допустим, что все ветви цепи разделены на две группы — *пассивные ветви* с номерами 1, 2, ...,  $k$  и *активные ветви*, содержащие лишь идеальные источники тока и имеющие номера  $k+1, k+2, \dots, m$ . При этом матрицу инциденций можно записать в блочной форме

$$F = [F_p \ ; \ F_a].$$

Аналогичным образом представим вектор-столбец токов в ветвях

$$I = \begin{bmatrix} I_p \\ \dots \\ I_a \end{bmatrix}. \tag{11.4}$$

Нижние индексы « $p$ » и « $a$ » указывают на пассивный или активный характер ветвей. Блочный вид матриц позволяет сформулировать уравнение первого закона Кирхгофа в следующем виде:

$$[F_p \ ; \ F_a] \begin{bmatrix} I_p \\ \dots \\ I_a \end{bmatrix} = 0. \tag{11.5}$$

На основании правил матричной алгебры (см. Приложения), левую часть равенства (11.5) можно трактовать как произведение

двухкомпонентного вектора-строки на двухкомпонентный вектор-столбец. Поэтому данное равенство переписывается так:

$$\mathbf{F}_{\Pi} \mathbf{I}_{\Pi} = -\mathbf{F}_{\Pi} \mathbf{I}_{\Pi}. \quad (11.6)$$

Уравнения (11.6) представляет собой матрично-топологическую формулировку первого закона Кирхгофа.

**Пример 11.1.** Направленный граф цепи с тремя незаземленными узлами 1, 2, 3 представлен на рис. 11.2. Ветви 1—5 являются пассивными, а ветвь 6 содержит независимый источник тока. Направления токов, принятые за положительные, обозначены стрелками. Записать в явном виде уравнения по первому закону Кирхгофа, вытекающие из формулы (11.6).

Полная матрица инцидентий данного графа

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 & \vdots & -1 \end{bmatrix}$$

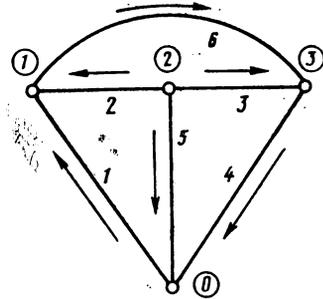


Рис. 11.2. Направленный граф цепи

состоит из двух блоков. Один из них отвечает пассивным ветвям:

$$\mathbf{F}_{\Pi} = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Единственной активной ветви отвечает блок, представляющий собой вектор-столбец

$$\mathbf{F}_{\Pi} = [1 \ 0 \ -1]^T.$$

Вектор-столбец токов в пассивных ветвях имеет пять строк:

$$\mathbf{I}_{\Pi} = [I_1, I_2, I_3, I_4, I_5]^T;$$

вектор-столбец токов источников характеризуется единственным элементом  $\mathbf{I}_{\Pi} = I_6$ .

Раскрывая левую и правую части формулы (11.6), убеждаемся, что она сводится к равенству двух векторов-столбцов

$$\begin{bmatrix} -I_1 - I_2 \\ I_2 + I_3 + I_5 \\ -I_3 + I_4 \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} I_6 \\ 0 \\ -I_6 \end{bmatrix},$$

откуда вытекают три уравнения, устанавливающие баланс токов в узлах 1, 2 и 3:

$$\begin{aligned} -I_1 - I_2 + I_6 &= 0, \\ I_2 + I_3 + I_6 &= 0, \\ -I_3 + I_4 - I_6 &= 0. \end{aligned}$$

Перейдем теперь к матричной формулировке второго закона Кирхгофа. Как всегда, будем считать, что имеется  $m$  ветвей, характеризуемых напряжениями ветвей  $U_{в1}, U_{в2}, \dots, U_{вm}$ , и  $n$  незаземленных узлов, в которых существуют узловые напряжения  $U_1, U_2, \dots, U_n$ , отсчитываемые относительно нулевого (заземленного) узла.

В соответствии со вторым законом Кирхгофа, напряжение каждой ветви является разностью напряжений тех узлов, которые соответствуют двумя ее концам. Если положить, что знаки напряжений ветвей отвечают направлениям стрелок на графе, то можно записать следующую систему из  $m$  равенств, которые связывают напряжение ветвей и узловые напряжения:

$$\begin{aligned} U_{в1} &= \beta_{11}U_1 + \beta_{12}U_2 + \dots + \beta_{1n}U_n, \\ U_{в1} &= \beta_{21}U_1 + \beta_{22}U_2 + \dots + \beta_{2n}U_n, \\ &\dots \\ U_{вm} &= \beta_{m1}U_1 + \beta_{m2}U_2 + \dots + \beta_{mn}U_n, \end{aligned} \quad (11.7)$$

где

$$\beta_{ij} = \begin{cases} 0, & \text{если } i\text{-я ветвь не соединена с } j\text{-м узлом,} \\ -1, & \text{если } i\text{-я ветвь направлена в } j\text{-й узел,} \\ +1, & \text{если } i\text{-я ветвь направлена из } j\text{-го узла.} \end{cases}$$

Такое свойство коэффициентов системы (11.7) означает, что ее матрица представляет собой транспонированную матрицу инцидентов, отвечающую направлению графу цепи. Если ввести вектор-столбец напряжений ветвей

$$\mathbf{U}_в = [U_{в1}, U_{в2}, \dots, U_{вm}]^T$$

и вектор-столбец узловых напряжений

$$\mathbf{U} = [U_1, U_2, \dots, U_n]^T,$$

то систему уравнений (11.7), отображающую второй закон Кирхгофа, можно представить в матричной форме

$$\mathbf{U}_в = \mathbf{F}^T \mathbf{U}. \quad (11.8)$$

**Пример 11.2.** Для цепи, направленный граф которой изображен на рис. 11.2, заданными являются узловые напряжения  $U_1, U_2$  и  $U_3$ . Получить уравнения, связывающие напряжения ветвей  $U_{в1} - U_{в6}$  с узловыми напряжениями.

Матрица инцидентов  $\mathbf{F}$  была получена в примере 11.1. Транспонируя эту матрицу и вычислив правую часть равенства (11.8), получаем

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} U_1 \\ U_2 \\ U_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -U_1 \\ -U_1 + U_2 \\ U_2 - U_3 \\ U_3 \\ U_2 \\ U_1 - U_3 \end{bmatrix}$$

Так, в частности,  $U_{в2} = U_2 - U_1$  и т. д.

### 11.2. ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ МЕТОД СОСТАВЛЕНИЯ УРАВНЕНИЙ УЗЛОВЫХ НАПРЯЖЕНИЙ

Последовательное применение законов Кирхгофа дает возможность представить уравнения электрического равновесия линейной цепи с  $n$  узлами в форме, отвечающей методу узловых напряжений [см. формулу (3.16)]

$$\mathbf{Y}\mathbf{U}=\mathbf{J}. \quad (11.9)$$

Здесь  $\mathbf{Y}$  — матрица узловых проводимостей размером  $n \times n$ ;  $\mathbf{U}$  — вектор-столбец узловых напряжений;  $\mathbf{J}$  — вектор-столбец источников тока, подключенных к узлам цепи.

Уравнение (11.9) можно решить относительно неизвестной заранее совокупности узловых напряжений

$$\mathbf{U}=\mathbf{Y}^{-1}\mathbf{J}, \quad (11.10)$$

где  $\mathbf{Y}^{-1}$  — матрица, обратная по отношению  $\mathbf{Y}$ . Если коэффициенты уравнения имеют числовую форму, то решение проводят, как правило, методом исключения Гаусса [10] с использованием стандартных подпрограмм.

Рассмотрим способ, позволяющий получать матрицу  $\mathbf{Y}$ , выражая ее через матрицу инцидентий  $\mathbf{F}$  и проводимости ветвей цепи. Для этого введем диагональную матрицу проводимостей ветвей

$$\mathbf{Y}_b = \begin{bmatrix} Y_1 & & & \\ & Y_2 & & \\ & & \ddots & \\ & & & Y_m \end{bmatrix}, \quad (11.11)$$

которая связывает вектор-столбец токов ветвей  $\mathbf{I}_b$  и вектор-столбец напряжений ветвей  $\mathbf{U}_b$ :

$$\mathbf{I}_b = \mathbf{Y}_b \mathbf{U}_b. \quad (11.12)$$

Примем во внимание уравнение (11.6), описывающее первый закон Кирхгофа

$$\mathbf{F}_n \mathbf{I}_b = -\mathbf{F}_n \mathbf{I}_n = \mathbf{J}; \quad (11.13)$$

(ветви цепи считаются пассивными, поэтому  $\mathbf{I}_b = \mathbf{I}_n$ ). Объединяя формулы (11.12) и (11.13), находим, что

$$\mathbf{F}_n \mathbf{Y}_b \mathbf{U}_b = \mathbf{J}. \quad (11.14)$$

Подставив сюда вектор  $\mathbf{U}_b$  из равенства (11.8), получаем

$$\mathbf{F}_n \mathbf{Y}_b \mathbf{F}_n^T \mathbf{U} = \mathbf{J}. \quad (11.15)$$

Сравнивая формулы (11.9) и (11.15), находим выражение, позволяющее вычислять матрицу узловых проводимостей

$$\mathbf{Y} = \mathbf{F}_n \mathbf{Y}_b \mathbf{F}_n^T. \quad (11.16)$$

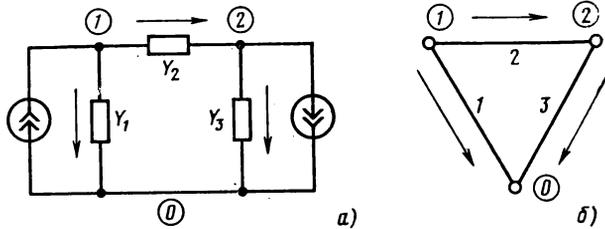


Рис. 11.3. К решению примера 11.3:  
а — схема цепи; б — направленный граф

**Пример 11.3.** Используя топологический подход, получить матрицу  $Y$  для цепи, схема которой дана на рис. 11.3.а.

Направленный граф пассивной части цепи представлен на рис. 11.3.б. Граф имеет три ребра; матрица инцидентий

$$F_{\Pi} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{bmatrix},$$

транспонированная матрица

$$F_{\Pi}^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Матрица проводимостей ветвей

$$Y_B = \begin{bmatrix} Y_1 & 0 & 0 \\ 0 & Y_2 & 0 \\ 0 & 0 & Y_3 \end{bmatrix}.$$

Проведя умножения матриц, находим

$$F_{\Pi} Y_B = \begin{bmatrix} Y_1 & Y_2 & 0 \\ 0 & -Y_2 & Y_3 \end{bmatrix};$$

$$Y = F_{\Pi} Y_B F_{\Pi}^T = \begin{bmatrix} Y_1 + Y_2 & -Y_2 \\ -Y_2 & Y_2 + Y_3 \end{bmatrix}.$$

Получение матрицы узловых проводимостей по формуле (11.16) обеспечивается тем, что в библиотеках стандартных программ компьютеров обязательно имеются программы транспонирования и перемножения матриц. Правда, как уже говорилось, в ряде случаев матрицы оказываются сильно разреженными, что снижает эффективность использования вычислительных ресурсов. Имеются специальные приемы работы с разреженными матрицами [10], позволяющие в значительной степени преодолеть эту трудность.

Возможна также компьютеризация метода контурных токов, однако программы анализа цепей получаются более длинными, так как использование данного метода сопряжено с громоздкой процедурой поиска независимых контуров цепи [11].

## 11.3. МЕТОД ПЕРЕМЕННЫХ СОСТОЯНИЯ

Ранее, изучая нестационарные явления в линейных цепях, мы использовали подход, основанный на том, что математической моделью цепи является дифференциальное уравнение  $n$ -го порядка. При компьютерном изучении таких процессов желательно несколько видоизменить методику, сводя задачу к решению системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка, так как разработано множество программ для численного интегрирования подобных систем; программы различаются как сложностью алгоритмов, так и достижимой точностью результатов.

Составление системы дифференциальных уравнений цепи обычно основано на том, что вводится вектор-столбец  $\mathbf{X}$  переменных состояний, в качестве которых выбирают токи во всех индуктивных элементах и напряжения на всех емкостных элементах цепи:

$$\mathbf{X} = [i_{L1}, i_{L2}, \dots, i_{Lm}, u_{C1}, u_{C2}, \dots, u_{Cn}]^T. \quad (11.17)$$

Изучим методику получения уравнений относительно переменных состояния на конкретных примерах.

Пусть имеется цепь с двумя конденсаторами и двумя резисторами, возбуждаемая источником ЭДС  $e(t)$  (рис. 11.4,а). Здесь

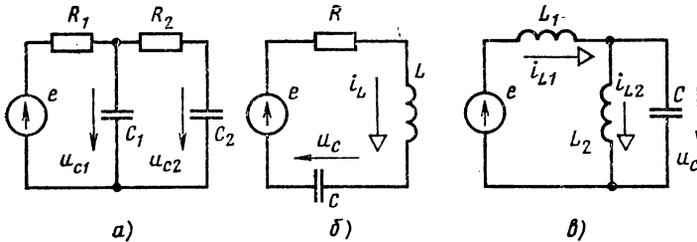


Рис. 11.4. Метод переменных состояния:

а — двухзвенная RC-цепь; б — последовательный колебательный контур; в — сложный колебательный контур без потерь

вектор переменных состояния  $\mathbf{X} = [u_{C1}, u_{C2}]^T$ ; токи через конденсаторы:

$$i_1 = C_1 du_{C1}/dt; \quad i_2 = C_2 du_{C2}/dt.$$

С помощью второго закона Кирхгофа получаем два уравнения электрического равновесия

$$\begin{aligned} R_1 \left( C_1 \frac{du_{C1}}{dt} + C_2 \frac{du_{C2}}{dt} \right) + u_{C1} &= e(t), \\ u_{C1} &= R_2 C_2 \frac{du_{C2}}{dt} + u_{C2}, \end{aligned} \quad (11.18)$$

которые без труда приводятся к стандартной системе двух линейных дифференциальных уравнений первого порядка. В матричной форме эта система имеет вид

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{1}{R_1 C_1} \left(1 + \frac{R_1}{R_2}\right) & \frac{1}{R_2 C_1} \\ \frac{1}{R_2 C_2} & -\frac{1}{R_2 C_2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_{C1} \\ u_{C2} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{e}{R_1 C_1} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.19)$$

Для последовательного колебательного контура (рис. 11.4,б) можно положить, что  $\mathbf{X} = [i_L, u_C]^T$ . Два очевидных уравнения

$$u_C + L \frac{di_L}{dt} + Ri_L = e(t), \quad C \frac{du_C}{dt} = i_L \quad (11.20)$$

могут быть эквивалентно представлены в стандартной матричной форме

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{e}{L} \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.21)$$

Обратимся, наконец, к случаю несколько более сложного колебательного контура без потерь (рис. 11.4,в). Здесь вектор переменных состояния  $\mathbf{X} = [i_{L1}, i_{L2}, u_C]^T$ . Три уравнения электрического равновесия

$$L_1 \frac{di_{L1}}{dt} + u_C = e(t), \quad L_2 \frac{di_{L2}}{dt} = u_C, \quad C \frac{du_C}{dt} + i_{L2} = i_{L1} \quad (11.22)$$

сводятся к следующей системе

$$\frac{d}{dt} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ u_C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -\frac{1}{L_1} \\ 0 & 0 & \frac{1}{L_2} \\ \frac{1}{C} & -\frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_{L1} \\ i_{L2} \\ u_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{e}{L_1} \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (11.23)$$

Рассмотренные выше примеры позволяют сделать вывод о том, что в рамках метода переменных состояния задача о нестационарном процессе в электрической цепи сводится к решению векторного дифференциального уравнения первого порядка

$$\frac{d\mathbf{X}}{dt} = \mathbf{A}\mathbf{X} + \mathbf{B}. \quad (11.24)$$

Квадратную матрицу  $\mathbf{A}$  называют *системной матрицей* цепи. Вектор-столбец  $\mathbf{B}$  задает действие внешних источников. Для получе-

ния единственного решения должна быть сформулирована задача Коши, т. е. задано численное значение начального вектора  $\mathbf{X}(0) = \mathbf{X}_0$ .

В математике дифференциальные уравнения вида (11.24) называют *эволюционными уравнениями*. Программы для численного решения таких уравнений реализуют тот или иной алгоритм, например, алгоритм Рунге — Кутты [10].

**Матричная экспоненциальная функция.** Рассмотрим одномерное уравнение

$$\frac{dx}{dt} = ax + b(t), \quad (11.25)$$

которое является предельным случаем эволюционной системы (11.24). Параметр  $a = \text{const}$ ; функция  $b(t)$  описывает внешнее воздействие. Начальное значение искомой функции  $x(0) = x_0$  полагается заданным.

Применив метод вариации постоянной, описанный в гл. 8, без труда находим решение, справедливое для значений  $t > 0$ :

$$x(t) = x_0 \exp(at) + \exp(at) \int_0^t \exp(-a\xi) b(\xi) d\xi. \quad (11.26)$$

Так как алгебраические действия с числами и матрицами полностью аналогичны, формулу (11.26) можно обобщить и получить решение векторного уравнения (11.24).

$$\mathbf{X}(t) = \exp(\mathbf{A}t) \mathbf{X}_0 + \exp(\mathbf{A}t) \int_0^t \exp(-\mathbf{A}\xi) \mathbf{B}(\xi) d\xi. \quad (11.27)$$

Входящая сюда матричная экспоненциальная функция  $\exp(\mathbf{A}t)$  представляется в виде бесконечного ряда по степеням системной матрицы:

$$\exp(\mathbf{A}t) = \mathbf{1} + \mathbf{A}t + \frac{1}{2!} \mathbf{A}^2 t^2 + \dots \quad (11.28)$$

Здесь

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & & & \\ & 1 & & \\ & & \ddots & \\ & & & 1 \end{bmatrix}$$

— единичная матрица размером  $n \times n$ .

Ряд (11.28) служит матричным обобщением ряда Маклорена для экспоненты. Данный ряд сходится при любом значении  $t$  и описывает некоторую матрицу размером  $n \times n$ .

**Пример 11.4.** Вычислить матричную экспоненциальную функцию  $\exp(\mathbf{A}t)$  при

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}.$$

Последовательно находим степени матрицы  $A$ :

$$A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix},$$

$$A^3 = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & 21 \\ 14 & 6 \end{bmatrix},$$

.....

Подставляя эти данные в формулу (11.28), находим

$$\exp(At) = \begin{bmatrix} 1 + t + \frac{7}{2} t^2 + \frac{13}{6} t^3 + \dots & 3t + \frac{3}{2} t^2 + \frac{7}{2} t^3 + \dots \\ 2t + t^2 + \frac{7}{3} t^3 + \dots & 1 + 3t^2 + t^3 + \dots \end{bmatrix}.$$

Следует отметить, что с точки зрения эффективности вычислений метод, основанный на использовании матричных экспоненциальных функций, как правило, уступает методам, которые связаны с непосредственным численным интегрированием эволюционных уравнений.

### ВОПРОСЫ

1. Какие из характеристик электрических цепей принято называть топологическими характеристиками?
2. Как определяется понятие направленного графа цепи?
3. Перечислите действия, которые нужно проделать для того, чтобы построить направленный граф по его матрице инцидентий.
4. Приведите топологические формулировки первого и второго законов Кирхгофа.
5. Запишите формулу, связывающую между собой матрицу узловых проводимостей, матрицу инцидентий и диагональную матрицу проводимостей ветвей.
6. Как определяется понятие вектора переменных состояния?
7. Как выражается матричная экспоненциальная функция через системную матрицу цепи?

## ПРИЛОЖЕНИЯ

### 1. СЛУЧАЙ КРАТНЫХ КОРНЕЙ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ

Предположим, что в представлении обратного оператора [см. формулу (8.65)] один из корней является двукратным, например,  $\gamma_1 = \gamma_2 = \gamma$ . При этом среди частных дробей, на которые раскладывается оператор  $\Phi_n^{-1}(\rho)$ , будет дробь  $1/(\rho - \gamma)^2$ , которой отвечает символическое действие

$$z(t) = (\rho - \gamma)^{-2} f(t).$$

Выполним следующие тождественные преобразования:

$$(\rho - \gamma) z = (\rho - \gamma)^{-1} f(t) = e^{\gamma t} \rho^{-1} [e^{-\gamma t} f(t)].$$

Значит,

$$\begin{aligned} z(t) &= e^{\gamma t} \rho^{-1} [ \rho^{-1} e^{-\gamma t} f(t) ] = e^{\gamma t} \rho^{-2} [ e^{-\gamma t} f(t) ] = \\ &= e^{\gamma t} \int_0^t d\eta \int_0^\eta e^{-\gamma \xi} f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

Используя известный прием, позволяющий сводить кратный интеграл к простым, находим

$$z(t) = e^{\gamma t} \int_0^t (t - \xi) e^{-\gamma \xi} f(\xi) d\xi.$$

Данная формула обычным путем обобщается на случай корня  $n$ -й кратности:

$$\begin{aligned} (\rho - \gamma)^{-n} f(t) &= e^{\gamma t} \rho^{-n} [ e^{-\gamma t} f(t) ] = \\ &= e^{\gamma t} \frac{1}{1 \cdot 2 \cdot \dots \cdot (n-1)} \int_0^t (t - \xi)^{n-1} e^{-\gamma \xi} f(\xi) d\xi. \end{aligned}$$

### 2. ТАБЛИЦА СООТВЕТСТВИЙ МЕЖДУ ОРИГИНАЛАМИ И ИЗОБРАЖЕНИЯМИ

| $f(t)$      | $F(\rho)$  |
|-------------|------------|
| $\delta(t)$ | 1          |
| $\sigma(t)$ | $1/\rho$   |
| $t$         | $1/\rho^2$ |

| $f(t)$  | $F(p)$                            |
|---|-----------------------------------|
| $\exp(-at)$   | $1/(p+a)$                         |
| $\delta(t) - a \exp(-at)$   | $p/(p+a)$                         |
| $1 - \exp(-at)$   | $a/[p(p+a)]$                      |
| $\frac{1}{b-a} (e^{-at} - e^{-bt})$   | $\frac{1}{(p+a)(p+b)}$            |
| $\frac{1}{b-a} (t e^{-bt} - a e^{-at})$   | $\frac{p}{(p+a)(p+b)}$            |
| $t \exp(-at)$   | $1/(p+a)^2$                       |
| $\sin \omega t$   | $\omega/(p^2 + \omega^2)$         |
| $\cos \omega t$   | $p/(p^2 + \omega^2)$              |
| $e^{-at} \sin \omega t$   | $\omega/[(p+a)^2 + \omega^2]$     |
| $e^{-at} \cos \omega t$   | $(p+a)/[(p+a)^2 + \omega^2]$      |
| $at - (1 - e^{-at})$  | $a^2/[p^2(p+a)]$                  |
| $\frac{1}{ab} \left[ 1 + \frac{1}{a-b} \times \right.$                                | $\frac{1}{p(p+a)(p+b)}$           |
| $\left. \times (b e^{-at} - a e^{-bt}) \right]$                                       |                                   |
| $\frac{1}{a^2 + \omega^2} \left[ 1 - e^{-at} \times \right.$                          | $\frac{1}{p[(p+a)^2 + \omega^2]}$ |
| $\left. \times \left( \cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t \right) \right]$ |                                   |
| $\frac{1}{a^2 + \omega^2} \left( e^{-at} - \right.$                                   | $\frac{1}{(p+a)(p^2 + \omega^2)}$ |
| $\left. - \cos \omega t + \frac{a}{\omega} \sin \omega t \right)$                     |                                   |

### 3. ДЕЙСТВИЯ С МАТРИЦАМИ

По определению, матрицей называют прямоугольную таблицу вида

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix},$$

где числа  $a_{ij}$  ( $1 \leq i \leq m$ ,  $1 \leq j \leq n$ ) являются либо вещественными, либо комплексными. Говорят, что такая матрица имеет размер  $m \times n$ .

Каждой  $m \times n$ -матрице  $A$  с элементами  $a_{ij}$  соответствует  $n \times m$ -матрица с элементами  $a_{ji}$ , называемая транспонированной матрицей и обозначаемая как  $A^T$ .

Матрицы можно складывать, умножать на вещественные или комплексные числа, а также умножать друг на друга.

Если  $A$  и  $B$  — две  $m \times n$ -матрицы с элементами  $a_{ij}$  и  $b_{ij}$  соответственно, то можно образовать  $m \times n$ -матрицу  $C$ , такую, что  $c_{ij} = a_{ij} + b_{ij}$ .

Любую матрицу можно умножить на постоянное число  $\alpha$ , вещественное или комплексное. Запись  $B = \alpha A$  означает, что все элементы матрицы  $A$  умножаются на один и тот же коэффициент:  $b_{ij} = \alpha a_{ij}$ .

Умножить матрицу  $A$  на матрицу  $B$  возможно лишь в том случае, если  $A$  имеет размер  $m \times l$ , а  $B$  — размер  $l \times n$ , т. е. число столбцов первого сомножителя совпадает с числом строк второго сомножителя. Возникающая при умножении матрица  $C = AB$  имеет размер  $m \times n$ ; элементы матрицы-произведения находят по принципу «умножение строки на столбец»:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^l a_{ik} b_{kj}.$$

В общем случае умножение матриц некоммутативно, т. е.  $AB \neq BA$ .

Особо важную роль в приложениях имеют матрицы-столбцы размером  $m \times 1$  и матрицы-строки размером  $1 \times n$ . Такие матрицы часто называют просто векторами.

Иногда выкладки с произведениями матриц больших размеров удается существенно упростить, разбивая матрицы на блоки. Например, запись

$$A = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ A_4 & A_5 & A_6 \end{bmatrix},$$

в которой  $A_1$ — $A_6$  представляют собой некоторые подматрицы меньшего размера, означает выделение четырех блоков:  $[A_1]$ ,  $[A_2 A_3]$ ,  $[A_4]$  и  $[A_5 A_6]$ .

Каждый блок может рассматриваться как отдельный элемент сложной матрицы. Правила действий с блоками полностью аналогичны правилам действий с числами, образующими обычные матрицы.

Теория матриц подробно изложена во многих руководствах, например, в [12].

#### 4. НЕКОТОРЫЕ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ФОРМУЛЫ

$$\sin^2 x = 1/2 (1 - \cos 2x),$$

$$\cos^2 x = 1/2 (1 + \cos 2x),$$

$$\sin^3 x = 1/4 (3 \sin x - \sin 3x),$$

$$\cos^3 x = 1/4 (3 \cos x + \cos 3x),$$

$$\sin^4 x = 1/8 (\cos 4x - 4 \cos 2x + 3),$$

$$\cos^4 x = 1/8 (\cos 4x + 4 \cos 2x + 3),$$

$$\sin^5 x = 1/16 (10 \sin x - 5 \sin 3x + \sin 5x),$$

$$\cos^5 x = 1/16 (10 \cos x + 5 \cos 3x + \cos 5x).$$

## РЕКОМЕНДУЕМАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Попов В. П. Основы теории цепей. — М.: Высшая школа, 1985.
2. Лосев А. К. Теория линейных электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1987.
3. Шебес М. Р. Задачник по теории линейных электрических цепей. — М.: Высшая школа, 1982.
4. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи и сигналы. — М.: Высшая школа, 1988.
5. Сиберт У. М. Цепи, сигналы, системы: В 2-х ч. Ч. 1: Пер. с англ. — М.: Мир, 1988.
6. Тихонов А. Н., Васильева А. Б., Свешников А. Г. Дифференциальные уравнения. — М.: Наука, 1980.
7. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. — М.: Физматгиз, 1958 и послед. издания.
8. Баскаков С. И. Дополнительные главы теории цепей. — М.: МЭИ, 1974.
9. Баскаков С. И. Радиотехнические цепи с распределенными параметрами. — М.: Высшая школа, 1980.
10. Чуа Л. О., Пен-Мин Лин. Машинный анализ электронных схем: Пер. с англ. — М.: Энергия, 1980.
11. Влах И., Сингхал К. Машинные методы анализа и проектирования электронных схем: Пер. с англ. — М.: Радио и связь, 1988.
12. Ланкастер П. Теория матриц: Пер. с англ. — М.: Наука, 1982.
13. Савельев И. В. Курс общей физики, т. 2. — М.: Наука, Главная редакция физико-математической литературы, 1982.
14. Крылов В. В., Корсаков С. Я. Основы теории цепей для системотехников. — М.: Высшая школа, 1990.
15. Соломенцев Е. Д. Функции комплексного переменного и их применения. — М.: Высшая школа, 1988.
16. Манаев Е. И. Основы радиоэлектроники. — М.: Радио и связь, 1990.
17. Кирхгоф Г. Избранные труды. — М.: Наука, 1988.

## ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Амплитуда** гармонического колебания 15  
— комплексная 17  
— — неопределенного интеграла 18  
— —, определение 17  
— — производной 18  
— —, связь с мгновенным значением 17
- Биения** 132
- Варикап** 114
- Вектор-столбец** источник тока 206  
— переменных состояния 211  
— узловых напряжений 209
- Вершины** направленного графа 204
- Ветвь** цепи активная 206  
— —, определение 8  
— — пассивная 206
- Волна** стоячая в линии передачи 200
- Волновой** процесс одномерный 191
- Выпрямитель** полупроводниковый 109  
— двухполупериодный 111
- Гармоники** тока в нелинейном двухполоснике 108
- Гильберта** преобразования 176, 180
- Гиратор** 69
- Граф** направленный цепи 204
- Двухполосник** активный 10  
— нелинейный резистивный 97  
— пассивный 9, 171  
— элементарный 9
- Декомпозиция** сложной цепи 155
- Децибелы** 71
- Диаграмма** векторная 23
- Диод** полупроводниковый 98
- Длина** электрическая отрезка линии передачи 202
- Добротность**, определение 82  
— эквивалентная нагруженного контура 87
- Дробь** цепная 181
- Дюамеля** интеграла 160
- Емкость** дифференциальная 113
- Затухание** погонное в линии передачи 196
- Импеданс** 20, 171
- Импульс** 135  
— экспоненциальный 150
- Источник** напряжения 10  
— —, управляемый напряжением (ИНУН) 11  
— тока 11  
— —, управляемый током (ИТУТ) 12
- Кирхгофа** закон второй 13  
— — первый 12  
— —, топологическая формулировка 205
- Колебания** собственные в линейных цепях 118
- Колебательный контур** параллельный 85  
— — последовательный 117  
— — с большими потерями 128  
— — с малыми потерями 127  
— — связанный 89  
— — сложный 87
- Конвертор** сопротивления 70
- Контур** цепи независимый 37, 39
- Коши** задача 119, 192
- Коэффициент** включения колебательного контура 88  
— взаимной индукции 32  
— затухания контура 126  
— ослабления 194  
— отражения от нагрузки 198  
— передачи частотный 71  
— распространения волны 194  
— связи двух катушек 33  
— трансформации 35  
— фазы волны в линии 194
- Крутизна** вольт-амперной характеристики 101
- Линия** передачи 184  
— — коаксиальная 186  
— — микрополосковая 187
- Матрица** инцидентий 205  
— параметров четырехполосника 53—55  
— системная 212  
— узловых проводимостей 210
- Метод** вариации произвольных постоянных 148

- «деление — обращение остатка» 182
- контурных токов 39
- операторный 153
- переменных состояния 211
- преобразования Лапласа 162, 189
- узловых потенциалов (напряжений) 41
- Моды в связанных контурах 130
- , интерференция 131
- Мост симметричный 79, 179
- Мощность активная 28
- колеблющаяся 27
- комплексная 28
- мгновенная 26
- реактивная 28
- средняя 27
- Найквиста диаграмма (годограф) 71, 74, 84
- Накачка при параметрическом усилении 114
- Напряжение, выбор знака 8
- выпрямленное 110, 111
- линейное в трехфазной цепи 50
- , определение 6
- смещения 101
- фазное 50
- Нейтральный провод трехфазной цепи 50
- Неперы 196
- Нуль входного сопротивления 172
- Область частотная прозрачности фильтра 95
- — режекции 96
- Огибающая колебаний 127
- Оператор дифференцирования 153
- запаздывания 165
- Параметры первичные линии передачи 185
- Переменные состояния 211
- Повторитель электронный 105
- Поле квазистационарное 5
- магнитное вращающееся 51
- потенциальное 6
- стороннее электрическое 11
- Полоса пропускания колебательного контура 84
- Полус входного сопротивления 172
- Порт четырехполюсника 63
- Порядок линейной цепи 121, 123
- Постоянная времени 72
- —  $RC$ -цепи 72, 120
- —  $RL$ -цепи 121
- — колебательного контура 128
- — передачи периодической цепи 93
- — ослабления 94
- — фазы 94
- Потенциал электрический 6, 41
- Преобразование активных двухполюсников 44—47
- «звезда — треугольник» 44
- Лапласа 162
- эквивалентное цепей 43
- Проводимость активная двухполюсника 20
- взаимная ветви 43
- вносимая отрицательная 116
- комплексная 19
- операторная 165, 171
- реактивная двухполюсника 20
- собственная узла 42
- Процесс переходный в линейной цепи 137
- Прямая нагрузочная 99
- Разность потенциалов контактная 113
- Расстройка обобщенная контура 81
- Ребро направленного графа 204
- Регенерация 67
- Резонанс, определение 82
- токов 86
- Свертка функций 160
- Связь индуктивная 31
- — критическая 91
- — полная 33, 35
- Система динамическая 157
- Скорость фазовая 195
- Согласованный режим 30, 199
- Сопротивление вносимое 34
- волновое линии передачи 191, 196
- входное отрезка линии 202
- двухполюсника активное 20
- — реактивное 20
- дифференциальное нелинейного двухполюсника 102
- операторное 165
- резонансное параллельного контура 85
- — с учетом неполного включения 88
- связи 90
- характеристическое колебательного контура 82
- — периодической структуры 93
- Структура цепная 6
- Суперпозиции принцип 14
- Схема замещения нелинейного двухполюсника 101
- — четырехполюсника 102
- — принципиальная цепи 7

- Теорема взаимности 48  
 — запаздывания 165  
 — Нортонa 47  
 — Тевенина 46  
 Ток контурный 38  
 — полезный в нелинейном конденсаторе 115  
 —, постоянная составляющая 108  
 Топология цепи 204  
 Точки особые импеданса 172  
 Транзистор биполярный 12, 104  
 — полевой 106  
 Трансформатор 33, 62  
 — идеальный 35  
 —, режим короткого замыкания 35  
 —, — холостого хода 34  
 Угол диэлектрических потерь 187  
 Узел цепи 8  
 Уравнение волновое 189  
 — Гельмгольца 194  
 — телеграфное 188  
 — характеристическое собственных колебаний 119, 126  
 — эволюционное 213  
 Усиление цепи 71  
 Усилитель электронный 104  
 Устойчивость, критерии 135  
 — линейной цепи 133  
 — параметрического усилителя 116  
 Фаза начальная 15  
 — полная 15, 195  
 Фазор 16  
 Фактор связи 90  
 Фильтр верхних частот (ФВЧ) 74  
 — Вина 76  
 — двойной Т-образный 80  
 — нижних частот (ФНЧ) 73  
 — «перекрытый» 77  
 — полосовой 77  
 — режекторный 79, 81  
 Фостера теорема 176  
 Функция включения (Хевисайда) 136  
 — Дирака (дельта-функция) 158  
 — дробно-рациональная 172  
 — матричная экспоненциальная 213  
 — передаточная 166  
 — положительная вещественная 174  
 — цепи 170  
 — —, аналитическое продолжение 170  
 Характеристика амплитудно-фазовая (АФХ) 71  
 — амплитудно-частотная (АЧХ) 71  
 — вольт-амперная (ВАХ) 97  
 — вольт-кулонная 113  
 — вольт-фарадная 113  
 — импульсная 158, 159, 167  
 — фазочастотная (ФЧХ) 71  
 Цепь активная 66  
 — Кауэра 181  
 —, классификация 14  
 — лестничная 179  
 — линейная 14  
 — минимального сопротивления 175  
 — минимально-фазовая 178  
 — нелинейная 14, 97  
 — с распределенными параметрами 185  
 — трехфазная 49—51  
 — Фостера 181  
 Частота комбинационная 112  
 — комплексная 170  
 — резонансная контура 82  
 — собственных колебаний контура  
 — — — без потерь 123  
 — — — с потерями 127  
 — среза фильтра 73  
 — угловая 15  
 Четырехполюсник линейный активный 66  
 — — взаимный 56  
 — —, матричное описание 53—55  
 — — неавтономный 66  
 — — невзаимный 69  
 — —, определение 52  
 — — составной 59  
 — —, эквивалентные схемы 55  
 Электродвижущая сила (ЭДС) 11  
 Элемент цепи емкостный 10, 21  
 — — индуктивный 9, 20  
 — — параметрический 114  
 — — резистивный 9, 20  
 Эффективное значение напряжения (тока) 28, 49

## ОГЛАВЛЕНИЕ

|   |           |
|---|-----------|
| Предисловие . . . . .   | 3         |
| <b>1. ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ ТЕОРИИ ЭЛЕКТРИЧЕСКИХ ЦЕПЕЙ</b>                                       | <b>5</b>  |
| 1.1. Квазистационарные поля . . . . .   | 5         |
| 1.2. Электрическая цепь как математическая модель квазистационарной системы . . . . .       | 7         |
| 1.3. Законы электрических цепей . . . . .   | 12        |
| <b>2. МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЛИНЕЙНЫХ СТАЦИОНАРНЫХ ЦЕПЕЙ ПРИ ГАРМОНИЧЕСКИХ ВНЕШНИХ ВОЗДЕЙСТВИЯХ</b> | <b>15</b> |
| 2.1. Гармонические колебания и их параметры . . . . .                                       | 15        |
| 2.2. Понятие комплексной амплитуды . . . . .  | 16        |
| 2.3. Сложение гармонических колебаний . . . . .   | 17        |
| 2.4. Комплексные амплитуды производной и неопределенного интеграла . . . . .                | 18        |
| 2.5. Комплексное сопротивление и комплексная проводимость . . . . .                         | 19        |
| 2.6. Сопротивление и проводимость элементарных двухполюсников . . . . .                     | 20        |
| 2.7. Сопротивление и проводимость простейших соединений элементов . . . . .                 | 21        |
| 2.8. Расчет простейших $RC$ - и $RL$ -двухполюсников . . . . .                              | 22        |
| 2.9. Мощность гармонических колебаний в двухполюснике . . . . .                             | 26        |
| 2.10. Понятие комплексной мощности . . . . .  | 27        |
| 2.11. Эффективные значения напряжения и тока . . . . .                                      | 28        |
| 2.12. Линейный двухполюсник как нагрузка. Согласование комплексных сопротивлений . . . . .  | 29        |
| 2.13. Цепи с индуктивной связью . . . . .   | 31        |
| 2.14. Трансформирующие свойства индуктивно-связанных цепей . . . . .                        | 33        |
| <b>3. МЕТОДЫ АНАЛИЗА СЛОЖНЫХ ЦЕПЕЙ</b>  | <b>36</b> |
| 3.1. Геометрические закономерности в сложных цепях . . . . .                                | 37        |
| 3.2. Метод контурных токов . . . . .  | 38        |
| 3.3. Метод узловых потенциалов . . . . .  | 41        |
| 3.4. Эквивалентные преобразования линейных цепей . . . . .                                  | 43        |
| 3.5. Трехфазные цепи . . . . .  | 49        |
| <b>4. ТЕОРИЯ ЧЕТЫРЕХПОЛЮСНИКОВ</b>  | <b>52</b> |
| 4.1. Основные определения. Матричное описание четырехполюсников . . . . .                   | 52        |
| 4.2. Свойства нагруженных четырехполюсников . . . . .                                       | 63        |
| 4.3. Активные и пассивные четырехполюсники . . . . .  | 66        |
| <b>5. ЧАСТОТНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИКИ ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЕЙ</b>   | <b>71</b> |
| 5.1. Основные определения . . . . .   | 71        |
| 5.2. Частотные характеристики простых $RC$ - и $RL$ -цепей . . . . .                        | 71        |
| 5.3. Частотные характеристики более сложных $RC$ -цепей . . . . .                           | 75        |
| 5.4. Последовательный колебательный контур . . . . .  | 81        |
| 5.5. Параллельный колебательный контур . . . . .  | 85        |
| 5.6. Связанные колебательные контуры . . . . .  | 89        |
| 5.7. Частотные характеристики цепей с периодической структурой . . . . .                    | 92        |
| <b>6. НЕЛИНЕЙНЫЕ ЦЕПИ</b>   | <b>97</b> |
| 6.1. Нелинейные элементы и их характеристики . . . . .                                      | 97        |

|   |            |
|---|------------|
| 6.2. Анализ статического режима в цепи с нелинейным двухполюсником                                  | 99         |
| 6.3. Линейные схемы замещения нелинейных резистивных элементов                                      | 100        |
| 6.4. Модели электронных устройств в режиме малого сигнала   | 104        |
| 6.5. Преобразование колебаний в нелинейных элементах  | 107        |
| 6.6. Цепь с нелинейным конденсатором. Параметрическое усиление                                      | 113        |
| <b>7. СОБСТВЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ</b>  | <b>117</b> |
| 7.1. Собственные колебания в одноконтурных $RC$ - и $RL$ -цепях                                     | 118        |
| 7.2. Собственные колебания в последовательном колебательном контуре                                 | 122        |
| 7.3. Собственные колебания в связанных контурах   | 129        |
| 7.4. Устойчивость цепей. Собственные колебания в активных цепях                                     | 132        |
| <b>8. НЕСТАЦИОНАРНЫЕ ПРОЦЕССЫ В ЛИНЕЙНЫХ ЦЕПЯХ</b>  | <b>135</b> |
| 8.1. Воздействие источника ступенчатого сигнала на цепи первого порядка                             | 136        |
| 8.2. Воздействие источника ступенчатого сигнала на цепи второго порядка                             | 140        |
| 8.3. Воздействие источника произвольного вида на линейную цепь                                      | 147        |
| 8.4. Операторный метод исследования нестационарных процессов в линейных цепях произвольного порядка | 153        |
| 8.5. Импульсная характеристика линейной цепи. Интеграл Дюамеля                                      | 157        |
| 8.6. Метод преобразования Лапласа   | 162        |
| <b>9. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ЦЕПИ. СИНТЕЗ ПАСИВНЫХ ДВУХПОЛЮСНИКОВ</b>                       | <b>170</b> |
| 9.1. Аналитические свойства сопротивления и проводимости линейного двухполюсника                    | 171        |
| 9.2. Частотные характеристики четырехполюсников   | 177        |
| 9.3. Синтез пассивных двухполюсников  | 180        |
| <b>10. ЦЕПИ С РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ</b>   | <b>184</b> |
| 10.1. Регулярная линия передачи и ее параметры  | 185        |
| 10.2. Волновые процессы в линии передачи без потерь   | 189        |
| 10.3. Гармонические колебания в линии передачи  | 193        |
| 10.4. Явления в нагруженной линии передачи  | 198        |
| <b>11. КОМПЬЮТЕРНЫЕ МЕТОДЫ АНАЛИЗА ЦЕПЕЙ</b>  | <b>203</b> |
| 11.1. Описание топологии электрических цепей  | 204        |
| 11.2. Топологический метод составления уравнений узловых напряжений                                 | 209        |
| 11.3. Метод переменных состояния  | 211        |
| <b>Приложения</b>   | <b>215</b> |
| <b>Рекомендуемая литература</b>   | <b>218</b> |
| <b>Предметный указатель</b>   | <b>219</b> |

*Учебное издание*

**БАСКАКОВ СВЯТОСЛАВ ИВАНОВИЧ**

**ЛЕКЦИИ ПО ТЕОРИИ ЦЕПЕЙ**

Редакторы: *Л. Г. Никольская, Л. С. Слуцкин*

Художественный редактор *А. Ю. Землеруб*

Технические редакторы: *Н. Н. Хотулева, З. Н. Ратникова*

Корректор *В. В. Сомова*

ИБ № 22

---

|                         |                             |                              |
|-------------------------|-----------------------------|------------------------------|
| Сдано в набор 04.02.91  | Подписано в печать 25.11.91 | Формат 60×90 <sup>1/16</sup> |
| Бумага типографская № 2 | Гарнитура литературная      | Печать высокая               |
| Усл. печ. л. 14,0       | Усл. кр.-отт. 12,65         | Уч.-изд. л. 12,4             |
|                         |                             | Тираж 6 000 экз.             |
| Изд. № 7                | Заказ № 16                  |                              |

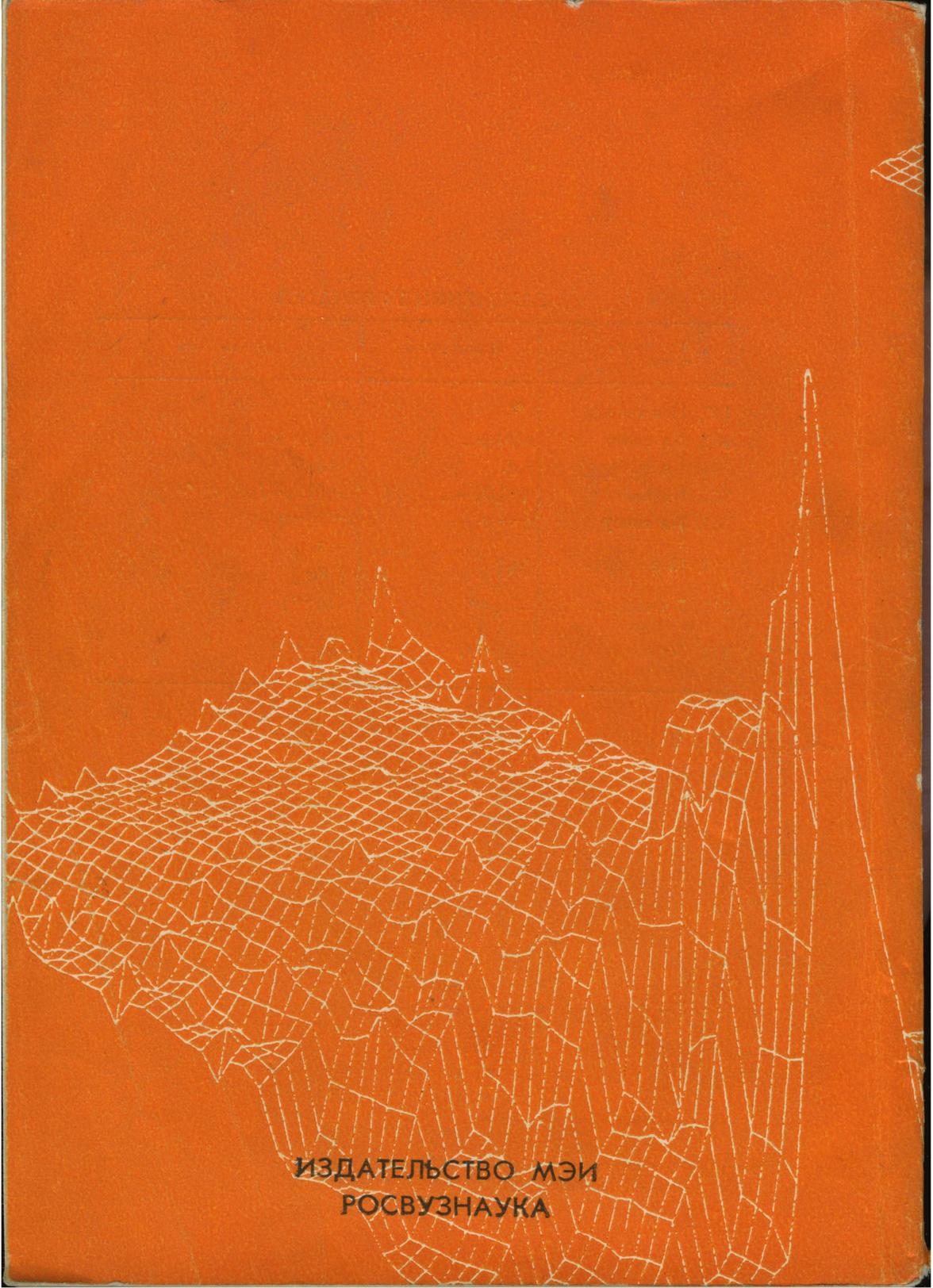
Издательство МЭИ, 105835, Москва, ГСП, Е-250, Красноказарменная ул., д. 14  
Акционерное общество «Росвузнаука»  
129805, Москва, ул. Павла Корчагина, д. 22, кор. 2

---

Типография изд-ва «Радио и связь». 101000 Москва, ул. Кирова, д. 40

### ЗАМЕЧЕННЫЕ ОПЕЧАТКИ

| Страница,<br>строка        | Напечатано               | Должно быть                                |
|----------------------------|--------------------------|--|
| 146, 15-я сверху           | $e^{\gamma z}$           | $e^{\gamma z t}$                           |
| 153, 3-я снизу             | $p(px + \dots$           | $= p(px + \dots$                           |
| 193, 1-я снизу             | $j\omega L$              | $j\omega L_1$                              |
| 201, 1-я снизу             | $+1/2 \dot{U}_2 - \dots$ | $+1/2 (\dot{U}_2 - I_2 Z_B) e^{-j\beta t}$ |
| 201, 3-я <b>снизу</b>      | $e^{-j-z}$               | $e^{-j\beta(t-z)}$                         |
| 212, 12-я сверху           | $[u_C]$                  | $\begin{bmatrix} i_L \\ u_C \end{bmatrix}$ |
| 216, 5-я сверху<br>в табл. | $-ae^{-at}$              | $-ae^{-at}$                                |
| 216, 5-я снизу<br>в табл.  | $-ae^{-bt}$              | $-ae^{-bt}]$                               |



ИЗДАТЕЛЬСТВО МЭИ  
РОСВУЗНАУКА