И. ДЕПМАН

РАССКАЗЫ О МАТЕМАТИКЕ

Детгиз · Ленинград · 1954

ШКОЛЬНАЯ БИБЛИОТЕКА

И. ДЕПМАН

РАССКАЗЫ О МАТЕМАТИКЕ

ДОПОЛНЕННОЕ И ИСПРАВЛЕННОЕ ИЗДАНИЕ

**Государственное Издательство
Детской Литературы Министерства Просвещения РСФСР**
Ленинград 1954

Обложка С. Барабошина

ДОРОГИЕ ЧИТАТЕЛИ!

Присылайте нам ваши отзывы о прочитанных вами книгах и пожелания об их содержании и оформлении.

Укажите свой точный адрес и возраст.

Пишите по адресу: Ленинград, наб. Кутузова, 6, Дом детской книги Детгиза.

ДЛЯ СРЕДНЕЙ ШКОЛЫ

Депман Иван Яковлевич. «Рассказы о математике».

Ответственный редактор **Л. А. Джалалбекова.**
Художник-редактор **Ю. Н. Киселев.** Технич редактор. **Н. М. Сусленникова.**
Корректоры **А. П. Нарвойш** и **Ф С. Артемьева.**
Подписана к набору 21/V 1954 г. Подписана к печати 31/VII 1954 г. Формат 84×108 $^1/_{32}$ Физ. п. л 4 $^1/_2$. Усл. п. л. 7,39. Уч.-изд. л. 6,75. Тираж 200 000 экз. М-43201. Ленинградское отделение Детгиза, Ленинград, наб. Кутузова, 6. Цена 3 р. 05 к. Заказ № 66 2-я фабрика детской книги Детгиза Министерства Просвещения РСФСР. Ленинград, 2-я Советская, 7.

ВВЕДЕНИЕ

Рассказы, составляющие эту книгу, касаются вопросов математики, которые изучают в пятых-седьмых классах средней школы. В книге говорится о том, как из трудовой деятельности человека возникли главнейшие понятия и основные разделы начальной математики, как они развивались и совершенствовались и достигли их современного состояния.

Для сколько-нибудь полного изложения исторического развития главнейших идей основных разделов начальной математики — арифметики, алгебры и геометрии — потребовалось бы несколько толстых книг. В одной маленькой книжечке умещаются лишь краткие рассказы о самых основных ступенях развития этих идей. Автор ставит себе целью рассказать прежде всего о зарождении математики у древнейших народов, история которых нам известна. В первом разделе книги даются краткие сведения о математике вавилонян, египтян, греков и индусов. К сожалению, история древней китайской математики, нас весьма интересующая, европейской науке пока почти неизвестна.

Во втором разделе книги рассказывается о развитии математики у народов Советского Союза — армян, узбеков, таджиков и других народов Средней Азии, и русского народа, до XVIII столетия. Этот обзор заканчивается рассказом об „Арифметике" Л. Ф. Магницкого, 1703 года, которая как бы подвела итог развитию математики у русского народа до XVIII века. Желая подчеркнуть тот факт, что некоторые исторически развившиеся черты народной математики продолжали бытовать в обращении и в XVIII и XIX веках, в этот раздел включен рассказ о математических забавах в учебниках более позднего периода.

В третьем разделе книги сообщаются сведения о возникновении основных понятий арифметики, алгебры и геометрии и приводятся приемы решения отдельных вопросов начальной математики.

Выдающиеся русские математики наряду с самыми высокими вопросами математики занимались и основами этой науки, то есть вопросами, которые имеют непосредственную связь с изучаемой в школе начальной математикой. Это обстоятельство позволяет в плане книги повести́ рассказ о величайших отечественных математиках: о гениальном математике XVIII века, члене Петербургской Академии наук, Леонарде Эйлере и его учениках, о творце новой геометрии — Николае Ивановиче Лобачевском, о Пафнутии Львовиче Чебышеве, создавшем ряд новых областей математики и давшем мощный толчок развитию той высшей арифметики, которая, с одной стороны, близка к школьной арифметике, а с другой стороны, — поднимает вопросы исключительной трудности. Крупнейший советский математик Герой Социалистического Труда Иван Матвеевич Виноградов, создав метод решения вопросов, к которым безрезультатно подходили крупнейшие математики современности, является непосредственным продолжателем Петербургской математической школы, созданной П. Л. Чебышевым. В этом же разделе дан очерк о славной русской женщине-математике—Софье Васильевне Ковалевской.

Школьники ежедневно обращаются к книгам Андрея Петровича Киселева и Николая Александровича Шапошникова. В конце книги даны краткие очерки об этих авторах, на книгах которых учились математике много десятков поколений молодежи нашей страны.

Для заинтересовавшихся отдельными вопросами, затронутыми в книге, в конце ее дан указатель литературы, в котором можно найти более подробные сведения.

ЗАРОЖДЕНИЕ МАТЕМАТИКИ

Математика у древних народов

В основе развития математики, как и всякой другой науки, лежат запросы практической деятельности человека.

Возникновение и развитие наук обусловлено производством. У Ф. Энгельса мы читаем: „Как и все другие науки, математика возникла из практических нужд людей: из измерения площадей земельных участков и вместимости сосудов, из счисления времени и из механики“.[1]

Каждая страница этой книги подтверждает высказывание Энгельса. Не только начальные понятия математики, но и самые высокие и отвлеченные идеи математической науки получали начало от практики человека.

Особенно поучительна в этом отношении деятельность великого русского математика — Пафнутия Львовича Чебышева.

Его самые оригинальные, совершенно новые для математики того времени, идеи возникли из изучения несовершенств ветряных мельниц, разных заводских установок, из решения других чисто практических задач.

Математика, как и всякая другая наука, вырастает из практики, ею питается и проверяется.

---

[1] Ф. Энгельс. Анти-Дюринг. Госполитиздат. 1948, стр. 37.

Отдельные математические знания, выросшие из практической деятельности человека, из наблюдения им явлений природы, существовали у всех известных нам народов древности.

В самые отдаленные времена люди в своей практической деятельности не могли обходиться без математических сведений. Имеются книги, изображающие жизнь человека на первых ступенях развития. Такова, например, книга: „Как люди без кузнеца жили".

Когда-то была объявлена большая премия за книгу на тему: „Как человек без математики жил". Премия осталась невыданной. Повидимому, ни один писатель не сумел изобразить жизнь человека, лишенного всяких математических понятий.

Математические сведения накапливались в результате практической деятельности народов в течение тысячелетий, в эпохи, о которых не существует письменных памятников. И в исторические эпохи жизни различных народов мы имеем большие периоды, которые не оставили имен мудрецов или ученых, и научные, в том числе и математические, достижения можно приписать только всему народу, его практической деятельности.

В настоящее время мы хорошо знакомы с математическими знаниями обитателей древнего Вавилона (часть современного Ирака) и древнего Египта (берега реки Нила). Наивысшего своего развития деятельность этих народов по созданию математики достигла около четырех тысяч лет назад.

О математике этих народов и надо рассказать прежде всего.

Египет

Современная наука располагает сравнительно небольшим числом египетских математических документов. Их всего около пятидесяти.

Самым древним памятником египетской математики является так называемый „Московский папирус",[1] от-

[1] **Папирус** — материал вроде очень плотной бумаги.

Иероглифическая надпись египтян и ее значение.

носящийся к эпохе около 1850 года до начала нашего летосчисления. Размеры Московского папируса: длина — 544 сантиметра, ширина — 8 сантиметров.

Он был приобретен русским собирателем Голенищевым в 1893 году, а в 1912 году перешел в собственность Московского музея изящных искусств.

В этом папирусе среди других задач решается задача о вычислении объема усеченной пирамиды с квадратным основанием. Таких задач не содержится в других египетских памятниках. Этот памятник был изучен советскими учеными — академиками Б. А. Тураевым и В. В. Струве.

Слово „весы“, написанное египетскими иероглифами.

По объему больше Московского папирус Ахмеса, найденный и приобретенный английским собирателем Райндом в 1858 году и потому часто называемый папирусом Райнда. Он относится к 1700 году до нашей эры. На русском языке он описан В. В. Бобыниным (см. указатель литературы в конце книги).

Египетское иератическое, то есть упрощенное, письмо.

Папирус Райнда представляет собой полосу в 544 сантиметра длиной и 33 сантиметра шириной. Он содержит решение 84 задач и носит заглавие, в котором автор дал свою оценку математики:

Обрывок папируса Ахмеса.

„Наставление, как достигнуть знания всех тёмных [трудных, непонятных] вещей... [кусок папируса вырван]... всех тайн, которые скрывают в себе вещи. Сочинение это написано в 33-м году в 4-м месяце времени вод в царствование царя Ра-а-ус. Со старых рукописей времен царя... [кусок папируса вырван] .. ат. Писец Ахмес написал это“.

Все остальные математические документы Египта, последний из которых относится к тысячному году нашего летосчисления, повторяют те же правила вычислений, которые имеются уже в названных основных документах.

Оказывается, что египтяне четыре тысячи лет назад решали многие задачи нашей практической математики (арифметики, геометрии и некоторых разделов алгебры).

Геометрическая задача из Московского папируса. Трапеция прямоугольная; в применении к ней данное в папирусах правило вычисления площади правильно.

Они имели нумерацию с десятичной основой, владели вычислениями при помощи дробных чисел.

Задачи, которые мы решаем при помощи уравнений первой степени, они решали способом, который в нашей школе называется „способом предположения". Этот прием употреблялся до XVIII века в арифметике всех народов под названием „способа ложного положения", или „фальшивого правила".

В чем заключается этот способ, будет показано в дальнейшем.

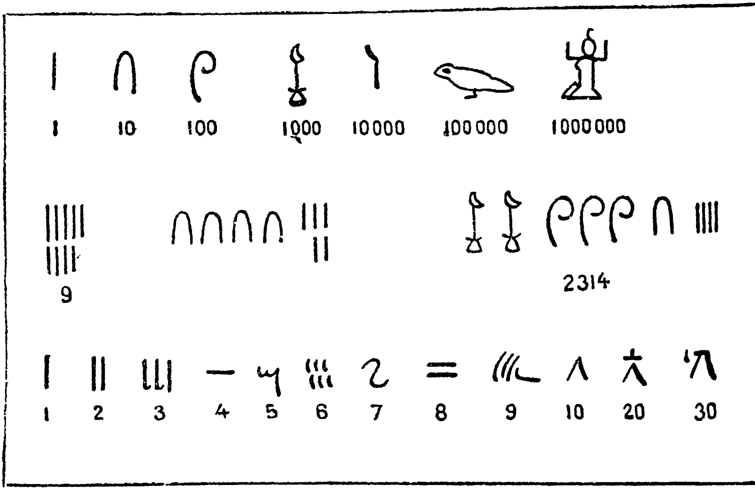
Египтяне умели вычислять площади прямолинейных фигур и круга. Отношение длины окружности к ее диаметру — наше число π, — согласно правилам египетской геометрии, оказывается равным 3,16. По мнению некоторых исследователей, египтяне знали правило для вычисления объема шара и, несомненно, умели вычислять объем усеченной пирамиды с квадратным основанием.

Вавилон

Одновременно с зарождением математики в Египте жители древнего Вавилона — шумеры и аккады — самостоятельно создали свою математику. Эти народы писали знаками, составленными из клиновидных черточек, на глиняных плитках, которые после сушки на палящем солнце приобретали большую прочность. В настоящее время эти глиняные плитки тысячами находят при раскопках.

В Ленинграде в Эрмитаже и в Московском музее изящных искусств имеется большое количество египетских и вавилонских памятников с подлинными надписями. Египетские надписи сохранились и на сфинксах, стоящих в Ленинграде на берегу Невы перед зданием Академии художеств.

Эти сфинксы (изображение царей в виде льва с человеческой головой) найдены при раскопках в Египте в 1819 году и привезены в Петербург в 1832 году. Они изображают египетского царя, который правил в 1419—1383 годы до нашего летосчисления, — следовательно, им около 3500 лет. Высечены они из самого



Египетские цифры: верхние две строки написаны иероглифами, нижняя строка — иератическими знаками.

прочного красного гранита и вынесли страшную жару Египта и холод Севера. Размеры: длина 4,88 метра, высота 3,66 метра, ширина около 1,55 метра; вес сфинкса — 23 тонны. За сфинксы было уплачено 64 000 рублей ассигнациями; перевозка обошлась в половину этой суммы. Академик А. Н. Крылов с удивлением отметил тот факт, что египтяне той эпохи имели зубила, которыми можно было вырезать в твердом граните тонкие фигуры письмен.

За последние двадцать-тридцать лет найдено и изучено громадное количество вавилонских математических памятников.

Уравнение, записанное иероглифическим письмом. Читается справа налево: „Куча [неизвестное], $^2/_3$, $^1/_2$, $^1/_7$, целое [кучи] составляет 33“, то есть $x + {}^2/_3x + {}^1/_2x + {}^1/_7x = 33$.

Один из сфинксов на набережной Невы в Ленинграде.

Найдена математическая энциклопедия вавилонян на сорока четырех таблицах, представляющая как бы сводку всех математических достижений вавилонян и относящаяся ко времени около двухтысячного года до нашего летосчисления, то есть к моменту наивысшего расцвета вавилонской культуры. Из этой энциклопедии видно, что вавилоняне в то отдаленное время имели достаточно удобные способы вычисления для решения практических задач, которые ставила практическая жизнь: земледелие, урегулирование орошения земли, торговля.

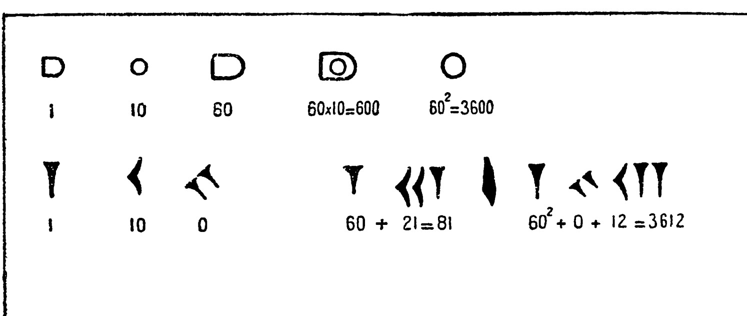
Вавилоняне были основоположниками науки астрономии. От них идет семидневная неделя, деление круга на 360 градусов, деление часа на 60 минут, минуты — на 60 секунд, секунды — на 60 терций. У них же зародилась астрология — мнимая наука об определении будущего по звездам.

Вавилоняне создали совершенное для своего времени счисление, в основе которого лежало не число 10, как у нас, а число 60, что во многих случаях облегчало труднейшее арифметическое действие — деление. Они же создали систему мер и весов, в которой каждая мера была в 60 раз больше предыдущей. Отсюда ведет начало наше деление мер времени — часа, минуты и секунды — на 60 частей.

Вавилоняне решали уравнения второй степени и некоторые виды уравнений третьей степени (последние при помощи специальных таблиц).

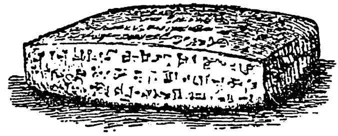
Со второй половины второго тысячелетия до начала нашего летосчисления на территории, лежащей между царствами Вавилонским и заменившим его Ассирийским, с одной стороны, и Закавказьем, с другой стороны, существовало Ванское царство, или царство Урарту, которое в VIII веке захватывало области южного Закавказья.

Народы Урарту, усвоив вавилонскую математику, переработали ее. Установлено, что они перешли к десятичной нумерации, близкой к нынешней позиционной десятичной (в которой одна и та же цифра означает



Вавилонские цифры: верхняя строка — шумерские цифры, нижняя — вавилонские.

различные разряды, в зависимости от занимаемого места) и резко отличающейся от египетской десятичной нумерации, которая не знала позиционного принципа.



Вавилонская глиняная плитка с надписями.

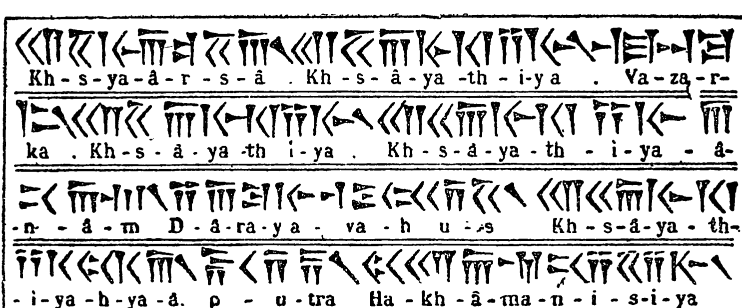
Урартская арифметика во многом сходна с древнеармянской. Таким образом, математика древних вавилонян через народы Урарту оказала влияние на древнейшую математическую культуру закавказских народов, в особенности армянскую, содействовав исключительно раннему ее расцвету.

Индия

Параллельно с Египтом и Вавилоном шло развитие математики в Индии.

За две или полторы тысячи лет до начала нашего летосчисления были написаны древние индусские книги, называемые ведами.

В этих книгах и их переделках, в так называемых сутрах, содержатся подробные правила для замены одной фигуры равновеликой ей другой, для разделения и складывания этих фигур. При этом пользуются глав-



Подпись царя Ксеркса клинописью.

ным образом прямоугольными треугольниками, стороны которых выражаются целыми числами. Ведам известны целочисленные прямоугольные треугольники следующих видов:

1) со сторонами 3, 4, 5 и ему подобные, получаемые от умножения чисел 3, 4, 5 на одно и то же число;

2) со сторонами 5, 12, 13 и ему подобные;

3) со сторонами 8, 15, 17 и 12, 35, 37.

Прямоугольные треугольники обладают тем свойством, что сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы (теорема Пифагора). Этому требованию удовлетворяют треугольники с указанными выше сторонами. Например:

$$12^2 + 35^2 = 144 + 1225 = 1369 = 37^2.$$

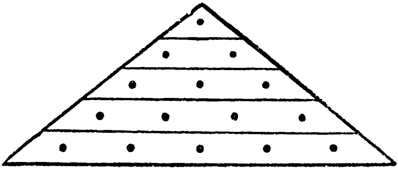
Построение фигуры иной формы, которая была бы точно равновелика данной, и родственные задачи составляют существенную часть и греческой геометрии и изучаются в нашем школьном курсе.

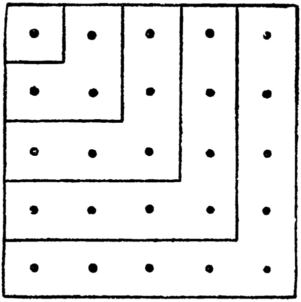
Вавилонское письмо.

Строительное искусство требовало складывания фигур квадратной, треугольной или многоугольной формы из квадратных плит или кирпичей. Эта задача, по всей вероятности, дала начало учению о треугольных, квадратных и вообще многоугольных числах. Это учение было широко развито и в Греции.

Треугольными назывались числа: 1, 3, 6, 10, 15 и так далее; квадратными — 1, 4, 9, 16, 25 и так далее. Если изобразить кирпичи точками, то эти числа представляют количество точек (кирпичей), необходимых для построения треугольной или квадратной фигуры при постепенном увеличении сторон их, как показывают чертежи.

Квадратные плиты (кирпичи) были основным строительным материалом в Индии и в





Подсчет точек в треугольниках дает „треугольные" числа: 1, 3, 6, 10, 15... в квадратах — квадратные числа: 1, 4, 9, 16, 25...

особенности в соседнем с ней Вавилоне, совершенно лишенном камня и дерева. Равновеликость фигур определялась по числу этих плит.

Эта практическая задача строительного искусства выдвинула вопрос об определении числа плит, необходимых для получения треугольной, квадратной или многоугольной фигуры с заданной величиной площади.

Решение этой задачи требовало изучения свойств последовательностей чисел натурального ряда: 1, 2, 3, 4,... треугольных: 1, 3, 6, 10, 15,... квадратных: 1, 4, 9, 16... Этими вопросами занимались вавилоняне, индусы, а позднее — греческие математики, в особенности Пифагор (VI век до начала нашего летосчисления) и его школа.

В жизнеописаниях Пифагора рассказывается о пребывании его в Египте, Вавилоне и Индии. Вероятно, многие приписываемые ему открытия, в том числе учение о так называемых фигурных числах (треугольных, квадратных и т. д.), были им вынесены из Вавилона и Индии, где это учение возникло из задач строительного искусства этих стран.

Самым ценным вкладом индусов в сокровищницу математических знаний человечества является употребляемый нами способ записи чисел при помощи десяти знаков: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 0.

Основа этого способа заключается в идее, что одна и та же цифра обозначает единицы, десятки, сотни или тысячи, в зависимости от того, какое место эта цифра занимает. Занимаемое место, в случае отсутствия каких-нибудь разрядов, определяется нулями, приписываемыми к цифрам.

Окончательная разработка такой поместной, или позиционной, системы нумерации, идея которой была у вавилонян, есть величайшая заслуга индусов.

Великий французский математик Лаплас (1749—1827) пишет по этому поводу: „Мысль — выражать все числа немногими знаками, придавая им кроме значения по форме еще значение по месту, настолько проста, что именно из-за этой простоты трудно оценить, насколько она удивительна. Как нелегко прийти к этому, мы видим ясно на примере величайших гениев греческой учености — Архимеда и Аполлония, от которых эта мысль осталась скрытой“.

Великое открытие поместной системы нумерации было сделано не каким-нибудь гениальным человеком. Это открытие индусов, как и все открытия египтян и вавилонян, является результатом долгого, постепенного обогащения опыта и наблюдения целого народа. Таковы же многие, на первый взгляд весьма абстрактные, достижения математики.

Греческая математика

Весьма большая часть школьного курса математики, особенно геометрии, была известна греческим математикам.

В области математики о греках можно сказать словами Энгельса:

„Мы вынуждены, как и в столь многих других областях, всё вновь возвращаться к достижениям того маленького народа, универсальная одаренность и деятельность которого обеспечили ему в истории развития человечества место, на какое не может претендовать ни один другой народ..."[1]

Ряд имен греческих математиков встречается в учебниках арифметики и геометрии. О них и скажем несколько слов.

Самым ранним греческим математиком является Фалес (VII и VI века до нашего летосчисления).

Ему приписывается несколько начальных теорем геометрии (о равенстве углов при основании равнобедренного треугольника, о равенстве треугольников по стороне и двум прилежащим к ней углам и другие). Он предсказал солнечное затмение.

В VI веке до нашего летосчисления жил упомянутый выше Пифагор. Кроме указанных уже открытий ему приписывают еще очень много, между прочим математическую теорию музыки, современный вид которой дал член Петербургской Академии наук Леонард Эйлер (1707—1783).

Около 300-го года до нашего летосчисления Евклид составил „Начала" (геометрии), содержание которых охватывает бо̀льшую часть школьного курса геометрии. Об этом будет речь в разных местах нашей книги, равно как о заслугах Евклида в арифметике.

Математик и механик Архимед (287—212) является величайшим математиком всех времен. У него имеются начала многих идей математики, к которым европейские народы пришли 2000 лет позднее.

В учебнике арифметики упоминается имя Эратосфена, математика и географа, который дал прием выделения простых чисел в натуральном ряде чисел и вычислил длину меридиана.[2]

Греки превратили математику в отвлеченную теоретическую науку, в которой достигли большой точности. У них, между прочим, возникли четыре замечательные задачи, которыми человечество занималось свыше двух с половиною тысячелетий. Задачи эти следующие:

1. Разделить окружность или дугу на произвольное число равных частей (построить в окружности правильный многоугольник с любым числом сторон).

---

[1] „Диалектика природы", 1948, стр. 27.

[2] Как он измерил длину меридиана, об этом рассказано в книге „Меры и метрическая система".

2. Удвоить куб, то есть построить куб, который имел бы объем в два раза больший, чем данный куб.

3. Разделить любой угол на три равные части.

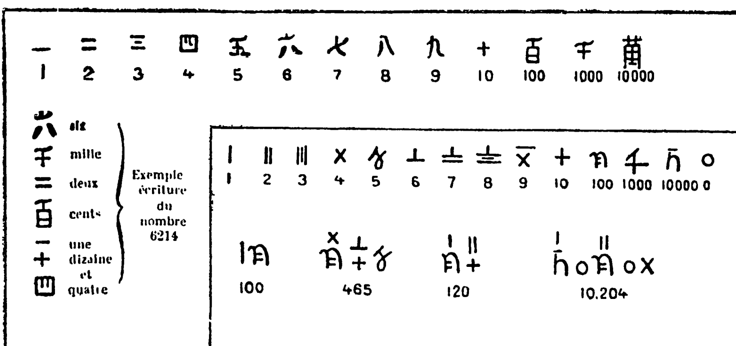
4. Построить квадрат, имеющий площадь, равную площади данного круга.

Все эти задачи требовалось решать точно, пользуясь только циркулем и линейкой, на которой нет делений. Несмотря на кажущуюся простоту, эти задачи оказались неразрешимыми, что было установлено лишь ко второй половине XIX века.

До этого времени, а отчасти и после него, очень многие люди, в особенности из числа любителей математики, не изучившие серьезно этой науки, тратили время и силы на безнадежные попытки решения этих задач.

История этих задач, о которых написано много книг и брошюр на всех языках, потребовала бы отдельной книги, из которой можно было бы видеть, как попытки решить эти, на первый взгляд очень простые, задачи помогли выработать методы, благодаря которым созданы важные отрасли современной математической науки.

Греческая наука замерла в V веке нашего летосчисления. После этого в течение 1000 лет европейские народы не только не делали никаких успехов в математике, но и не знали о достижениях греческой математики.



Китайские цифры: верхняя строка — цифры ученых трактатов; внизу слева запись числа 6214; в отделенной части китайские коммерческие цифры.

Восточные народы (Индии, Китая, Средней Азии) продолжали развитие математики. Их достижения постепенно проникают и в Европу: около 1000-го года — наша современная нумерация, около 1200-го года — индусская арифметика, почти совпадающая с нашей. Лишь с XVI столетия начинается самостоятельное развитие алгебры в Европе, а в XVII столетии зарождается современная высшая математика. В зарождении математики у европейских народов велика роль некоторых народов Советского Союза, к рассказу о математике которых и перейдем.

МАТЕМАТИКА У НАРОДОВ НАШЕЙ РОДИНЫ

Математика у армян

Самые ранние сведения о математике у народов нашей Родины относятся к первому тысячелетию нашего летосчисления.

На первом месте по древности математической культуры среди народов Советского Союза стоят армяне.

У армян в VII веке был замечательный ученый Анания из Ширака, труды которого в большом количестве дошли до нашего времени.

Анания из Ширака был математиком, астрономом, метеорологом, историком и географом. Он разбирает в своих сочинениях, помимо чисто арифметических задач, вопросы о шарообразности Земли, о затмениях Луны и Солнца, о применении нуля в математике, о многоугольных числах, о календарных исчислениях, о солнечных часах, — всё это в такую эпоху, когда у европейских народов этими вопросами еще почти никто не занимался.

Как утверждают историки армянского народа, научная литература для Анании не самоцель. Когда его родине угрожала опасность, он был непосредственным участником в освободительной борьбе против византийских захватчиков.

Боец-армянин сражался за родину мечом, а ученый-патриот—пером. Таким был Анания из Ширака, первый армянский математик.

Из сочинений Анании особенный интерес для нас представляют учебник по арифметике и задачник.

В начале задачника помещено теоретическое введение и таблицы сложения, вычитания, умножения и деления чисел, похожие на таблицы наших школьных учебников младших классов.

Эти таблицы принадлежат к самым древним из известных в науке.

Вот примеры задач Анании:

„№ 11. Один купец прошел через три города, и взыскали с него в первом городе пошлины: половину и треть имущества, и во втором городе половину и треть (с того, что у него осталось), и в третьем городе снова взыскали половину и треть (с того, что у него было); и когда он прибыл домой, у него осталось 11 дахеканов (денежных единиц). Итак, узнай, сколько всего дахеканов было в начале у купца". *Ответ*: 2376.

„№ 22. Фараон, царь Египта, праздновал день своего рождения, и обычай был у него раздавать в этот день десяти вельможам, по достоинству каждого, сто мер вина. Итак, раздели это сообразно достоинству всех десяти".

(Смысл слов: „сообразно достоинству каждого" означает, что доля первого относится к доле второго, как $1:2$, доля второго — к доле третьего, как $2:3$ и т. д.)

Ответ (в современном способе письма): первый получил $1\frac{9}{11}$, второй — $3\frac{7}{11}$, седьмой $-12\frac{8}{11}$.

Анания дает ответ в египетской форме дробей: первый — $1\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{5}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{55}$, то есть $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{5}+\frac{1}{10}+\frac{1}{55}$,

седьмой — $12\,\frac{1}{2}\,\frac{1}{10}\,\frac{1}{22}\,\frac{1}{30}\,\frac{1}{33}\,\frac{1}{55}$.

„№ 24. В городе Афинах был водоем, в который проведены три трубы. Одна из труб может наполнить водоем в один час, другая, более тонкая, — в два часа, третья, еще более тонкая, — в три часа. Итак, узнай, в какую часть часа все три трубы вместе наполняют водоем".

Ответ: $\frac{1}{4}\,\frac{1}{6}\,\frac{1}{12}\,\frac{1}{22}=\frac{6}{11}$ часа.

Высота уровня математических знаний Анании становится ясной, если указать, что современник его, английский монах Бэда, „достопочтенный“, который считался в Европе самым ученым человеком своего времени, говорит: „В мире есть много трудных вещей, но нет ничего такого трудного, как четыре действия арифметики“. Анания же решает задачи (например, № 21 его задачника), требующие сложения восьми дробей, среди знаменателей которых имеются 7, 8, 9, 13, 14, 16, 20, что приводит к очень большому общему знаменателю.[1] Для сравнения отметим, что автор английского учебника арифметики 1735 года пишет: „В интересах учащихся... мы излагаем отдельно (в конце книги) правила действий над ломаными числами, обыкновенно называемыми дробями, при виде которых часть учащихся приходит в такое уныние, что останавливается и восклицает: „Только не дальше!“

Таким образом, действия над дробями, которые одиннадцать столетий позднее еще приводят в ужас обучающихся арифметике в Англии, для Анании из Ширака не представляют никакого труда.

Этот факт хорошо иллюстрирует состояние математических знаний у армян в отдаленную от нашего времени эпоху седьмого столетия.

В XI столетии (1051) были переведены с греческого языка на армянский сокращенные „Начала“ геометрии греческого математика Евклида. Перевод этот сохранился до нашего времени в Ереванском музее, являющемся одним из знаменитейших во всем мире.

„Начала“ Евклида—первоисточник нашей геометрии и единственное руководство по геометрии в течение двух тысяч лет у всех народов. Много сотен раз эта книга переводилась на различные языки. Армянский перевод „Начал“ был по времени вторым (после перевода на арабский язык). На латинский язык, международный для ученых Европы, „Начала“ были переведены с арабского в 1120 году, а первый перевод с греческого оригинала в Европе был сделан лишь в 1533 году, почти на пять веков позднее перевода на армянский язык.

Кроме Анании из Ширака и предполагаемого переводчика „Начал“ Евклида Грегора Магистра, известны и другие армянские математики средних веков, напри-

---

[1] Прочтите балладу Я. П. Полонского „Бэда-проповедник“.

мер Ованес Саркава-Вардапет (вардапет — учитель), умерший в 1129 году. Ованес Саркава излагает учение греческого математика Никомаха (I век нашей эры) о числах, улучшает календарь установлением года в 365 дней и ратует за знание, опирающееся на опыт. „Без опыта никакое мнение не может быть вероятным и приемлемым, так как только опыт является несомненным“, — пишет он.

Все эти факты свидетельствуют о высоком уровне культуры в Армении в древности и в средние века. Известны армянские ученые, которые были профессорами в греческой академии в первые века нашего летосчисления.

Приводим в заключение слова первого армянского математика — Анании из Ширака об этой науке: „И сильно возлюбив искусство числительное, помыслил я, что без числа никакое рассуждение философское не слагается, всей мудрости матерью его почитая“.

Подобные высказывания о математике мы многократно находим в старых русских памятниках.

Математика у народов Средней Азии

Мы рассказали о зарождении математической науки у вавилонян, египтян и индусов и о том, что в дальнейшем, в течение тысячи лет, начиная с VII столетия до нашего летосчисления, развитие математики главным образом происходило в Греции. С конца V столетия нашего летосчисления, когда прекратилось греческое математическое творчество, в следующие за этим века, примерно до 1200 года, о математике у европейских народов нет почти никаких сведений. Всесильные в то время служители церкви относились враждебно ко всякой науке, в том числе и к математике. Не отставали от церковников и светские власти.

Византийский император Юстиниан помещает в своем кодексе законов 529 года раздел, озаглавленный „О злоумышленниках, математиках и тому подобных“, в котором содержится параграф: „Само же достойное осуждения искусство математики воспрещается совершенно“. Впрочем, здесь под понятие „математики“

входили и гадатели и астрологи, предсказывавшие будущее по звездам, что видно из закона императора Феодосия: „Никто да не советуется с гадателем или математиком“.

Влиятельный монах Качини, один из главных преследователей великого ученого Галилео Галилеи (1564—1642), еще в XVII столетии заявляет, что математики, как творцы всяких ересей, должны быть сожжены на всей земле христианской. Церковникам, единомышленникам монаха Качини, удалось лишить престарелого ученого свободы и подвергнуть пыткам, но им не удалось заставить его отказаться от учения польского астронома и математика Коперника (1473—1543), согласно которому не Солнце движется вокруг Земли, а Земля обращается около Солнца.

Науки были превращены в служанок богословия, немало передовых ученых кончили свои дни на кострах по решению церковных судилищ (инквизиции). Глава инквизиции в Испании („великий инквизитор“) Томас Торквемада в 1486 году отправил на костер испанского математика Вальмеса за утверждение, что он нашел решение уравнения четвертой степени (уравнения, содержащего x^4), которое, как утверждает Торквемада, по воле бога недоступно человеческому разуму. Отметим, что способ решения этих уравнений был найден итальянским математиком Феррари в середине XVI века.

Результатом такого отношения к науке было не только прекращение движения науки вперед, — самые ученые люди того времени перестали понимать прежнюю науку.

В VII веке среди прежних народов начинают играть видную роль арабы. Они вели грандиозные завоевательные войны и захватили постепенно большинство прежних культурных стран.

Торговля, мореходство, промышленность, военное дело требовали научных знаний. С начала IX века начинается усиленный перевод на арабский язык культурного наследия покоренных народов.

Многие математические труды греческих ученых мы знаем теперь только по арабским переводам их. Время от времени в арабских рукописях и в наши дни обнаруживаются неизвестные до того работы греческих математиков. Одним из последних таких крупных открытий было обнаруженное в 1924 году сочинение Архимеда о правильном семиугольнике. Этому замечательному открытию по истории греческой математики предшествовало сделанное 50 лет назад русским ученым А. И. Попадопуло-Керамевсом открытие неизвестного до того времени очень важного труда Архимеда, опубликованного в 1905 году под названием „Новое сочинение Архимеда“.

Улугбек.

Важными центрами научной жизни в восточных странах были города наших среднеазиатских республик: Самарканд, Хорезм (Ургенч), Бухара, Мерв и другие.

Здесь с IX века расцветает математическая мысль, появляются местные — узбекские и таджикские — ученые, которые обогатили науку, а в ряде случаев утвердили свою славу в науке на все времена. Среди этих ученых были: математик Мухáммед ал-Хорезми (Мухáммед из Хорезма), астроном Абуль ал-Фергани (Абуль из Ферганы), ферганцы же астрономы ат-Тюрки и его сын Абдуль Хасан, ал-Сагани из окрестностей города Мерва, ал-Ходженди и ал-Джаухари с берегов Сыр-Дарьи, ал-Бируни из Хорезма и Ибн-Сина из Бухары (IX—X век), Омар Хайям, жизнь которого связана с Самаркандом (XI век), ал-Каши — директор обсерватории ученого самаркандского князя Улугбека (XV век.)

Хорезмиец Мухаммед ал-Хорезми, родившийся во второй половине VIII века и умерший между 830 и 840 годами, написал учебник арифметики, по латинскому переводу которого европейские народы ознакомились с индусским способом счисления при помощи десяти цифр.

В начале IX века этот же Мухаммед ал-Хорезми написал учебник алгебры, ставший родоначальником европейских учебников.

Книга ал-Хорезми по алгебре дала этой науке не только название, но и совершенно новый характер.

У греков алгебра, называвшаяся арифметикой, занималась трудными, отвлеченными вопросами теории чисел. Ал-Хорезми же пишет в предисловии к своей книге, что он „составил это небольшое сочинение из наиболее легкого и полезного в науке счисления и притом такого, что требуется постоянно людям в делах о наследовании, наследственных пошлинах, при разделах имущества, в судебных процессах, в торговле и во всех их деловых взаимоотношениях, в случаях измерения земель, проведения каналов, в геометрических вычислениях и других предметах различного рода и сорта..."

Три четверти книги отведены решению практических задач, чего совершенно избегали греческие математики. Теоретическая часть книги проникнута пониманием того, что алгебра есть наука общего характера, решающая вопросы „различного рода и сорта" (общими методами,–добавляем мы).

От имени этого выдающегося узбекского ученого происходит математический термин „алгорифм" (но не слово „логарифм"), который в настоящее время означает всякую последовательность вычислений для решения определенного рода вопросов. Так, например, можно говорить об алгорифме решения уравнений, об алгорифме решения определенного типа задач и так далее.

В прежнее время алгорифмом, или алгоризмом, называлась арифметика, изложенная при помощи десятичной позиционной системы счисления, так как эту арифметику европейские ученые впервые узнали из только что упомянутого перевода „Арифметики индусскими цифрами" ал-Хорезми. Перевод начинался словами „ал-Хорезми об индусском счете"; слово „ал-Хорезми" и приняло форму „алгоризм".

Ал-Хорезми известен также своими астрономическими и географическими трудами (измерение длины меридиана).

Знаменитый философ, астроном и математик ал-Бируни (также из Хорезма) родился в 973 году.

Как философ, он интересен тем, что в те отдаленные времена он отстаивал права человеческого разума. Он пишет, что по поводу астрономических взглядов с ним „спорили некоторые люди, приписывающие божественной премудрости то, чего они не знают в науках. Они оправдывают свое невежество заявлением, что только аллах всемогущ и всеведущ".

Ал-Бируни не довольствуется тем, что та или иная астрономическая теория удобна для объяснения явлений. Одинаково удобно могут объяснять явления и несколько теорий. Ученый, по его мнению, должен ставить вопрос: которая из этих теорий истинна?

В замечательной математической „Книге об хордах" ал-Бируни сопоставляет разные способы доказательства отдельных предложений, имевшихся у более ранних ученых. Он говорил:

„Я собрал всё это для тебя, читатель, и по своему обыкновению отнес каждое доказательство к его автору, чтобы ты охватил их собственным оком и понял, что все они сходятся в одной точке, и чтобы ты сам решил, что нужно вывести отсюда для познания хорд".

По содержанию книга относится к учению о более сложных вопросах геометрии и тригонометрии — разделу математики, который изучается в школе, начиная с VIII класса. В астрономических работах ал-Бируни предвосхищает современные способы составления точных карт (метод триангуляции).

Внук монгольского властителя Тамерлана — Улугбек (1393—1449), сам крупный астроном, построил в Самарканде лучшую для того времени во всем мире обсерваторию, собрав в ней известнейших ученых для разработки астрономии и математических наук.

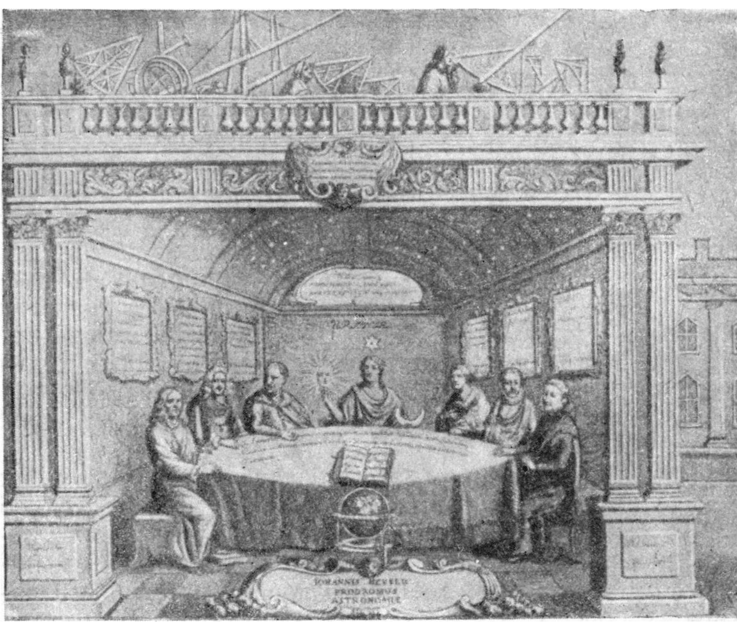
Тригонометрия многим обязана деятельности этой группы ученых.

Первым директором этой обсерватории был узбек Джемшид бен Масуд эд-Дин ал-Каши, умерший около 1436 года. Вклад, сделанный им в математические науки, весьма большой. Он нашел правило для вычисления суммы четвертых степеней последовательности натуральных чисел от 1 до любого числа m:

$$1^4 + 2^4 + 3^4 + \ldots + m^4 = \frac{1}{30}(6m^5 + 15m^4 + 10m^3 - m),$$

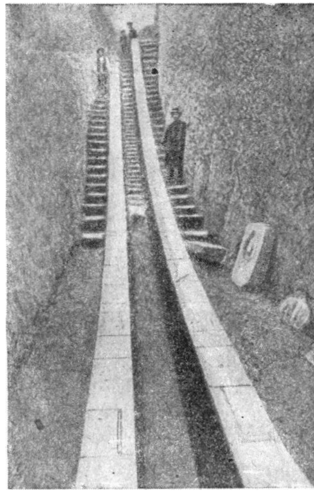
усовершенствовал тригонометрические вычисления, дал правила приближенного решения уравнений высших степеней, способ определения расстояний небесных тел, изобрел остроумный механический прибор для изучения положений планет. Все эти открытия лишь несколькими столетиями позднее были вновь сделаны европейскими учеными.

Ал-Каши в начале XV века написал книгу „Поучение об окружности“, на которую ссылается в своей книге (1427 года) — „Ключ к искусству счета“. В „Поучении об окружности“ он производит вычисления с поражающей нас точностью: если результаты, находимые им в шестидесятиричной системе счисления, перевести в десятичные дроби, то получаем 17 точных десятичных знаков после запятой. В своей книге ал-Каши находит приближенное отношение длины окруж-



Гравюра XVII столетия, изображающая Улугбека среди знаменитейших астрономов: за столом муза астрономии Урания. Первый по правую руку от Урании — Улугбек.

ности к радиусу (число, которое мы обозначаем символом 2π), вычисляя для этого сторону правильного многоугольника, у которого сторон 800 335 168. Как увидим в дальнейшем, ал-Каши получает для числа π 16 точных знаков после запятой.



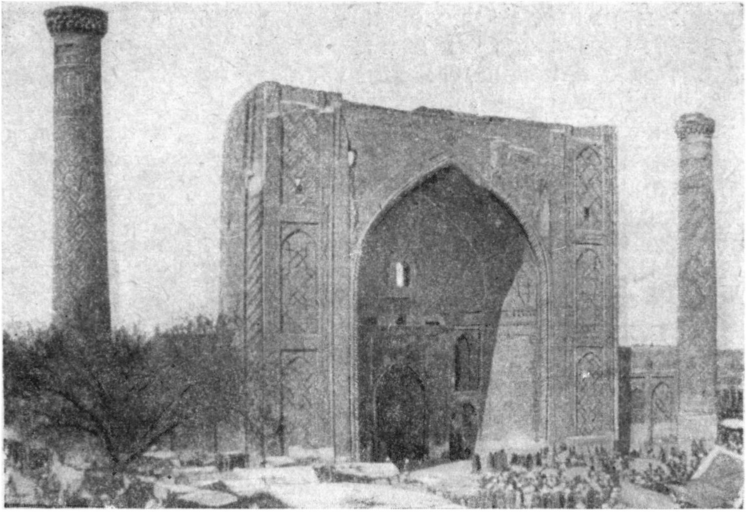
Дуга большого радиуса, разделенная на градусы; современные остатки обсерватории Улугбека в Самарканде.

В той же книге ал-Каши среди ряда других весьма важных новых результатов впервые вводит в науку десятичные дроби, без которых немыслимы современные математика и техника. Это имело место за 175 лет до появления десятичных дробей в Европе.

Знаменитый таджикский поэт, философ, математик и астроном Омар Хайям родился около 1048 года, умер около 1122 года. Из биографии его известно, что самаркандский друг его Абу Тагир дал ему возможность изучать математику. Последнему и посвящена алгебра Омара Хайяма, написанная в годы 1069—1074. В этой книге автор дает решение геометрическими методами уравнений третьей степени (содержащих x^3), что является наивысшим достижением алгебры средних веков. Алгебраические методы решения этих уравнений были найдены в Европе лишь в середине XVI столетия.

К геометрии относится найденная в наши дни работа Омара Хайяма — „Ключ к трудным местам Евклида". В ней Омар Хайям занимается вопросом о параллельных линиях и подходит к некоторым исходным идеям того самого высокого построения геометрической мысли, которое было в первой половине XIX столетия создано гениальнейшим геометром всех времен — Н. И. Лобачевским.

В 1079 году Омар Хайям составляет новый очень точный календарь. Математические расчеты календаря Омара Хайяма, введенного при его жизни в некото-



Остатки здания в Самарканде, в котором занимался Улугбек.

рых странах Азии, были использованы для французского революционного календаря в самом конце XVIII века.

Указание имен ал-Хорезми, ал-Бируни, ал-Каши и Омара Хайяма достаточно для характеристики того исключительно высокого уровня, которого достигли математические науки у наших среднеазиатских народов в Средние Века.

В Европе передовые ученые и мыслители в те времена, и еще позднее, нередко кончали свои дни на кострах (Джордано Бруно в 1600 году) или подвергались угрозам и пыткам инквизиции (Коперник, 1473—1543, Галилей, 1564—1642).

Внося книгу Коперника, от которой ведут начало наши современные взгляды на солнечную систему, в список запрещенных для католиков книг, цензура римской церкви в 1616 году писала: „Эти книги во избежание расползания подобного учения к ущербу католической истины приостанавливаются впредь до исправления". В „просвещенной" Европе научная книга должна была считаться не с научною истиною, а с католическою, то есть суевериями католической религии, в то время как узбекские и таджикские ученые того времени ратуют за свободу научной мысли.

Буржуазные историки обычно относят среднеазиатских ученых к арабским, так как они в большинстве случаев писали свои ученые труды на арабском языке. Однако это были не арабы, и ряд их рукописей сохранился только на их родном языке. Арабский язык был в те времена лишь международным языком ученых, как в Европе в то время и долго потом латинский язык.

Математика у русского народа

Письменные памятники математических знаний русского народа мы имеем начиная примерно с тысячного года нашего летосчисления. Эти знания являются результатом предшествовавшего долгого развития и основаны на практических нуждах человека.

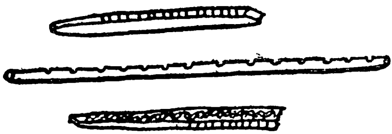
Рано возник на Руси интерес к науке в отдельных слоях населения. Сохранились сведения о школах при Владимире Святославовиче (978—1015), при Ярославе Мудром (1036—1054). Находились в очень раннюю эпоху „числолюбцы“, интересовавшиеся математикой не только в той мере, в какой она была нужна непосредственно для практической деятельности.

Примером таких „числолюбцев“ в начале XII столетия был новгородский монах — Кирик.

Говоря об интересе русского народа к математике в те отдаленные от нашего времени века̀, мы не должны забывать, что речь здесь идет о передовых людях, стремившихся к знанию, строивших национальную культуру, которая пышно расцвела в последующие века.

Рядом с этими прогрессивными элементами имелись значительные круги духовенства и эксплуататоров, которые относились к знанию вообще и к математике в частности враждебно. Свидетельства о враждебном отношении к знанию мы встречаем еще в XVII и XVIII веках.

Основной предпосылкой для всех математических знаний служит нумерация, которая у разных древних народов имела различный вид.



Бирки — расчетные палочки.

Повидимому, все народы вначале обозначали числа зарубками на палочках, которые у русских назывались бирками. Такой способ записей долговых обязательств или налогов применялся малограмотным населением разных стран. На палочке делали нарезы, соответствующие сумме долга или налога. Палочку раскалывали пополам: одну половину оставляли у должника или у плательщика, другую хранили у заимодавца или в казначействе.

При расплате обе половинки проверяли складыванием. В Англии этот способ записей налогов существовал до сравнительно недавнего времени. При ликвидации старых налоговых обязательств крестьян было решено сжечь накопившиеся бирки в печах здания парламента. От этого произошел пожар и сгорело само здание парламента (1834), а вместе с ним погиб и вделанный в стену образец английской меры длины, так что с тех пор англичане не знают точной длины своего фута. В продолжительной работе по восстановлению длины погибшего фута принимал участие ближайший помощник Д. И. Менделеева по упорядочению наших мер — профессор Ф. И. Блумбах. Англичане соблазняли Блумбаха остаться на работе в Англии. Из рассказа самого Блумбаха, умершего в 1949 году в звании почетного члена Академии наук Латвийской ССР, известно, что по поводу его отказа от предложения англичан Д. И. Менделеев с удовлетворением заметил: „Ты был и остался русским латышом...“

История пожара здания английского парламента описана великим писателем Ч. Диккенсом (An address on Administrative Reform). [1]

Греки в VI столетии до нашего летосчисления стали обозначать числа буквами, снабженными особым значком.

Таким же образом писали числа наши предки при помощи букв славянского алфавита, над которыми ста-

[1] В полном английском издании сочинений Диккенса.

вился особый значок — титло. Приведенная таблица показывает, какими буквами какое число обозначалось в славянской нумерации. Влиянием этой нумерации объясняется происхождение некоторых терминов русского языка. В старых учебниках грамматики буква „и“ называлась „и осьмиричное“, буква „i“ — „и десятиричное“. Объясняются эти названия тем, что в славянской нумерации буква „и“ обозначала 8, буква „i“ — 10.

В хозяйственной жизни далекого прошлого люди довольствовались сравнительно небольшими числами — так называемым „малым счетом“ наших предков. Он доходил до числа 10 000, которое в самых старых памятниках называется „тьма“, то есть темное число, которое нельзя ясно представить.

В дальнейшем граница малого счета была отодвинута до 10^8, до числа „тьма тём“. Старинная рукопись по этому случаю заявляет, что „больше сего числа несть человеческому уму разумети“. Но наряду с этим

а҃	в҃	г҃	д҃	є҃	ѕ҃	з҃	и҃	ѳ҃
аз	*вéди*	*глагóль*	*добрó*	*есть*	*зелó*	*земля́*	*и́же*	*фитá*
1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*
і҃	к҃	л҃	м҃	н҃	ѯ҃	о҃	п҃	ч҃
и	*кáко*	*лю́ди*	*мыслéте*	*наш*	*кси*	*он*	*покóй*	*червь*
10	*20*	*30*	*40*	*50*	*60*	*70*	*80*	*90*
р҃	с҃	т҃	ѵ҃	ф҃	х҃	ѱ҃	ѡ҃	ц҃
рцы	*слóво*	*твéрдо*	*ук*	*ферт*	*хер*	*пси*	*о*	*цы*
100	*200*	*300*	*400*	*500*	*600*	*700*	*800*	*900*

Славянская нумерация.

Славянская запись больших чисел.

„малым числом“, „коли прилучался великий счет и перечень“, употреблялась вторая система, называвшаяся „великим числом или счетом“ или „числом великим словенским“. В нем употреблялись более высокие разряды: тьма — 10^6, легеон — 10^{12}, леодр — 10^{24}, ворон — 10^{48}, иногда еще колода — десять воронов — 10^{49} (хотя нужно было за колоду принять, следуя системе, 10^{96}). Автор рукописи вновь заявляет, что „того числа несть больше“.

Для обозначения этих больших чисел наши предки употребляли оригинальный способ, не встречающийся ни у одного из известных нам народов: число единиц любого из перечисленных высших разрядов обозначалось той же буквой, что и простые единицы, но окруженной для каждого числа соответственным бордюром (см. таблицу).

Величайшие греческие математики не додумались до этого способа письма чисел.

Таких больших чисел не требовала в то время, и не требует и теперь, никакая практическая задача. Архимед, величайший греческий математик, сосчитал, что число песчинок во всем мировом пространстве, как это понимали в то время, не превышает 10^{63}.

Славянский „числолюбец“ сказал бы, что это число песчинок не больше тысячи легеонов воронов

$$(10^{63} = 10^3 \cdot 10^{12} \cdot 10^{48}).$$

Число песчинок во всем мировом пространстве человеку того времени действительно могло казаться наибольшим мыслимым числом, чем и оправдываются заявления авторов рукописей о том, что „больше сего не дано человеку разумети“. Рассматривание большого славянского счета неоднократно в русских математических рукописях свидетельствует о том, что „числолюбцы“ были достаточно многочисленны в древней Руси.

В первом печатном русском учебнике математики, в „Арифметике“ Л. Ф. Магницкого[1] (1703), даются уже интернациональные термины для больших чисел (миллион, биллион, триллион, квадриллион). Доходя до 10^{24} (квадриллиона), автор заявляет:

„Число есть бесконечно,
Умом нам не дотечно,
И никто не знает конца...
. . . .
. . . . бездельно
Множайших чисел искати
И больше сей писати
Превосходной таблицы.[2]
. . . .
И еще кому треба
Счисляти, что внутрь неба,
Довлеет числа сего
К вещем всем мира всего“.

Последние строки явно напоминают о задаче Архимеда об исчислении песчинок в мировом пространстве.

Славянская нумерация с принятием индусской потеряла всякое практическое значение.

Характерным „числолюбцем“ древней Руси был упоминавшийся уже нами монах Кирик, написавший в 1134 году книгу „Кирика — диакона Новгородского Антониева монастыря учение, им же ведати человеку числа всех лет“.

Он подсчитывает с азартом, сколько месяцев, сколько дней, сколько часов он прожил. Церковное летосчисление вело свой счет от предполагавшегося „сотворения мира“, которое относилось к 5510 году до начала нашего летосчисления. 1134 год, в котором Кирик писал свою книгу, был по церковному счислению 6644. Кирик вычисляет в месяцах, неделях и в днях время, прошедшее до этого года, выполняет разные вычисления дней церковных праздников на будущее время.

---

[1] В 1699 году в Амстердаме И. Ф. Копиевский напечатал „Руковедение в арытметику, сиречь во всякий счет“, в котором на шестнадцати маленьких страницах изложены основы счисления. Книжка распространения в России не получила.

[2] То есть доходящей до 10^{24}.

При исчислении времени Кирик употребляет „дробные часы“, подразумевая под ними пятые, двадцать пятые, сто двадцать пятые (и так далее) доли двенадцатичасового дня. Доходя в этом счете до седьмого дробного часа, каковых во дне оказывается 937 500, он заявляет: „больше сего не бывает“, что, повидимому, означает, что более мелких делений дня не употребляли.

В „Русской правде“, знаменитом правовом памятнике древней Руси, составление которого относят к промежутку времени между XI и XV столетиями, имеются статьи, посвященные вычислению потомства некоторого начального количества овец, коз и свиней. Вычислитель предполагает, что имеющееся число овец за год удваивается, и тогда, например, от двадцати двух овец через 12 лет будет стадо в $22 \cdot 2^{12} = 90112$ овец, какой результат и дается в „Русской правде“. Здесь мы имеем задачу, которая примерно в то же время появляется в руководствах арифметики разных народов то о потомстве кроликов, то в виде задачи о вознаграждении изобретателя шахматной игры. Эти вычисления, повидимому, были созданием таких „числолюбцев“, как упомянутый уже Кирик новгородский.

Естественно сопоставить со сказанным о математической культуре наших предков состояние математических знаний у народов, населявших Западную Европу. Арифметические действия там производят при помощи счетной доски (абака), на которую кладут камешки (бобы) или кружки́ с черточками.[1] Наши счеты, о которых речь впереди, являются совершеннейшим видом абака.

Запись чисел производится при помощи громоздкой римской нумерации, в которой даже малые числа требуют большого количества знаков (например, 888 записывается так: (DCCCLXXXVIII), а запись больших чисел гораздо сложнее, чем в „великом славенском счете“. Наши современные цифры в Западной Европе появляются в книгах лишь в XIII столетии, встречая сильное противодействие сторонников старого способа счета на абаке или при помощи римской нумерации.

[1] Полагают, что поговорка „остался на бобах“ ведет отсюда свое начало. Человек, проигравший все свои деньги, остался со своей счетной доской и с бобами, — „остался на бобах“.

Русские счеты

В первой главе мы рассказали о том, что индусский народ ввел особый знак для обозначения отсутствующего разряда числа. „Индусы изобрели нечто, чтобы обозначить ничто“. Без этого знака—нынешнего нуля—наша система счисления не имела бы тех преимуществ перед всеми бывшими и существующими другими системами счисления, какие она имеет.

Изобретение нуля индусами произошло в ту отдаленную эпоху, в которую о русском народе у нас нет никаких достоверных сведений.

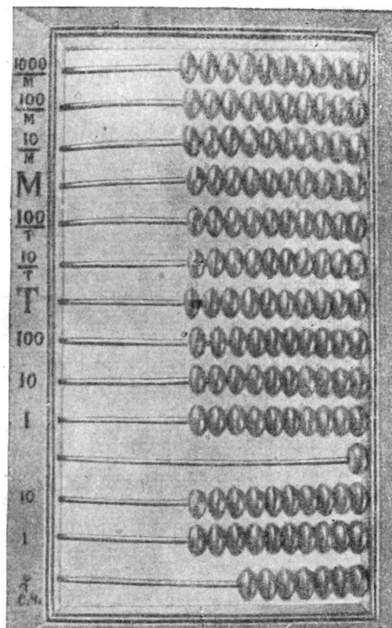
Русский народ изобрел идеальный прибор — счеты — для облегчения счисления по десятичной системе.

Эти счеты по справедливости называются **русскими**.

В книгах можно встретить указание, что счеты были изобретены китайцами, что они от китайцев перешли к сибирским народам и что известные в русской истории купцы и промышленники Строгановы привезли их в Россию.

Указывается и время, когда якобы появились счеты в России: по одним источникам—при Дмитрии Донском (XIV век), по другим — при Петре Первом (на рубеже XVII и XVIII веков).

Эти рассказы лишены основания в той же мере, как и преда-

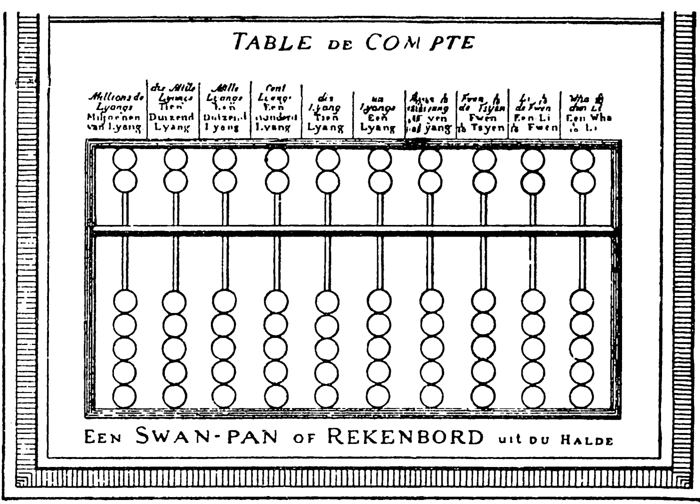


Русские счеты. На левой стороне рамки обозначения разрядов, откладываемых на каждой из проволок: единицы, десятки, сотни, тысячи и т. д.; вниз — гривенники, копейки, полушки; С. Ч.—инициалы владельца.

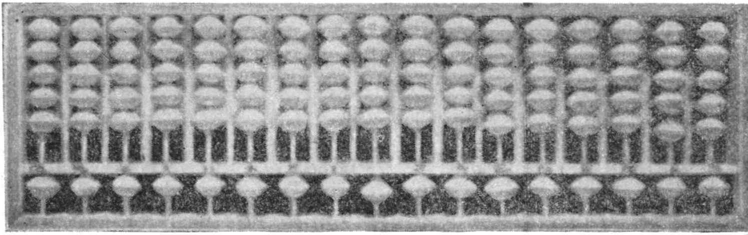
ния о том, что предок Строгановых был татарским королевичем. К сожалению, рассказы о восточном происхождении русских счетов попали в „Историю государства Российского“ Н. М. Карамзина (том IX, примечание 651) и отсюда в большинство учебников.

Китайцы, правда, имеют счетный прибор, соответствующий нашим счетам, но он основан на другой идее. Он носит название „суан-пан“ и представляет неглубокий ящик удлиненной формы, разделенный по длине на неравные части перегородкой. Поперек ящика, от одной более длинной стенки к противоположной, идут укрепленные концами в стенках прутики. На всех прутьях в более широком отделении ящика, ближе стоящем к считающему, имеется по пяти шариков; в верхнем, более узком отделении ящика, на каждом прутике по два шарика. Шарики нижней части суан-пана служат для счета до пяти, из двух шариков верхней части суан-пана каждый соответствует пятерке.

На чертеже изображен суан-пан XVII века (в настоящее время он имеет совершенно такой же вид).



Китайские счеты — суан-пан.



Японские счеты — сорубан.

Если нужно положить на нем 1, 2, 3, 4 единицы, то на том прутике, на котором изображаются единицы (на нашем чертеже на пятом прутике справа), передвигаем столько шариков к перегородке. Вместо передвижения пяти шариков к перегородке придвигается с верхней части прибора к перегородке один шарик. Если таким же образом прибавились еще пять единиц, то вместо них в верхней части прибора придвигают второй шарик. Но два эти шарика, как обозначающие две пятерки, дают вместе 10, и десяток изображается одним шариком нижней части прибора на следующем слева прутике. На дальнейших слева прутиках ставятся сотни, тысячи и т. д., а на прутиках вправо от прутика для единиц — десятые, сотые, тысячные и другие доли. На каждом прутике счет ведется так же, как с единицами на среднем прутике.

В XVI веке китайский суан-пан был усвоен японцами, лишь с тем отличием, что в верхнем отделении прибора японцы ставили на каждый прутик по одному шарику. Прибор этот в Японии называется „сорубан". Изменение, внесенное японцами в устройство прибора, правильно, так как второй шарик является излишним: каждый раз, когда в верхней части прутика надо придвинуть к перегородке второй шарик, получается десяток, и очутившиеся у перегородки два шарика нужно откинуть и заменить одним шариком в нижней части следующего слева прутика. Таким же образом следовало бы удалить с нижнего отделения суан-пана и сорубана пятые шарики, а у русских счетов — с каждой проволоки десятые шарики.

Здесь нужно отметить, что одно из самых ранних описаний русских счетов, сделанное датским математиком-богословом Петером ван Хавеном в 1743 году, как и некоторые другие старые источники, совершенно отчетливо указывает на то, что у счетов на каждой проволоке имеется по девяти шариков. Таким образом можно утверждать, что этот русский народный счетный прибор самим народом был доведен до совершенства. Лишний десятый шарик появился позднее и сохранился до сих пор, хотя авторы XIX столетия неоднократно указывали, что он является лишним и мешающим.

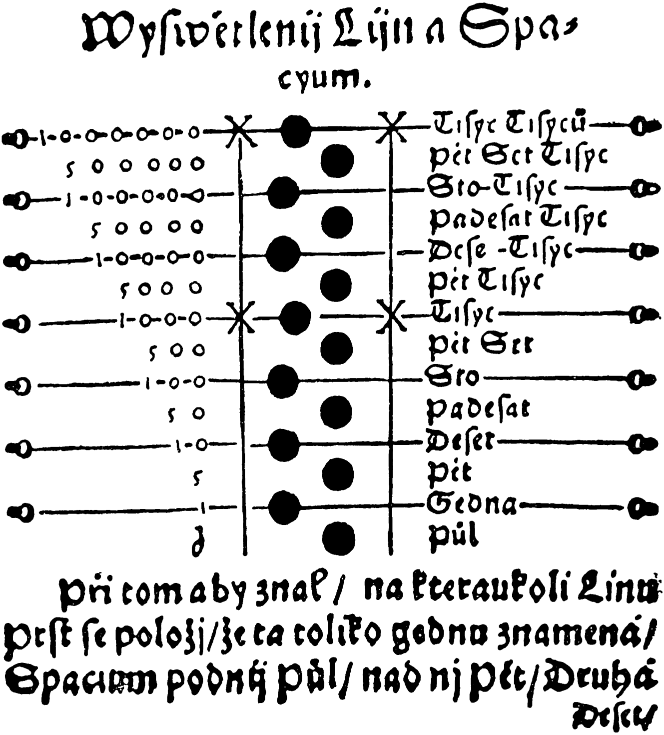
Из этого описания видно, что в китайских и японских „счетах“ число 5 занимает особое место среди остальных чисел, чего нет в русских счетах. Русские счеты основаны в чистом виде на десятичном счислении, в то время как в китайском суан-пане сохранились еще пережитки пятиричного счисления, — счёта при помощи пальцев одной руки. Следы пятиричного счисления сохранились и в римской нумерации, в которой имеем:

шесть — VI — пять да один,
семь — VII — пять да два,
восемь — VIII — пять да три,
девять — VIIII — пять да четыре (римляне обычно писали так),
четыре — IV — пять без одного.

До XVI века включительно западноевропейские народы пользовались способом счета, соответствующим конструкции суан-пана. Назывался этот способ „счетом на линиях“ и заключался в следующем.

Вычислитель имел перед собой доску с параллельными линиями, идущими слева направо. На первой линии ставились косточки, обозначающие единицы. Вместо 5 единиц ставилась косточка между первой и второй линиями. На второй линии ставились косточки, соответствующие десяткам, между второй и третьей линиями косточки обозначали 50 и т. д. Это вполне соответствует римской нумерации и пользованию суан-паном.

Аналогичный способ счета был и у русского народа, но он был рано совершенно вытеснен изобретением десятичных счетов, в то время как у китайцев и японцев он сохранился до сих пор. Поэтому мы никак не



„Счет на линиях“ из старой чешской книги.

можем считать наши десятичные счеты заимствованными от восточных народов, а должны признать их русским изобретением, а самые счеты по справедливости называть „русскими счетами“.

Отметим, что западноевропейский быт не знает употребления счетов, и ловкость пользования ими у русских много раз вызывала удивление иностранцев.

Школьные счеты как пособие при преподавании арифметики попали в Западную Европу в двадцатых годах прошлого века следующим образом.

Во время наполеоновского похода в Россию в 1812 году в сражении под Красным (Смоленской губ.), за которое фельдмаршал Кутузов получил титул „князя Смоленского“, попал в плен поручик саперного батальона Жан Виктор Понселэ (1788—1867). Партия пленных была отправлена в Саратов пешком, при морозах, доходивших до 30°. Среди немногих французов, вынесших четырехмесячный переход, был и Понселэ. В Саратове Понселэ создал новую область геометрии, которая под названием „проективной геометрии“ изучается в наше время всеми лицами, получающими высшее математическое образование.

Уезжая по окончании войны на родину, где Понселэ приобрел славу крупнейшего геометра, отца прикладной механики и военного инженера, он увез во Францию и русские счеты. Под названием булье счеты вошли в употребление во французской школе, а оттуда и в школах других стран.

Многие обороты нашей речи свидетельствуют о том, что счеты русским народом употребляются с очень давних пор. „Сбрасывать со счета“, „прикидывать“, „накидка“, „скидка“, „сводить счеты“, „скостить“ и много аналогичных выражений в народном языке появилось в результате пользования счетами в течение долгого времени.

Чаще всего на счетах приходится считать деньги. Широкое распространение русских десятичных счетов находится в связи с тем, что в России раньше, чем в других странах, возникла десятичная денежная система: рубль равен десяти гривенникам, гривенник — десяти копейкам, червонец — десяти рублям (впрочем, в XVIII веке червонец не сразу равнялся десяти рублям). Историки буржуазных стран приписывают приоритет введения десятичной денежной системы Соединенным Штатам Америки. Однако там деление доллара на 100 центов установилось только к концу XVIII века. В России же переход к десятичному делению денежных единиц был закончен в 1704 году, следовательно, на 100 лет ранее Соединенных Штатов Америки. Англия же продолжает пользоваться до сих пор недесятичной денежной системой, про которую крупнейший английский физик Томсон сказал, что „английская система мер была бы самой нелепой из всех, если бы английская монетная система не была еще более нелепа“.

Не будем в дальнейшем повторять измышлений буржуазных авторов о чужеземном происхождении русских счетов, измышлений, иногда весьма курьезных. Так, например, американский историк математики Д. Е. Смит в специальном „исследовании“ о счетных приборах, изданном в 1921 году, пишет, что русские счеты пришли в Россию через армян от турок и что этот прибор у турок якобы называется „кулба“, а у армян — „хораб“. Однако ни тот ни другой из названных языков не знает тех слов, которые Смит им приписывает. В турецком языке есть слово „хораб“, в армянском же — слово „кулба“, и оба слова означают одно и то же — именно „чулки“. Этот пример ученого „обоснования“ восточного происхождения русских счетов еще раз напоминает нам о необходимости критического отношения к утверждениям буржуазных „ученых“.

К русским счетам мы не должны относиться с пренебрежением, как примитивному счетному аппарату. Этот прибор так долго и с такой честью служил русскому народу, что заслуживает нашей благодарности и уважения. Мы призываем школьника хорошо усвоить употребление русских счетов и повторяем слова великого поэта нашей эпохи — В. В. Маяковского, который призывал нас к борьбе с купцом-частником тридцать лет тому назад:

„На арену!
С купцами сражаться иди!
Надо счётами бить учиться“.

Геометрические сведения в старых русских памятниках

Потребности земледелия, строительного и военного дела породили начала геометрии у всех народов, в том числе и у славян. Запросы практической жизни продолжали подталкивать развитие геометрии.

Уже в самых старинных памятниках русской истории мы встречаем начальные сведения по геометрии.

Исконно русским руководством, излагавшим приемы измерения площадей, является „Книга сошного письма“, самый древний экземпляр которой относится к 1629 году, хотя имеются указания, что оригинал был составлен при Иване Грозном в 1556 году.

М. В. Остроградский (1801—1862).

В этой книге при вычислении площадей фигур рекомендуется разбивать их на квадраты, прямоугольники, треугольники, трапеции. Площади квадрата и прямоугольника вычисляются по нашим правилам, площадь же треугольника находится как половина произведения основания на боковую сторону, и площадь трапеции — как произведение полусуммы оснований на боковую сторону (хобот). Последние правила, буквально понятые, неверны.

Возможно, что русская землемерная практика имела дело только с треугольниками и трапециями, прямоугольными или почти прямоугольными, и в таком случае мы не имеем основания делать упрек нашим предкам в незнании правил начальной геометрии. В те отдаленные времена земля не являлась предметом купли-продажи, и точность результатов измерения играла незначительную роль.

Оказывается, что в южнорусских губерниях, где свободной земли было много и она поэтому не ценилась, такие примитивные приемы оценки площадей применялись еще в XIX веке, что отразилось в биографических рассказах о знаменитом русском математике XIX столетия—М. В. Остроградском.[1] Он имел обыкно-

[1] Михаил Васильевич Остроградский (1801—1862), успешно занимавшийся математикой в только что открытом Харьковском университете, не мог получить там диплома за проявленное им недостаточное усердие по богословию.

За него заступился ректор университета, также видный математик, Т. Ф. Осиповский, но дело кончилось увольнением из университета самого ректора.

Остроградский вынужден был уехать в Париж и там стал слушать лекции математиков, которые вскоре заметили, что сидевший на последней скамейке длинноволосый студент моментально решал все предлагаемые с кафедры задачи. Остроградский стал любимцем всех парижских математических знаменитостей, которые вение шутить со своими слушателями и, между прочим, делить их на „землемеров“ и „геометров“.

Когда его спросили о значении такого деления, он рассказал следующее:

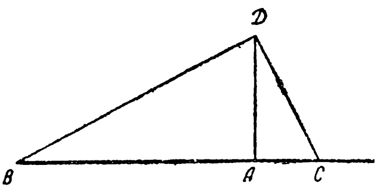
„Еду я как-то по своей Полтавской губернии. Вижу — человек в поле с чем-то возится. Оказывается, землю мерит. Спрашиваю, — как он треугольный участок измеряет. Говорит, что перемножает длины двух сторон треугольника и делит произведение на 2. Спрашиваю: „Все ли у вас так делают?“

Получаю ответ, — в уездах все делают так, лишь в губернии (губернские землемеры) поступают как-то иначе“.

Не приходится удивляться, что такие приемы землемерия были в употреблении 500 лет назад в древней Руси.

В 1607 и 1621 годах издается „Устав ратных, пушечных и других дел, касающихся до воинской науки“. В этой книге между прочими сведениями даются и геометрические знания. Вот как определяется расстояние от точки наблюдения A до другой, недоступной точки B.

В точке A нужно вбить шест AD, примерно в рост человека. К верхнему концу шеста прилагается угольник так, чтобы вершина прямого угла совпала с концом шеста D, а продолжение одного из катетов проходило через точку B. Отмечается точка C на земле, через которую проходит продолжение другого катета. Если измерить расстояние AC, то искомое расстояние относится к длине шеста так, как последняя длина относится к расстоянию AC.



При Иване Грозном, в 1556 году, было составлено первое русское руководство по землемерию под названием: „Книга, именуемая геометрия или землемерие радиксом и циркулем... глубокомудрая, дающая легкий

устроили ему профессорскую кафедру в Париже, но его потянуло на родину, где он вскоре стал академиком и профессором.

способ измерять места, самые недоступные, плоскости, дебри". А к середине XVI века была составлена первая общая карта Европейской России, которая, вместе с „Чертежами Сибирских земель" 1667 года, считается самым замечательным памятником русской картографии. В одной из рукописей XVI века впервые упоминается „премудрый Клидас", то есть основоположник нашей современной геометрии — Евклид.

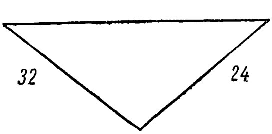
Пифагорова теорема является одним из самых важных положений всей геометрии. Она утверждает, что в прямоугольном треугольнике сумма квадратов катетов равна квадрату гипотенузы, или, другими словами, что сумма площадей квадратов, сторонами которых являются катеты прямоугольного треугольника, равна площади квадрата, стороною которого служит гипотенуза. Эту истину содержат ранние русские рукописи, хотя в них нет явного указания на то, что теорема имеет место только в прямоугольном треугольнике. Возможно, что ею пользовались для приближенного нахождения расстояния и в том случае, когда треугольник почти прямоугольный.

Во всяком случае, в рукописи начала XVII века мы встречаем такие, например, задачи:

„Хошь узнати промежь какими местами, не ходя и не меревь, что будет промежь верст, или сажен, или аршин. И ты познавай: как ходил будто к Троице в Сергиев монастырь и тут 32 версты. Ходил же в Воскресенский монастырь, и тут будто 24 версты. Что будет промежь теми монастырями, скажи не меревь?

И те числы с таких же чисел умножь. И те оба перечни сложи вместе и раздели на радикс [то есть извлекай квадратный корень]. И что из делу выдет, столько будет промежь теми местами верст".

Приведены чертеж и вычисления:



$$\begin{array}{rr} 24 & 32 \\ \underline{24} & \underline{32} \\ 96 & 64 \\ \underline{48} & \underline{96} \\ 576 & 1024 \\ & \underline{576} \\ & 1600 \end{array} \quad \sqrt{1600} = 40.$$

Ответ: 40.

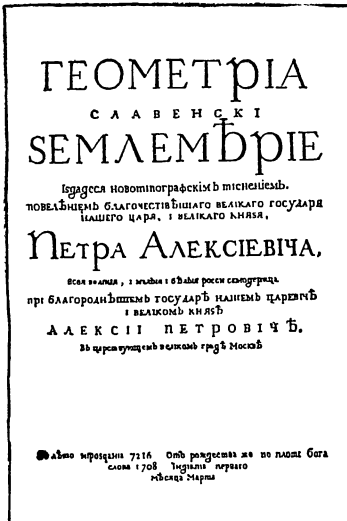
Вторая задача такого же рода:

„Ходил с Москвы в Новгород и тут 600 верст. Ходил в Шуйский город и тут 500 верст. Что будет промежь теми городами: зри 781 верста“.

Легко проверить, что $\sqrt{600^2+500^2} \approx 781$.

В 1625 году была переведена с английского языка книга по геометрии, доведенная до учения о круге. Эта рукопись представляет, повидимому, переделку „Начал“ Евклида, то есть первую часть нашего обычного школьного учебника геометрии.

Книга Евклида впервые в печати на русском языке появилась в 1739 году под заглавием „Евклидовы элементы в осьмь книг через профессора мафематики Андрея Фархварсона[1] сокращенные. С латинского на российский язык хирургусом Иваном Сатаровым преложенные. В Санкт-Петербурге, 1739“. Продолжением этой книги являлись вышедшие в 1745 году „Архимедовы теоремы“ в переводе того же Ивана Сатарова.


ГЕОМЕТРІА
СЛАВЕНСКІ
ЅЕМЛЕМѢРІЕ
Издадеся новотипографскимъ тисненіемъ.
повелѣніемъ благочестивѣйшаго великаго государя нашего царя, і великаго князя,
ПЕТРА АЛЕКСІЕВІЧА,
всея великія, і малыя і бѣлыя россіи самодержца.
прі благороднѣйшемъ государѣ нашемъ царевичѣ і великомъ князѣ
АЛЕКСІІ ПЕТРОВІЧѢ.
Въ царствующемъ великомъ градѣ Москвѣ
Лѣто міроздания 7216 Отъ рождества же по плоти бога слова 1708 Індікта перваго мѣсяца Марта

Заглавный лист первой книги по геометрии на русском языке.

Через эти книги русскому читателю стало доступным всё существенное из классического наследия по элементарной геометрии.

Кроме того, еще в 1708 году вышел первый на русском языке печатный учебник геометрии под заглавием: „Геометриа словенски землемерие“.

---

[1] Андрей Фархварсон — профессор Эбердинского университета — был приглашен Петром I в самом конце XVII века в Россию для преподавания в морских учебных заведениях.

Менее чем через год было выпущено второе издание этой книги под заглавием: „Приемы циркуля и линейки или избраннейшее начало во математических искусствах, им же возможно легким и новым способом вскоре доступити землемерия и иных из оного происходящих искусств".

Новое издание книги вышло с оригинальными русскими иллюстрациями, так как рисунки первого издания, воспроизводившие сцены иностранной жизни, не отвечали требованиям русского читателя.

Этот пример показывает, что в тех случаях, когда наши предки пользовались иностранными источниками, они их перерабатывали и приспосабливали к своей жизни. Самый же факт неоднократного переиздания книги свидетельствует о большом интересе к геометрии и к математике вообще в самом начале XVIII столетия.

В это время у русских любителей математики уже имелась обширная оригинальная энциклопедия математики, посвященная в основном арифметике и алгебре, составленная Л. Ф. Магницким.

Л. Ф. Магницкий и его „Арифметика"

1703 год является важным моментом в истории математического просвещения в России. В этом году вышла громадная книга под длинным заглавием:

> „А р и ф м е т и к а, с и р е ч ь н а у к а ч и с л и т е л ь н а я, с разных диалектов на славенский язык преведеная и во едино собрана и на две книги разделена... Сочинися сия книга чрез труды Леонтия Магницкого".

Книга эта содержит начала математических знаний того времени: арифметики, алгебры, геометрии и тригонометрии. В конце книги имеется снабженный большим числом таблиц отдел, посвященный морскому делу. Бóльшую часть места, как указывает и заглавие книги, автор посвящает арифметике.

Арїѳметіка,

сирѣчь наука числителнаѧ.

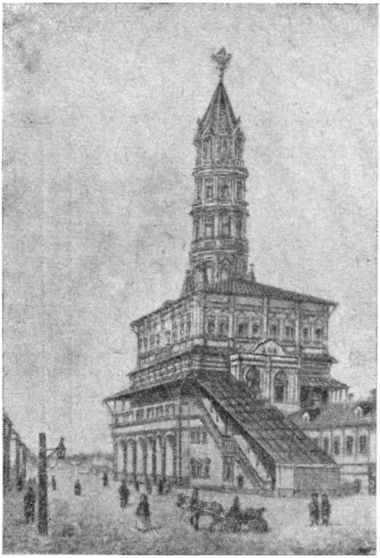
Сразныхъ дїалектѡвъ на славенскій ѧзыкъ преведенаѧ, и во едино собрана, и на двѣ книги раздѣлена.

Нынѣ же повелѣніемъ благочестивѣйшагѡ великагѡ гдрѧ нашегѡ црѧ и великагѡ кнзѧ Петра Алеѯіевича всеѧ великіѧ и малыѧ и бѣлыѧ рѡссіи самодержца: При благороднѣйшемъ великомъ гдрѣ нашемъ црвитѣ, и великомъ кнзѣ Алеѯіи Петровичѣ, в бгоспасаемомъ црствующемъ великомъ градѣ москвѣ тѵпографскимъ тисненіемъ ради ѡбученіѧ мудролюбивыхъ рѡссійскихъ отроковъ, и всѧкагѡ чина и возраста людей на свѣтъ произведена первое, въ лѣто ѿ сотворенія міра ҂зсаі, ѿ рж҃тва же по плоти бга слова ҂аѱг, індікта аі, мца іаннуаріа.

1703

Сочинисѧ сіѧ книга чрез труды Леонтіѧ Магницкагѡ

Титульный лист „Арифметики“ Л. Ф. Магницкого.


Сухарева башня в Москве (сейчас не существующая), в которой помещалась навигацкая школа.

Использовав, кроме русской рукописной литературы, то, что ему казалось полезным из иностранных источников, Магницкий весь материал приспосабливаéт к потребностям русского читателя и придает своему изложению во многом характер русских рукописных математических книг, в связи с которыми и нужно рассматривать „Арифметику“ Магницкого.

В царствование Петра I, когда вышла в свет книга, в России происходил быстрый рост промышленности и торговли и переворот в военной технике.

Стране потребовались образованные люди в значительно большем количестве, чем в предшествующие десятилетия. Был создан ряд технических учебных заведений, первым из которых была школа навигацких и математических наук, открытая в Москве, в Сухаревой башне, в 1701 году.

Учащимся в ней в первую очередь и назначалась книга Магницкого. Она была ответом горячего патриота на запросы родины.

В течение полустолетия книга с честью выполняла свою роль, став пособием для всех русских людей, которые стремились к математическому образованию.

Об авторе этой замечательной книги мы знаем очень немного.

Леонтий Филиппович Магницкий родился 9 июня 1669 года, умер в 1739 году.

Надгробная надпись на могиле Магницкого, сделанная его сыном, рассказывает, что „Петр I многократно беседовал с ним о математических науках и был так восхищен глубокими познаниями его, что называл его магнитом и приказал писаться Магницким". „Какое он имел прозвище до этого, то даже ближним его не известно", — читаем в раннем его жизнеописании.

Где и как Магницкий изучал математику, мы не знаем. Длинная надгробная надпись говорит: „Он научился наукам дивным и неудобовероятным способом".

Весьма правдоподобно, что Магницкий был самоучкой, и, быть может, именно потому ему удалось написать книгу, оказавшуюся полезной для огромного числа самоучек. Во всяком случае он имел в виду самоучек, когда писал в предисловии своей книги:

„И мню аз, яко то имать быть,
Что сам себя всяк может учить".

Но Магницкий знал языки латинский, греческий, немецкий и итальянский и указывает, что он материал для своей книги

„Из многих разных книг собравше—
Из грецких убо и латинских,
Немецких же и итальянских".

Великий русский ученый М. В. Ломоносов называл „Арифметику" Магницкого и „Грамматику" Мелетия Смотрицкого „вратами своей учености". „Арифметику" он выучил наизусть.

„Вратами учености" эта книга была для всех русских людей первой половины XVIII века, стремившихся к образованию.

Магницкий понимал как потребность русского общества в математической литературе, так и то, что нельзя русскому читателю предложить перевод иностранной математической книги, не учитывающей вековое самобытное развитие русского народа.

Он поэтому широко использовал русскую рукописную литературу, добавляя к ней достижения мировой научной мысли, переработанные и приспособленные к потребностям русского читателя, и подчеркивал, что

„Разум весь собрал и чин[1]
Природно русский, а не немчин".

В результате всего этого возник первый оригинальный русский учебник математики. Русская математическая литература не знает другой книги, которая имела бы такое значение в истории русского математического образования.

Написанная в качестве учебника для специальной школы, книга Магницкого нашла гораздо более широкий круг потребителей, как этого и ожидал автор, говоривший в предисловии книги:

„И желаем, да будет сей труд
Добре пользовать русский весь люд".

Магницкий до своей смерти состоял учителем навигацкой школы — этого первого рассадника математических и морских знаний в России.

Фактический начальник школы дьяк Курбатов, сам вышедший из крепостных, пишет в отчете по школе за 1703 год:

„По 16 июля прибрано и учатся 200 человек. Англичане учат их науке чиновно, а когда временем и загуляются, или, по своему обыкновению, по часту и долго проспят. Имеем еще определенного им помоществователем Леонтия Магницкого, который непрестанно при той школе бывает и всегда имеет тщание не только к единому ученикам в науке радению, но и к иным ко добру поведениям..."

Из этой характеристики видим, что роль Магницкого в навигацкой школе была значительно больше, чем этого требовала его скромная должность учителя начальных классов.

Литературная деятельность Л. Магницкого не ограничилась его „Арифметикой".

В том же 1703 году он совместно со своими английскими товарищами издает „Таблицы логарифмов и си-

[1] „Собрал и изложил в порядке"; в книгах XVIII века часто встречается оборот: „математический чин" в смысле „математическое изложение".

Арїѳметїка практїка

или деятелная.

Что есть арїѳметїка?

Арїѳметїка или числителница, есть художество честное, независтное, и всем удобопонятное, многополезнейшее, и многохвалнейшее, от древнейших же и новейших, в разная времена явлшихся изряднейших арїѳметїков, изобретенное и изложенное.

Какогуба есть арїѳметїка практїка? Есть сугуба.

1 Арїѳметїка полїтїка, или гражданская.

2 Арїѳметїка логїстїка, не ко гражданству токмо, но и к движенїю небесных кругов принадлежащая.

Страница из „Арифметики" Л. Ф. Магницкого.

Титульный лист первых на русском языке таблиц логарифмов, в составлении которых участвовал Магницкий.

нусов, тангенсов и секансов к научению мудролюбивых тщателей“; это были первые подобные таблицы на русском языке.

В 1722 году ими же был издан мореходный справочник: „Таблиц горизонтальных северные и южные широты“. Когда Андрею Фархварсону в 1737 году был присвоен чин бригадира, официальная характеристика указывала: „Понеже через него первое обучение математики в России введено“. С бо́льшим еще правом эти слова можно отнести к первому русскому учителю математики в России — Леонтию Филипповичу Магницкому.

Как ценили математику наши предки

„Арифметика“ Магницкого очень во многом сходна с рукописными математическими книгами прежних веков.

Почти каждое старинное русское руководство по математике начинается с разъяснения значения этой науки для человека.

Изобретение арифметики и геометрии приписывается „остропаримого разума древним философам“, чаще всего Пифагору (греческому философу и математику VII — VI века до нашего летосчисления).

Эту традицию продолжает и Магницкий. В своей „Арифметике“ на титульном листе он изобразил Пифагора и Архимеда и написал:

„Архимедес же тут представлен,
Древний филосо́ф велик явлен,
Где с ним и другой равный ему
Лицу представлен есть твоему.
Оный Архимед и Пифагор
Изли́ша яко во́ды от гор,
Первые были снискатели,
Сицевых наук писатели,
Равно бо вода́м излияша,
Многи науки в мир издаша“.

Магницкий уверяет своего читателя, что арифметика нужна всем, не только купцам,

„Цену товаров обретати
И достойно ее исчисляти“;

но и людям

„Ремесленным и художным,
Подданным всяким и вельможным“.

Ее должен изучать

„Хотящий быть морской пловец,
Навигатор ли, или гребец“,

и что

„Ныне и всяк лучший воин
Эту науку знать достоин“.

Такую же разъяснительную работу проводит и первый печатный учебник геометрии — „Приемы циркуля и линейки“ (1709).

„Кто хвалит только теорию, укладывает лишь хорошее основание, на котором он ничего не строит; это подобно пушкам, которые не вывозятся на поле сражения, или кораблям, гниющим в гавани. Такой теоретик подобен ремесленнику, знающему свое дело, но знаний своих не применяющему, инженеру, который строит крепости только на бумаге, корабельщику, ездящему в своем доме по карте в Америку... Не лучше и тот, что одну только практику признает: это человек, строящий крепость на песке, подводящий подкоп под Дунай-реку и думающий на кой-как сколоченном плоту совершить путешествие в Индию".

Магницкий также высоко ценит теорию. Он делит свою „Арифметику" на две книги: первую называет „арифметика - политика", вторую — „арифметика-логистика".

Первая назначается для тех, кто желает только научиться решать практические вопросы — „исчисляти всякое исчисление в продаже и куплях". Эта часть изложена без доказательств, рассказом и показом — решением примеров.

Вторая часть — „арифметика-логистика" — решает абстрактные вопросы, „токмо уму нашему подлежащие"; и Магницкий заявляет, что их решать при помощи простых средств арифметики-политики нельзя, так как, если „основания и откуду что взято не будем знати, будет весь последующий чин не известен и не полезен, паче же действовати тако безместно есть", то есть, без обоснования правил всё последующее построение непрочно и бесполезно, и так поступать будет неуместно.

Отрицательное отношение самобытной русской мысли к схоластике и формализму в преподавании математики ярко выражает одна рукопись времен Магницкого.

В то время в Москве были пансионы для русского юношества, в которых учили иностранцы по привезенным с собою учебникам, полным всяких искусственных правил.

В русской математической рукописи изложено тройное правило, с оговоркой: „Есть и иные многие ре́гулы [правила] в сей науке, которых употребляют больше на Москве, но мы всё оставляем, для того, что в тех регулах никакие помощи ни в чем не сыщет никто,

Страница букваря Кариона Истомина 1692 года. Первое воспроизведение в русской книге индусских цифр.

и все те бездельные регулы родятся из их же настоящих фундаментов [основ науки], и кто хорошо вызнает всех регул фундаменты, может сам тех безделиц делать сколько похочет. Только мы своим учением этого не позволяем. Лучше голову ломать о деле, неже о безделье“.

Гениальный русский ученый Михаил Васильевич Ломоносов (1711—1765) является творцом идей новой науки во многих областях. Он величайший химик, физик, геолог и в то же время историк, языковед и даже поэт.

А. С. Пушкин сказал о нем: „Ломоносов создал первый русский университет, он, лучше сказать, сам был нашим первым университетом".

Ломоносов глубоко понимал значение математики для изучения других наук и для развития ума. Он неоднократно говорит о своих занятиях математикой.

О значении математики, как предмета школьного преподавания, М. В. Ломоносов имел случай высказаться в 1752 году, когда ему было поручено дать объяснительную записку о преподавании физики, химии и математики в одной из немногих существовавших в то время школ — кадетском корпусе. Это было учебное заведение, из которого в XVIII столетии вышли почти все известные русские деятели — писатели, ученые, военные, администраторы.

Получив поручение написать для обновляемого корпуса учебные программы по физике, химии и математике и обосновать необходимость их изучения, Ломоносов после подробного разговора о значении преподавания кадетам физики и химии, о математике пишет лишь одну фразу: *„А математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит"*.

Эта краткая, выразительная фраза Ломоносова не есть набор слов хвалителя математики, которые можно в большом количестве находить в литературе. Высказывания Ломоносова о математике в разных его сочинениях показывают, что он понимал значение математики для практики и для изучения других наук. Но он понимал и то, что школа должна давать учащимся не только фактические знания по разным предметам обучения, но и умение думать, умение доказывать. Учащийся доказывает на уроках теоремы для того, чтобы, доказывая известные теоремы, научиться доказывать потом и новые теоремы. Эту задачу умственного развития учащихся в школе и имеет в виду Ломоносов, говоря, что „математику уже затем учить следует, что она ум в порядок приводит".

Из содержания старинных русских руководств по математике

Старинные русские руководства по математике, рукописные и печатные, содержат много такого, что полезно знать изучающему математику и в наше время. Остановимся на трех вопросах: на правиле ложного положения, на занимательных задачах и на математических забавах.

„Фальшивое правило“ — так называют старые русские руководства способ решения задач, который теперь известен под названием „правила ложного положения“.

При помощи этого правила в старинных руководствах решаются задачи, приводящие к уравнениям первой степени.

Глава „Уравнения первой степени“ в этих руководствах отсутствует. Современные способы решения уравнений первой степени предполагают знакомство

Вопроси нѣкто оучителѧ нѣкоего глаголѧ:
повѣждь ми колико имаши оученикѡвъ оу себе
во оучилищи, понеже имамъ сына ѿдати во
оучилище: и хощу оувѣдати ѿ числѣ оученикѡвъ
твоихъ. оучитель же ѿвѣщавъ рече ему:
аще придетъ ми оученикѡвъ толико же, елико
имамъ, и полтолика, и четвертаѧ часть,
еще же и твой сынъ, и тогда будетъ
оу мене оученикѡвъ 100: вопросивый же
оудивисѧ ѿвѣту его ѿиде, и начатъ
изобрѣтати чрез сию науку сице:

Задача из „Арифметики“ Л. Ф. Магницкого.

с понятием отрицательного числа, которое распространялось медленно.

Еще в конце XVIII века крупнейшие математики высказывали об отрицательных числах мнения, которые для нас неприемлемы.

Знакомство с тем, как при отсутствии знаний об отрицательных числах приходилось простые задачи решать искусственным „фальшивым правилом", показывает нам, что скучноватые упражнения над отрицательными числами, которыми мы занимаемся в первых разделах курса алгебры, позволяют в дальнейшем решать задачи на уравнения первой степени гораздо проще, чем это делали еще наши прадеды.

Вот решение задачи способом „ложного положения" или „фальшивым правилом" у Магницкого.

„Спросил некто учителя: сколько у тебя в классе учеников, так как хочу отдать к тебе в учение своего сына. Учитель ответил: если придет еще учеников столько же, сколько имею, и полстолько и четвертая часть и твой сын, тогда будет у меня учеников 100. Спрашивается: сколько было у учителя учеников?" Магницкий дает такой способ решения.

Делаем первое предположение: учеников было 24.

Тогда по смыслу задачи к этому числу надо прибавить „столько, полстолько, четверть столько и 1"; имели бы:

$$24+24+12+6+1=67,$$

то есть на $100-67=33$ меньше (чем требовалось по условию задачи); число 33 называем „первым отклонением".

Делаем второе предположение: учеников было 32.

Тогда имели бы:

$$32+32+16+8+1=89,$$

то есть на $100-89=11$ меньше; это „второе отклонение".

На случай, если при обоих предположениях получилось меньше, дается правило: помножить первое предположение на второе отклонение, а второе предположение на первое отклонение, отнять от большего произведения меньшее и разность разделить на разность отклонений:

$$\frac{32 \cdot 33 - 24 \cdot 11}{33 - 11} = 36.$$

Учеников было 36.

Таким же правилом надо руководствоваться, если при обоих предположениях получилось больше, чем полагается по условию. Например:

Первое предположение: 52.

$$52 + 52 + 26 + 13 + 1 = 144.$$

Получили на $144 - 100 = 44$ больше (первое отклонение).

Второе предположение: 40.

$$40 + 40 + 20 + 10 + 1 = 111.$$

Получили на $111 - 100 = 11$ больше (второе отклонение).

$$\frac{40 \cdot 44 - 52 \cdot 11}{33 - 11} = 36.$$

Если при одном предположении получим больше, а при другом меньше, чем требуется по условию задачи, то нужно при указанных выше вычислениях брать не разности, а суммы. Например:

Первое предположение: 60.

$$60 + 60 + 30 + 15 + 1 = 166.$$

Получили на $166 - 100 = 66$ больше (первое отклонение).

Второе предположение: 20.

$$20 + 20 + 10 + 5 + 1 = 56.$$

Получили на $100 - 56 = 44$ меньше (второе отклонение).

$$\frac{60 \cdot 44 + 20 \cdot 66}{66 + 44} = 36.$$

При помощи самых начальных сведений алгебры эти правила легко обосновываются.

Надо решить уравнение $ax + b = c$. (*)

Первое предположение: $x = x_1$; $ax_1 + b = c_1$. (1)

Второе предположение: $x = x_2$; $ax_2 + b = c_2$. (2)

Вычитаем равенства (1) и (2) почленно из уравнения (*):

$$a(x-x_1)=c-c_1=d_1 \quad \text{(первое отклонение);}$$
$$a(x-x_2)=c-c_2=d_2 \quad \text{(второе отклонение).}$$

Разделив почленно два последних равенства, получаем:

$$\frac{a(x-x_1)}{a(x-x_2)}=\frac{d_1}{d_2} \text{ или } \frac{x-x_1}{x-x_2}=\frac{d_1}{d_2}.$$

По правилам алгебры делаем следующие преобразования:

$$(x-x_1)d_2=(x-x_2)d_1;$$
$$d_2x-d_2x_1=d_1x-d_1x_2;$$
$$d_2x-d_1x=d_2x_1-d_1x_2;$$
$$(d_2-d_1)x=x_1d_2-x_2d_1;$$
$$x=\frac{x_1d_2-x_2d_1}{d_2-d_1}.$$

Если отклонения d_1 и d_2 оба отрицательные числа, $d_1<0$ и $d_2<0$, то в правой половине равенства (3) у числителя и знаменателя первые члены будут числами отрицательными, вторые члены — положительными; правило нахождения значения числа x остается то же, что и в первом случае.

Равенство (3) выражает правило ложного положения для тех случаев, когда оба отклонения положительные или оба отрицательные.

Если же d_2 положительно, а d_1 отрицательно (или наоборот), то равенство (3) превратится в

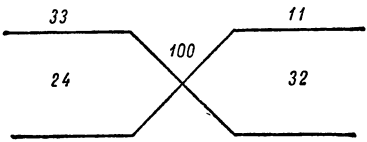
$$x=\frac{x_1d_2+x_2d_1}{d_2+d_1},$$

и мы имеем правило ложного положения для случаев, когда отклонения имеют разные знаки.

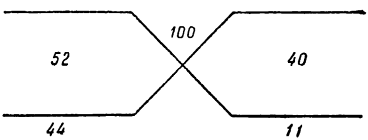
Средневековые математики дали удобный механический способ применения этого правила под названием „способа весов“. Вот как они советуют поступать.

„Рисуй весы. Над точкой опоры пиши число, которое по условию задачи получается после действий над искомым числом. На чашки весов пиши оба предположения. Отклонения „больше“ пиши под весами, отклонения „меньше“ — над весами. Произведи умножение накрест предположений и отклонений. Если отклонения записаны оба по одну сторону от весов, то надо брать разности произведений и отклонений; если же отклонения записаны по разные стороны от весов, то надо брать суммы их и произвести деление.

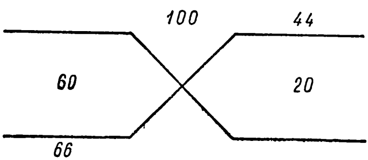
Запись наших решений по этому способу следующая:



$$\frac{32 \cdot 33 - 24 \cdot 11}{34 - 11} = 36;$$



$$\frac{40 \cdot 44 - 52 \cdot 11}{44 - 11} = 36;$$



$$\frac{60 \cdot 44 + 20 \cdot 66}{66 + 44} = 36.$$

Занимательные задачи. В большинстве русских математических рукописей и печатных руководств старого времени встречаются занимательные задачи. Так, например, в них мы встречаем задачу, имеющуюся уже в египетском папирусе Ахмеса в виде задачи о семи кошках, поедающих семь мышей, и т. д.

Соответственная русская народная задача читается так:

Шли семь старцев.
У каждого старца по семи костылей;
на каждом костыле по семи сучков;
на каждом сучке по семи кошелей;
в каждом кошеле по семи пирогов;
в каждом пироге по семи воробьев.

Сколько всех?

Ответ: 137 256.

Известен сборник занимательных задач VIII века под названием „Предложения для изощрения ума юношества". Эту же цель „изощрения ума" преследует и Магницкий своими задачами.

Вот несколько примеров занимательных задач из ранних русских источников.

Из рукописи XVII века: „Лев съел овцу одним часом, а волк съел овцу в два часа, а пес съел овцу в три часа. Ино хочешь ведати: все три — лев, волк и пес — овцу съели вместе вдруг, и сколько бы они скоро ту овцу съели, сочти ми?"

Автор рукописи предлагает следующий прием решения: за 12 часов лев съедает 12 овец, волк — 6, а пес — 4. Всего же они съедят за 12 часов 22 овцы; следовательно, в час они съедают $\frac{22}{12} = \frac{11}{6}$ овцы, а одну овцу все вместе — в $\frac{6}{11}$ часа.

Из „Арифметики" Магницкого: „Един человек выпьет кадь пития в 14 дней, а со женою выпьет тое же кадь в 10 дней, и ведательно есть, в колико дней жена его особно выпьет тое же кадь".

Ответ: 35 дней.

„Некий человек нанял работника на год, обещав ему дати 12 рублев и кафтан. Но той, работав 7 месяцев, восхотел уйти и просил достойной платы с кафтаном. Он же [хозяин] дал ему по достоинству расчет 5 рублев и кафтан, и ведательно есть, коликие цены оный кафтан был".

Ответ: 48 гривенников.

„Некий человек продае коня за 156 рублев; раскаявся же, купец нача отдавати продавцу, глаголя: „Яко несть мне лепо взяти сицевого коня, недостойного такие высокие цены".

Продавец предложи ину куплю, глаголя: „Аще те мнится велика цена сему коню быти, убо купи гвоздие, их же сей конь имать в подковах своих ног, коня же возьми за тою куплею в дар себе. А гвозди во всякой подкове по шести и за един гвоздь даждь ми полушку,[1]

[1] Полушка — $1/4$ копейки.

за другой же две полушки, а за третий копейку, и тако все гвозди купи“. Купец же, видя столь малую цену и коня хотя в дар себе взяти, обещал таку цену платити, чая не больше 10 рублев за гвоздие дати. И ведательно есть, колико купец-он проторговался?“

Ответ: 4 178 703 $^3/_4$ коп.

Задача эта содержится в рукописях XVII века. Она аналогична задаче об изобретателе игры в шахматы, который согласился на скромное вознаграждение — именно, чтобы ему на первую клетку шахматной доски положили одно зерно, на вторую — два зерна, на третью — четыре зерна и так далее, удваивая число зерен каждый раз.

Оказывается, для выполнения этого условия потребовался бы обильный урожай с поля, превосходящего величиною всю сушу земного шара в 28 раз.

В знаменитой „Божественной комедии“ Данте (1265—1321) читаем:

„Заискрилась всех тех кругов краса,
И был пожар в тех искрах необъятный;
Число же искр обильней в сотни раз,
Чем клеток счет двойной в доске шахматной“.

„Счет двойной“ означает нарастание чисел при помощи удвоения предыдущего числа, то есть мы имеем тут упоминание о той же старой задаче.

Она, как оказывается, встречается и в наше время не только в сборниках занимательных задач. По сообщению одной газеты 1914 года у судьи в городе Новочеркасске разбиралось дело о продаже стада в 20 овец по условию — уплатить за первую овцу 1 копейку, за вторую — 2 копейки, за третью — 4 копейки и т. д. Очевидно, покупатель соблазнился надеждою дешево купить стадо — и просчитался. Подсчитайте, какую сумму он должен был уплатить. Оказывается, Магницкий не без основания снабдил решение этой задачи предупреждением:

„Хотяй туне притяжати,
От кого что приимати,
Да зрит то себе опасно...“

Из „Курса чистой математики" (1786) Ефима Войтяховского:[1]

„На вопрос: который час? — ответствовано: $\frac{2}{5}$ прошедших часов от полуночи до сего времени равны $\frac{2}{3}$ оста́льных до полудни. Спрашивается число часов того времени".

Ответ: 7 часов 30 минут.

„У приезжего гасконца оценили богатство: модный жилет с поношенным фраком в три алтына [алтын — 3 копейки] без полушки; но фрак в полтретья $\left[2\frac{1}{2}\text{ раза}\right]$ дороже жилета. Спрашивается каждой вещи цена".

Ответ: $6\frac{1}{4}$ и $2\frac{1}{2}$.

„Нововыезжей в Россию французской мадаме
Вздумалось ценить свое богатство в чемодане:
Новой выдумки нарядное фуро́ (платье)
И праздничный чепец а ла фигаро́.
Оценщик был русак, сказал мадаме так:
Богатства твоего первая вещь фуро́
Вполчетверта $\left[3\frac{1}{2}\text{ раза}\right]$ дороже чепца фигаро́;
Вообщем стоят не с половиною четыре алтына,
Но настоящая им цена только сего половина.
Спрашивается каждой вещи цена,
С чем француженка к россам привезена".

Ответ: $5\frac{1}{4}$ и $1\frac{1}{2}$.

О задачах в „Арифметике" Магницкого. У Магницкого мы находим много оригинальных решений задач, которые поучительны для нас и в настоящее время. Приведем в качестве примера одно из таких решений.

Задача.

Найти число, которое при делении на 2 дает в остатке 1, при делении на 3 дает в остатке 2, при делении на 4 дает в остатке 3, при делении на 5 дает в остатке 4.

---

[1] Войтяховский Ефим Дмитриевич (умер около 1812 года) — штык-юнкер и благородного юношества партикулярный учитель — издал большой „Курс математики" в четырех томах.

Решение.

Обозначим искомое число буквой x. Будем искать число, которое на единицу больше искомого, то есть будем искать число $x+1$.

Это новое число разделится без остатка на 2, на 3, на 4 и на 5, следовательно, будет общим кратным чисел 2, 3, 4 и 5. Таких общих кратных бесконечно много. Наименьшее общее кратное чисел 2, 3, 4 и 5 есть 60. Значит, наименьшее значение числа $x+1$ есть 60, наименьшее значение искомого числа x есть 59.

Общая формула чисел, удовлетворяющих условию задачи, есть

$$x = 60\,k - 1,$$

в которой k может принять значения 1, 2, 3... без ограничения.

Отметим, что такого рода задачи на нахождение числа по остаткам при делении его на разные другие числа весьма распространены в китайской народной математике.

Математические забавы в „Арифметике" Магницкого. Забавы в „Арифметике" Магницкого составляют особый раздел: „О утешных некиих действах, чрез арифметику употребляемых", начинающийся с указания, что, следуя примеру арифметиков, автор помещает его в свою книгу для утехи и особенно для изощрения ума учащихся, хотя эти забавы, по его мнению, „и не зело нужные".

Первая забава. Один из находящихся в компании восьми человек берет кольцо и надевает на один из пальцев на определенный сустав. Требуется угадать, у кого, на каком пальце и на каком суставе находится кольцо.

Пусть кольцо находится у четвертого человека на втором суставе пятого пальца (надо условиться, что суставы и пальцы нумеруются всеми одинаково).

В книге дается такой способ угадывания. Угадывающий просит кого-нибудь из компании сделать следующие действия, не называя получающихся чисел:

1) номер лица, имеющего кольцо, умножить на 2; спрашиваемый, в уме или на бумаге, выполняет:

$$4 \cdot 2 = 8;$$

2) к полученному произведению прибавить 5:

$$8+5=13;$$

3) полученную сумму умножить на 5;

$$13\cdot 5=65;$$

4) к произведению прибавить номер пальца, на котором находится кольцо:

$$65+5=70;$$

5) сумму умножить на 10:

$$70\cdot 10=700;$$

6) к произведению прибавить номер сустава, на котором находится кольцо:

$$700+2=702.$$

Результат объявляется угадывающему.

От полученного числа последний отнимает 250 и получает: $702-250=452$.

Первая цифра (идя слева направо) дает номер человека, вторая цифра — номер пальца, третья цифра — номер сустава. Кольцо находится у четвертого человека на пятом пальце на втором суставе.

Нетрудно найти для этого приема объяснение, которого Магницкий не дает.

Пусть кольцо было у человека № a на пальце № b на суставе № c.

Выполним указанные действия над числами a, b, c:

1) $a\cdot 2=2a$;
2) $2a+5$;
3) $(2a+5)\cdot 5=10a+25$;
4) $10a+25+b=10a+b+25$;
5) $(10a+b+25)\cdot 10=100a+10b+250$;
6) $100a+10b+250+c=100a+10b+c+250$;
7) $100a+10b+c+250-250=100a+10b+c$.

Получили число, в котором номер человека есть цифра сотен, номер пальца — цифра десятков, номер сустава — цифра единиц. Правила игры применимы при любом числе участников.

Третья забава Магницкого. Считаем дни недели, начиная с воскресенья: первый, второй, третий и так далее, до седьмого (субботы).

Кто-нибудь задумал день. Угадать, какой день он задумал.

Пусть задумана пятница — шестой день.

Угадывающий предлагает выполнить про себя следующие действия:

1) умножить номер задуманного дня на 2:

$$6 \cdot 2 = 12;$$

2) прибавить к произведению 5:

$$12 + 5 = 17;$$

3) умножить сумму на 5:

$$17 \cdot 5 = 85;$$

4) приписать произведению в конце нуль и назвать результат:

$$850.$$

От этого числа угадывающий отнимает 250 и получает

$$850 - 250 = 600.$$

Был задуман шестой день недели — пятница.

Обоснование правила такое же, как в предыдущем случае.

У Магницкого имеется и ряд более сложных математических забав.

Математическая забава М. Ю. Лермонтова

Математическая забава, сходная с только что приведенными, фигурирует в биографии великого поэта М. Ю. Лермонтова.

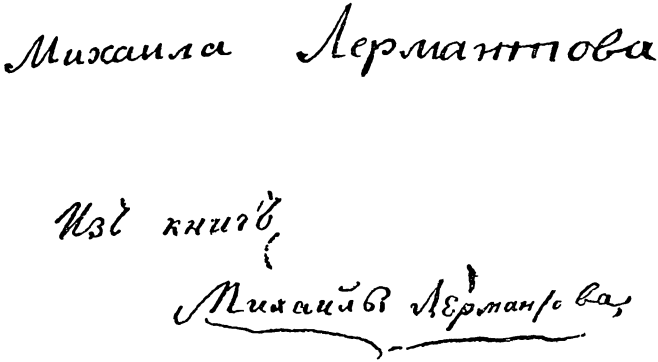
Известно, что он был большим любителем математики и в своих вольных и невольных переездах из одного места службы в другое всегда возил с собою учебник математики.

Здесь воспроизведена его собственноручная надпись на учебнике математики Безу, широко распространенном в России в первой половине XIX века.

Приведем рассказы некоторых современников, близко знавших Лермонтова, об отношении его к математике:

„В начале 1841 года Тенгинский полк стоял в Анапе. Скучающие офицеры, в том числе и Лермонтов, собирались друг у друга. Раз речь зашла о каком-то ученом кардинале, который мог решать в уме самые сложные математические задачи.

— Что вы скажете на это, Лермонтов? — обратился к нему один из почтенных батальонеров, старик с Георгием. — Говорят, что вы тоже хороший математик?



Надпись М. Ю. Лермонтова на учебнике математики французского автора Безу.

— Ничего тут удивительного нет, — отвечал поэт.— Я тоже могу представить вам, если хотите, весьма замечательный опыт математических вычислений.

— Сделайте одолжение.

— Задумайте какое угодно число, и я с помощью простых арифметических действий определю это число.

— Ну что же, попробуйте, — рассмеялся старик, очевидно, сомневавшийся. — Но как велико должно быть задуманное число?

— А это безразлично. Но на первый раз, для скорости вычислений, ограничьтесь числом из двух цифр.

— Хорошо, я задумал, — сказал батальонер, подмигнув стоявшим вокруг офицерам и сообщил задуманное число сидевшей рядом с ним даме.

— Благоволите прибавить к нему, — начал Лермонтов, — еще 25 и считайте мысленно или посредством записи.

Старик попросил карандаш и стал записывать на бумажке.

— Теперь не угодно ли прибавить еще 125.

Старик прибавил.

— Засим вычтите 37.

Старик вычел.

— Еще вычтите то число, которое вы задумали сначала.

Старик вычел.

— Теперь остаток умножьте на 5.

Старик умножил.

— Засим полученное число разделите на 2.

Старик разделил.

— Теперь посмотрим, что у вас должно получиться... Кажется, если не ошибаюсь, число $282\frac{1}{2}$?

Батальонер даже привскочил, — так поразила его точность вычисления.

— Да, совершенно верно: $282\frac{1}{2}$. Я задумал число 50.—И он снова проверил вычисление.—Действительно, получается $282\frac{1}{2}$. Фу, да вы не колдун ли?..

— Колдун не колдун, а математике учился,—улыбнулся Лермонтов.

— Но позвольте... — старик, видимо, сомневался: не подсмотрел ли Лермонтов его цифры, когда он производил вычисления. — Нельзя ли повторить?

Старик записал задуманное число, никому не показав, положил под подсвечник и стал считать в уме даваемые поэтом числа. И на этот раз остаток был угадан

Все заинтересовались. Старик только развел руками. Хозяйка дома попросила повторить еще раз опыт, и еще раз опыт удался.

По крепости пошел разговор. Где бы поэт ни показался, к нему стали обращаться с просьбами угадать вычисленное число. Несколько раз он исполнял эти просьбы, но, наконец, ему надоело, и он через несколько дней, тоже на одном из вечеров, открыл секрет, заключавшийся в том, что задумавшего число, какое бы оно ни было, заставляют вычесть это число из суммы этого же числа и некоторых других подсказанных чисел, так что диктующему легко подсчитать результат, например

$$[(x + 100 + 206 + 310 - 500 - x) : 2] \cdot 3 = 174“.$$

А. А. Лопухин, товарищ Лермонтова по кавалерийскому училищу, близко знавший поэта, сообщает о нем следующее.

Лермонтов постоянно искал новой деятельности и никогда не отдавался весь тому высокому поэтическому творчеству, которое обессмертило его имя и которое,

И. А. Лаппо-Данилевский (1896—1931).

казалось, должно было поглотить его всецело. Постоянно меняя занятия, он со свойственной ему страстностью, с полным увлечением отдавался новому делу.

Таким образом он одно время исключительно занимался математикой.

Однажды, приехав в Москву к Лопухину, Лермонтов заперся в кабинете и до поздней ночи сидел над решением какой-то математической задачи. Не решив ее, Лермонтов, измученный, заснул.

Задачу эту он решил во сне. Ему приснилось, что пришел какой-то математик и подсказал ему решение задачи. Он даже нарисовал портрет этого математика. Оказалось, что он очень похож на изобретателя логарифмов — шотландского математика Джона Непира (1550—1617). Вероятно, до этого Лермонтов читал о работах Непира и видел его портрет. Этот портрет слился у Лермонтова с его помощником при решении задачи.

Портрет фантастического математика, написанный кистью Лермонтова, после Великой Октябрьской революции поступил в Пушкинский Дом Академии наук, где и хранится в настоящее время. Этот портрет воспроизводился в книгах о Лермонтове и в полном собрании его сочинений.

Из биографий математиков известны случаи решения ими во сне задач, которые не поддавались решению наяву. Даже во сне мозг ученого продолжает работать над вопросом, который остался не разрешенным.

Такой случай известен из биографии гениального советского математика Ивана Александровича Лаппо-Данилевского (1896—1931).

Отметим попутно, что математикой, кроме Лермонтова, увлекались и многие другие поэты. Таким любителем математики был, например, русский поэт Бенедиктов (1807—1873), посвящавший свои досуги занятиям математикой и оставивший рукопись — „Увеселительная арифметика“, — повидимому, одну из первых попыток изложения математики на русском языке в занимательной форме.

ИЗ ИСТОРИИ РАЗВИТИЯ НАЧАЛЬНОЙ МАТЕМАТИКИ

На предыдущих страницах было рассказано о том, как закладывались начала математики. Здесь будут даны краткие исторические сведения об основных разделах школьной математики, охватывающей арифметику и начала алгебры и геометрии. Мы уже знаем о громадной роли, которую играли среднеазиатские математики в истории средневековой математики. Теперь расскажем еще о том, как великие русские математики довели до конца решение ряда вопросов, возникших очень давно и остававшихся нерешенными несмотря на усилия самых крупных представителей мировой науки.

Арифметика

Школьный курс арифметики состоит из трех основных частей: учения о нумерации, учения о действиях над целыми числами и свойствах их и учения о дробях. По каждому из этих трех разделов и поведем наш рассказ.

Устная нумерация

Чисел бесконечно много. Мы не могли бы запомнить названия их, если каждое число обозначать особым словом.

Установлено, что сочинения Шекспира содержат семнадцать тысяч различных слов. При чтении сочинений этого писателя даже для хорошо знающего английский язык требуется специальный словарь.

Все народы очень давно решили задачу устной нумерации тем, что стали считать не отдельными единицами, а группами, которые обозначали теми же словами, как и отдельные предметы: один, два, три и так далее.

За счетную группу можно взять любое число. Подавляющее большинство народов выбрало число 10, так как десять пальцев служили естественным подспорьем для счета.

Однако у разных народов и в разные времена имел место счет и другими группами. До сих пор в северной и средней Африке существуют народы, считающие группами в двенадцать, или дюжинами. Такой счет, повидимому, был некогда более распространенным, о чем и свидетельствует тот факт, что еще в недалеком прошлом мы некоторые предметы, например, перья, считали дюжинами; двенадцать дюжин называли „гросс" (немецкое слово: „большая"), что означало: „большая дюжина" (подобно тому, как сотню называли „большим десятком", а миллион — „большой тысячей").

У древних вавилонян существовал счет группами в шестьдесят, или шестидесятиричная система счисления.

Системы счисления с основанием, отличным от десяти, могут быть использованы для решения некоторых задач.

Двоичная система счисления

Число в десятичной системе счисления, например 7438, можно написать так:

$$7438 = 7 \cdot 1000 + 4 \cdot 100 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1$$

или

$$7438 = 7 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 3 \cdot 10 + 8 \cdot 1.$$

Запись числа в системе с другим каким-нибудь основанием r имеет вид:

$$a_n r^{n-1} + a_{n-1} r^{n-2} + a_{n-2} r^{n-3} + \ldots + a_3 r^2 + a_2 r + a_1.$$

Здесь a_1 есть цифра единиц; a_2 — цифра единиц второго разряда; a_3 — цифра единиц третьего разряда и т. д.

Числа в системах с основанием 2 или 3 (в двоичной или троичной системе) пишутся в виде:

$$a_n \cdot 2^{n-1} + a_{n-1} \cdot 2^{n-2} + \ldots + a_3 \cdot 2^2 + a_2 \cdot 2 + a_1 \cdot 1,$$

$$a_n \cdot 3^{n-1} + a_{n-1} \cdot 3^{n-2} + \ldots + a_3 \cdot 3^2 + a_2 \cdot 3 + a_1 \cdot 1.$$

Количество единиц любого разряда в числе, написанном по десятичной системе, не может быть больше 9; в числе, написанном по троичной системе, в каждом разряде может быть единиц только 0 или 1 или 2, а в двоичной системе — только 0 или 1.

Всякое число десятичной системы можно написать в системе с любым иным основанием, например в двоичной. Пусть например, требуется число 743 написать в двоичной системе.

Разделим данное число на 2. Остаток покажет, сколько единиц первого разряда будет в искомом выражении данного числа в двоичной системе. Если частное от деления больше единицы, то его, в свою очередь, надо делить на 2; второй остаток даст число единиц второго разряда искомого числа, а частное вновь надо делить на 2 до тех пор, пока оно не будет меньше 2, после чего следующее частное уже будет равно 0.

Это обращение числа десятичной системы в двоичную удобно расположить следующим образом, делая деление в уме и составляя таблицу с правой руки.

X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I		№ деления
0	1	2	5	11	23	46	92	185	371	743	Частные в десятичной системе.
	1	0	1	1	1	0	0	1	1	1	Остатки от деления, они же цифры числа в двоичной системе.
	X	IX	VIII	VII	VI	V	IV	III	II	I	Разряды в двоичной системе.

В данном примере IX частное равно 1, деление его на два дает целое частное 0 и остаток 1. Получаемые остатки суть цифры искомого числа в двоичной системе, идущие в том же порядке, как и остатки при делении. Таким образом имеем

$$743_{10} = 1011100111_2.$$

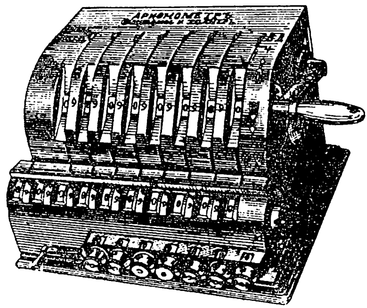
Индексы 10 и 2 при этих числах обозначают, что число 743 десятичной системы, число 1011100111 — двоичной.

Заглавный лист книги знаменитого вычислителя Лудольфа ван Цейлена, по имени которого число π называется „лудольфовым числом“. Под портретом дано число π с 20 цифрами.

То обстоятельство, что при пользовании двоичной системой счисления требуется только две цифры — 0 и 1, — послужило основанием очень важного использования этой системы счисления.

За последние годы построены электронные счетные машины, которые могут в одну секунду выполнить десятки тысяч вычислительных операций. Числа в такие машины надо „подавать“ в двоичной системе счисления. О мощи этих машин можно получить представление по следующим фактам.

Отношение длины окружности к диаметру окружности, обозначаемое буквой π (читай: пи), есть число, которое может быть вычислено только приближенно. Простейшие его значения суть $3\frac{1}{7}$ и 3,14. Во все времена математики занимались нахождением более точного значения этого отношения. Очень известный математик-вычислитель Лудольф ван Цейлен (1540—1610) всю жизнь занимался этим вычислением и нашел к концу жизни 34 цифры этого числа, которые и были вырезаны


Арифмометр русского инженера Однера.

на его могильном камне. К 1596 году Цейлен успел вычислить только 20 цифр значения и поместил их под своим портретом на обложке книги.

Несколько лет тому назад, когда были построены первые очень несовершенные электронные вычислительные машины, такая машина в 75 часов дала число π с 2035 цифрами после запятой!

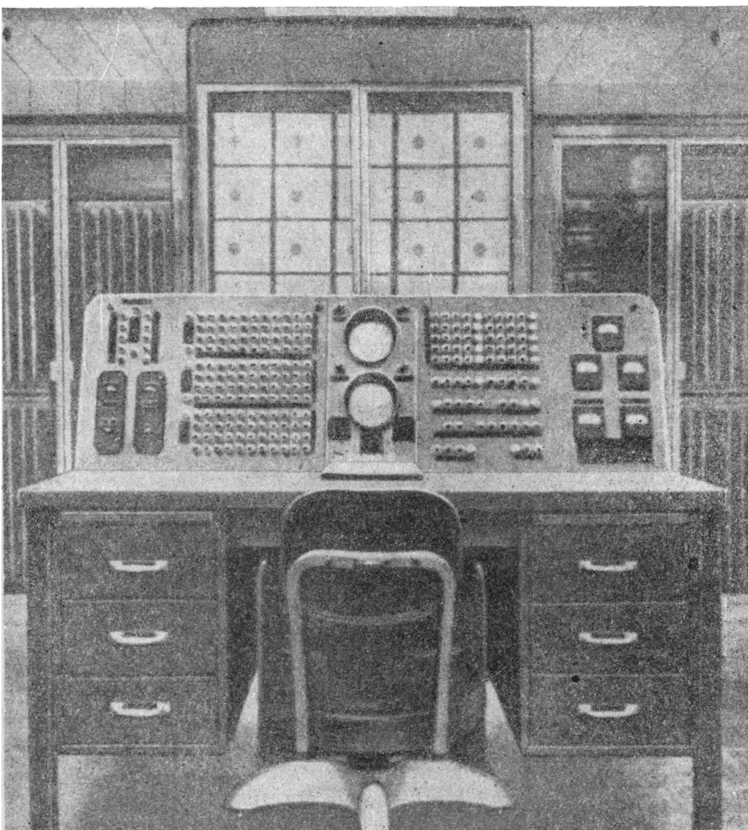
Счетные машины, выполняющие обычные арифметические выкладки, существуют давно. Арифмометр вы можете найти у счетовода в любой конторе, и даже в канцелярии школы. Обычно это арифмометр системы Однера, — счетная машина, изобретенная русским инженером В. Т. Однером в 1874 году в Петербурге[1]. Первый в мире вычислительный автомат, выполняющий гораздо более сложные операции, был сконструирован величайшим нашим математиком П. Л. Чебышевым в 1878 году. В царское время это изобретение не нашло применения и даже единственный экземпляр его, изготовленный самим П. Л. Чебышевым, хранится в Париже в „Музее искусств и ремесел". Восемью годами позже, в 1886 году, немец Зеллинг, профессор математики в Вюрцбургском университете, выпустил в обращение машину, система которой полностью совпадает с механизмом Чебышева. В 1894 году было публично доказано, что Зеллинг не является изобретателем этой машины, что восемью годами ранее Зеллинга П. Л. Чебышев осуществил идею, предложенную Зеллингом, как оригинальную. Модель машины Чебышева все эти годы находилась в Париже на выставке и была всем доступна.

Многие русские математики — академик А. Н. Крылов, профессор С. А. Гершгорин и другие — изобре-

[1] В. Т. Однер был не только жителем Петербурга, но служащим — главным инженером — Экспедиции заготовления государственных бумаг.

тали машины для производства операций высшей математики. В 1947 году бригада изобретателей (Н. В. Корольков, Б. А. Волынский и В. П. Лебедев) во главе с профессором математики Л. И. Гутенмахером получила Сталинскую премию за изобретение такой вычислительной машины. В 1951 году за изобретение машины, выполняющей самые разнообразные и самые сложные вычисления, Сталинскую премию получил профессор В. С. Лукьянов.

Машины новых конструкций (электронные) выпол-



Современная электронная счетная машина.

Член Петербургской Академии наук Л. Эйлер (1707—1783).

няют с поразительной быстротой вычислительные операции. Так, 21 августа 1952 года электронная машина в $13\frac{1}{2}$ минуты вычислила число

$$2^{1279}-1$$

и проверила, что это 386-значное число есть число простое. В октябре того же года та же машина вычислила число

$$2^{2281}-1$$

и проверила, что оно простое. Это самое большое известное в настоящее время простое число. Проверка одной из арифметических догадок потребовала 20 миллионов умножений. Машина выполнила эту работу в 6 часов. Метеорологический прогноз, требующий 800 000 умножений, машиною выполняется за час.

Так как электронные машины работают в системе счисления с основанием 2, то вопрос о системах счисления с основаниями, отличными от 10, приобретает серьезное значение.

Отметим мимоходом, что обращение числа десятичной системы в двоичную или троичную решает старую задачу о наиболее удобной системе гирь. Если гири класть только на одну чашку весов, то наиболее удобной является двоичная система гирь (в 1, 2, 4, 8, 16, . . . граммов); если же гири класть на обе чашки весов, то наиболее удобной будет троичная система гирь (в 1, 3, 9, 27, 81, . . . граммов).

Вопрос о системах гирь подробно изложен в нашей книге „Меры и метрическая система“, поэтому здесь на этом не будем останавливаться. Отметим лишь, что решение вопроса требует обращения числа в двоичную или троичную систему, что в свою очередь подчеркивает значение этого преобразования.

Памятник Леонарду Эйлеру на Ленинградском Смоленском (лютеранском) кладбище. Надпись: „Леонарду Эйлеру Петербургская Академия MD CCC XXXVII".

Повидимому, единственный пример пользования троичной системой гирь дает наша Родина, где эта система была введена законом о мерах 1797 года и употреблялась до 1842 года. Закон о мерах 1797 года был подготовлен знаменитым нашим академиком Л. Эйлером, об участии которого в работах комиссии мер и весов сохранились многие документы. То, что в торговой практике троичная система гирь не нужна, ввиду дешевизны изготовления употребляемых гирь, не лишает научного, равно как практического интереса троичную систему гирь, как самую экономную в случае употребления точных гирь из дорогого металла. Факт введения этой системы гирь в употребление в России в конце XVIII века говорит о передовом характере науки о мерах на нашей Родине.

Письменная нумерация

Задачею письменной нумерации является изображение всех чисел при помощи возможно меньшего числа знаков (цифр).

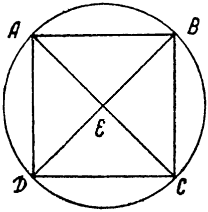
Разные народы, как мы уже видели, решали эту задачу различно.

Идеальным решением вопроса явилось изобретение поместной (позиционной) нумерации, в которой благодаря существованию нуля можно записать любое число при помощи десяти цифр.

Современная форма цифр установилась с открытия книгопечатания, в середине XV столетия. До этого цифры, как показывают наши таблицы, не имели стандартной формы.

Существует много теорий для объяснения нынешней формы цифр. Некоторые теории связывали форму цифр с числом палочек, точек, углов в цифре, но все эти теории не имеют научного значения.

В связи с этим вопросом мы можем упомянуть имя великого нашего поэта А. С. Пушкина.



В полных собраниях его сочинений имеется заметка с чертежом:

„Форма цыфров арабских составлена из следующей фигуры

AD (1), ABDC (2), ABECD (3), ABD + AE (4)“.

Догадка А. С. Пушкина представляет теорию, изображенную в приведенной на странице 83 таблице под цифрой VII.

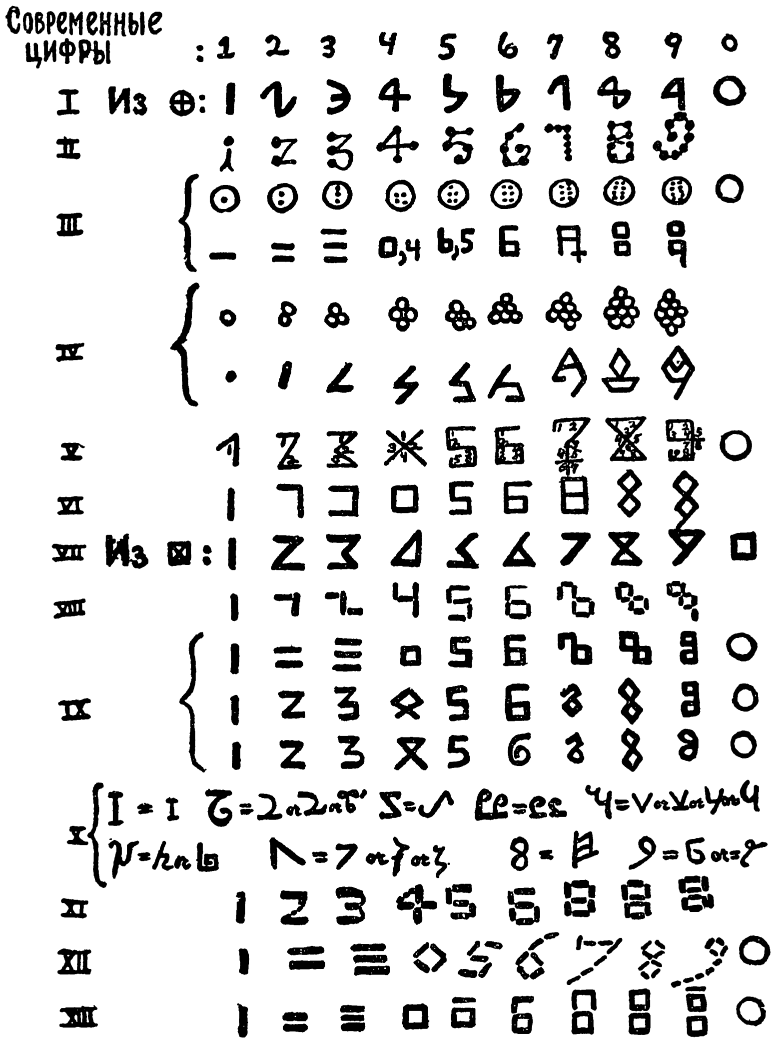
Многие современные учебники, называют наши цифры арабскими. Это ошибочно; их надо называть индусскими, так как арабы были только передатчиками индусских цифр в Европу. Что роль арабов ограничивалась только передачей в Европу индусских цифр, — было впервые указано русским востоковедом Кером в середине XVIII века.

В России индусские цифры в математических рукописях появляются в конце XVII века параллельно со славянскими цифрами, как мы видим на снимке, помещенном на странице 84. Встречались индусские цифры на некоторых гравюрах XVII века (см. стр. 57).

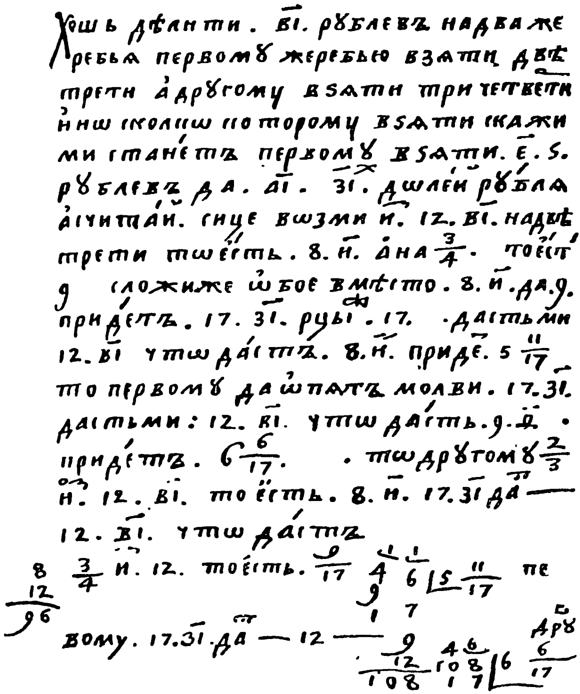
Все наши математические книги, начиная с „Арифметики“ Магницкого (1703), пользуются только индусскими цифрами.

О некоторых арифметических терминах

Слово „цифра“ происходит от арабского слова „цифр“, что означает „пустое“ (место). Арабы перевели этим словом индусское слово „сунья“ — „пустое“ (место), которым индусы называли знак отсутствия разряда в числе. Вплоть до XVIII века наш нуль и назы-



Разные попытки объяснения происхождения формы наших цифр. Под цифрой VII — догадка А. С. Пушкина.


Хошь делити . ві . рублев на два же
ребья первому жеребью взяти две
трети а другому взяти три четверти
и ты сколько по тому взяти скажи
ми станет первому взяти . е . ѕ .
рублев да . аі . зі . долей рубля
а ты учини . сице возми и . 12 . ві . на две
трети то есть . 8 . и . а на $\frac{3}{4}$. то есть
9 сложи же обое вместо . 8 . и . да 9 .
придет . 17 . зі . ру(бль) . 17 . дайте ми
12 . ві что даст . 8 . и . приде . 5 $\frac{11}{17}$
то первому да отпать молви . 17 . 31 .
дайте ми : 12 . ві . что даст . 9 . д .
придет . 6 $\frac{6}{17}$. то другому $\frac{2}{3}$
и . 12 . ві . то есть . 8 . и . 17 . 31 да —
12 . ві . что даст
8 $\frac{3}{4}$ и . 12 . то есть . $\frac{9}{17}$ 4 6 | 5 $\frac{11}{17}$ пе
вому . 17 . 31 . да — 12 — 9 ... 6 $\frac{6}{17}$ другому

Индусские цифры в русских рукописях XVII века сопровождаются славянскими цифрами.

вался „цифрой“. Так, например, Магницкий пишет в своей „Арифметике“, что знак 0 „цыфрою или ничем именуется“. В английском языке слово „цифра“ (cipher) и в настоящее время означает нуль; незнание этого приводило переводчиков с английского языка на русский к грубым искажениям смысла переводимого.

Когда в XIII столетии индусские цифры появились в Европе и для большинства людей были непонятными, их считали какими-то тайными знаками, тайнописью. Тайнопись (письмо какими-нибудь условными знаками) называется шифром. Слово „шифр“ происходит от того же корня: „цифр“.

Такое словопроизводство объясняется тем, что сущностью индусской нумерации, как бы „тайнописи“ для европейцев, был знак нуля; поэтому его первоначальное название „цифр“ стало названием всей арифметической „тайнописи“, которую представляли индусские цифры. Теперешнее название „нуль“ происходит от латинского слова „nulla“ (figura), „никакая“ (цифра). Правильной формой слова будет „нуль“, а не „ноль“.

Индусы обозначали пустой разряд в числе сначала точкой, потом кружочком. Во многих языках нуль долго называли кружочком. Правдоподобным является образование формы нуля, как обозначения пустого места в записи числа, из первоначального знака □, который был заменен более удобным для письма кружком.

Легко понять происхождение названий чисел: одиннадцать = один-на-десять, двенадцать = два-на-десять и так далее, двадцать = двадесять, тридцать = тридесять и так далее.

В отличие от общего правила числа 40 и 90 получили названия „сорок“ и „девя́носто“. Как возникли эти названия?

В некоторых книгах слово „сорок“ производится от греческого названия числа 40 — тессара́конта. Это объяснение вызывает самое сильное сомнение. Почему русские, дав числам 20, 30, 50 и другим русские названия, для числа 40 вдруг обратились за греческим названием? К тому же получение из слова „тессара́конта“ слова „сорок“ совершенно невероятно уже по произношению и положению ударения.

Индусские цифры IX века.

Цифры западных арабов X века.

Испанские цифры 976 года,

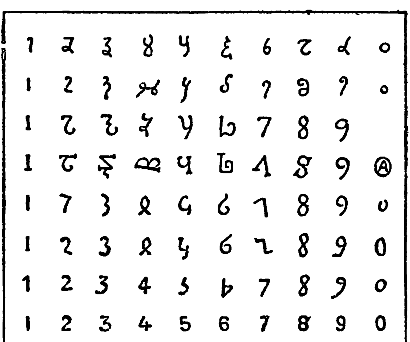
Французские цифры XII века,

Французские цифры XIII века.

Готические цифры около 1400 года.

Цифры эпохи Возрождения, около 1500 года.

Современные цифры.



Постепенное превращение индусских цифр в современные.

Известно, что в древние времена в качестве денег употреблялись меха — позднее кожаные деньги (кусочки кожи с клеймами). Указ Петра I еще в 1700 году утверждает, что „В Калуге и в иных городах вместо серебряных денежек торгуют кожаными“.

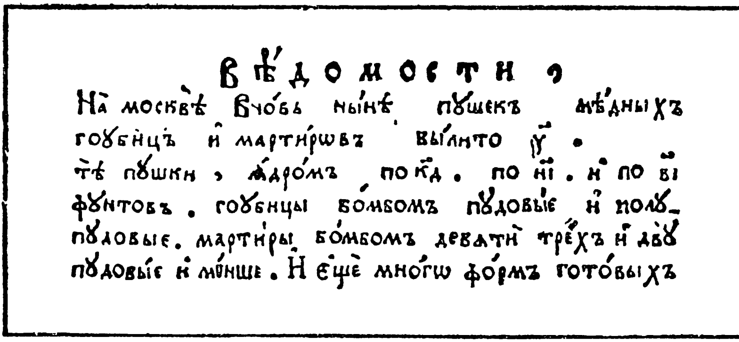
По „Толковому словарю живого великорусского языка Владимира Даля“, 40 собольих мехов составляли полную шубу и влагались в „чехол или в сорочку“. Отсюда название числа „сорок“. Аналогичное образование имен числительных наблюдается и в других языках. В Дании, например, продают рыбу партиями в 80 голов, надетыми на жердь. Название „жердь“ стало и названием числа 80.

Числительное „девяносто“ производят от слов „девять до ста“: между числами 90 и 100 в натуральном ряду стоят девять чисел. С таким толкованием не все филологи согласны, однако, другого, лучшего объяснения они не дают.

Необоснованное объяснение происхождения слова „сорок“ из греческого языка напоминает столь же неудовлетворительное объяснение происхождения слова „саже́нь“ или „са́жень“ от английского корня (fathom). По словарю Даля слово с а ж е н ь, или старинное с я ж е н ь, происходит от глагола с я г а т ь, означающего доставать до чего-либо. Отсюда выражения: „рука не сягает“; „разум сягает, да воля не владает“ и так далее. Формы „досягаемый“, „недосягаемый“ от глагола „сягать“ употребляются и в современном языке. Естественное объяснение слова „сажень“, или „сяжень“: „досягаемое (рукой при косой сажени, отмериваемой от каблука левой — правой — ноги до кончика вытянутой вверх правой — левой — руки) расстояние“. Слово „сажень“ встречается в старых документах 1017 года.

Арифметика целых чисел

Употребляемые в настоящее время способы производства арифметических действий над целыми числами выработались постепенно в Индии в связи с распространением там ранее, чем в других странах, поместной десятичной нумерации. Самое раннее письменное



Ведомости
На москвѣ вновь нынѣ пушекъ мѣдныхъ
гоубицъ и мартировъ вылито у҃.
тѣ пушки ядромъ по к҃д. по и҃і. и по в҃і
фунтовъ. гоубицы бомбомъ пудовые и полу-
пудовые. мартиры бомбомъ девяти трехъ и двух
пудовые и меньше. И еще многω формъ готовыхъ

Первая русская газета „Ведомости" еще в 1703 году употребляет славянские цифры: „На Москве вновь ныне пушек медных, гаубиц и мортиров вылито 400. Те пушки ядром по 24, по 18, по 12 фунтов" и так далее.

свидетельство о существовании этой индусской арифметики относится к середине VII столетия. Около 660 года ученый грек Север Себокт пишет: „Высокие открытия индусов в астрономии более гениальны, чем открытия греков и вавилонян; их ценные методы вычисления превосходят всякое описание. Скажу лишь, что вычисления делаются при помощи девяти цифр. . ." Первые следы проникновения этих приемов в Европу можно констатировать в редких памятниках конца X века.

Более широкое знакомство с ними в Европе началось с XIII века, после того как в XII веке на латинский язык была переведена книга узбекского математика Мухáммеда ал-Хорезми—„Арифметика индусскими цифрами".

Индусские правила действий над целыми числами отличались от наших лишь тем, что все действия начинались слева, с высших разрядов.

Индусы писали на дощечках, усыпанных порошком, поэтому им легко было „стереть" написанную цифру и заменить новою, если действие над следующим разрядом давало результат, часть которого надо было прибавить к высшему разряду.

При нашем способе письма на бумаге это стирание неудобно. Однако профессиональные вычислители и в наше время производят действия, начиная с высших

А. Н. Крылов (1863 — 1945).

разрядов. Так, например, при сложении нескольких чисел они складывают два числа, начиная с высших разрядов, и пишут полученную сумму рядом. Затем эту сумму таким же образом складывают с третьим слагаемым, новую сумму — с четвертым и так далее.

Академик А. Н. Крылов (1863—1945), крупный математик нашего времени и, несомненно, лучший вычислитель среди математиков, рекомендовал такой способ производства арифметических действий. Если так поступают профессиональные вычислители, то, очевидно, такой порядок вычисления является более удобным и точным, чем принятый в школьном преподавании.

Л. Ф. Магницкий в главе об умножении указывает, что „нецыи умножают странным некоим образом“, располагая действия так:

$$\times\begin{array}{l}481\\ \underline{399}\\ 1443\\ \;\;4329\\ \;\;\;\;\underline{4329}\\ 191919.\end{array}$$

„Странность“ этого способа умножения заключается только в том, что умножение начинается с умножения на высший разряд множителя.

Так поступать естественно уже потому, что важнейшая часть произведения получается от умножения на высший разряд множителя. При умножении приближенных чисел этот способ несравненно более удобен, чем обычный.

Вообще арифметические действия в разные эпохи выполнялись различными способами.

О числе арифметических действий

Число арифметических действий в разные времена и у разных народов было различное. Средневековые руководства содержат девять арифметических действий. Это суть: 1) нумерация, 2) сложение, 3) вычитание, 4) удвоение, 5) умножение, 6) раздвоение (деление на 2), 7) деление, 8) прогрессия (обычно нахождение суммы чисел натурального ряда), 9) извлечение корня (обычно только квадратного).

„Удвоение" чисел широко применяли египтяне, которые всякое умножение сводили к этой более простой операции.

Пусть, например, надо вычислить

$$37 \cdot 19$$

$$19 = 1 + 2 + 2^4;\ 37 \cdot 19 = 37 \cdot (1 + 2 + 2^4) = 37 \times$$
$$\times (1 + 2 + 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2)$$

$$37 \cdot 1 = 37\ (*)$$
$$37 \cdot 2 = 74\ (*)$$
$$37 \cdot 2 \cdot 2 = 148$$
$$37 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 296$$
$$37 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 = 592\ (*)$$
$$37 \cdot (1 + 2 + 2^4) = 37 + 74 + 592 = 703.$$

Умножение свелось к удвоениям и сложению. Это возможно всегда, так как множитель можно всегда выразить в виде суммы степеней числа 2 (и единицы, если число нечетное): для этого достаточно множитель выразить в двоичной системе.

Неоднократно нами упоминавшийся узбекский математик IX века Мухáммед ал-Хорезми признал удвоение и раздвоение особыми арифметическими действиями. После перевода его книги на латинский язык в XII столетии все европейские учебники включили в число арифметических действий удвоение и раздвоение. Лишь в самом конце XV столетия итальянский автор Лука Пачиоло впервые отмечает, что удвоение и раздвоение являются лишь частными случаями умножения и деления, и отбрасывает их. Исключенные из учебников, как особые арифметические действия, удвоение и раздвоение продолжали применяться в практических вычислениях. В этом отношении особую живучесть проявил один способ умножения, который и в наши дни неоднократно описывался в литературе под названием:

„Способ умножения чисел, применяемый русскими крестьянами"

Пусть требуется умножить 37 на 32. Составим два столбца чисел, — один удвоением, начиная с числа 37, другой раздвоением, начиная с числа 32:

37	32
74	16
148	8
296	4
592	2
1184	1

Произведения всех пар соответственных чисел одно и то же, потому

$$37 \cdot 32 = 1184 \cdot 1 = 1184.$$

Второй пример найти произведение $47 \cdot 37$.

Поступаем так же, как в приведенном выше примере, лишь во втором столбце при раздвоении пишем только целую часть частного (когда делимое нечетное) и отмечаем звездочкой те строчки, в которых деление совершалось с остатком, и последнюю. Имеем:

47	37 (*)
94	18
188	9 (*)
376	4
752	2
1504	1 (*).

Если бы при делении на 2 чисел второго столбца остатков не было, то произведение равнялось бы числу 1 504. В данном же случае мы действовали так, как будто в начале было не $47 \cdot 37$, а $47 \cdot 36$, а в третьей строке не $188 \cdot 9$, а $188 \cdot 8$. Мы отбросили по одному разу 47 и 188, а поэтому верное произведение получится, если к числу 1 504 прибавить 188 и 47, то есть

$$47 \cdot 37 = 1\,504 + 188 + 47 = 1\,739.$$

Правило умножения: произведение данных чисел равно сумме тех чисел первого столбца, которые соответствуют нечетным числам второго столбца.

Этот способ умножения является практичным, если приходится одно и то же число умножать на разные числа. Пусть, например, счетовод колхоза, не имеющий арифмометра, вычисляет причитающиеся разным лицам суммы, при условии, что каждый рабочий данного разряда получает в день 53 рубля.

Первый столбец, получаемый последовательным удвоением, является общим при всех умножениях и вычисляется раз навсегда. Для получения сумм, причитающихся за различные числа трудодней, остается составлять лишь для каждого числа дней второй столбец чисел делением на два, что легко выполняется в уме.

Некоторые свойства целых чисел

В начальной арифметике рассматриваются некоторые свойства натуральных чисел, составляющих последовательность, — 1, 2, 3, 4, ... и так далее, называемую натуральным рядом.

В настоящее время ребенок уже в младших классах школы усваивает умение считать числа натурального ряда неограниченно. Усвоение этого умения считать требовало у первобытного человека долгого периода развития. Об этом свидетельствуют разные факты.

В русском языке, как и в подавляющем большинстве современных языков, имеются особые формы слов для единственного числа и множественного числа, то есть для случаев, когда речь идет об одном предмете или о более чем одном предмете.

Но в славянском языке, столь близком к русскому языку, было три формы слов: формы единственного, двойственного и множественного числа. Иными словами, когда речь шла о двух предметах, название предметов ставилось в особой форме, отличной от форм единственного и множественного числа. Такое явление имеет и имело место и в некоторых других языках. Существуют языки, которые имеют и особенные формы тройственного числа, то есть имя ставится в особой форме, когда речь идет о трех предметах. Это явление в языке возникло в ту отдаленную эпоху, когда человек умел считать лишь один, два, или один, два, три, после чего он уже не различал числа предметов, а называл количество предметов словом „много". Возможно, что суеверные представления о некоторых числах (7, 13) объясняются тем, что эти числа были либо самыми большими числами, усвоенными человеком на некоторой ступени его развития, либо были теми числами, до усвоения которых он еще не дошел, поэтому эти числа казались ему необычными, непонятными, наводящими страх.

Когда же человек дошел до умения считать числовой ряд неограниченно?

Мы упоминали уже о сочинении Архимеда (287—212 годы до нашего летосчисления) — „Исчисление песчинок", в котором он доказывает, что чисел хватит и для того, чтобы сосчитать песчинки, заполняющие всё мировое пространство, как его понимали в то время, в виде шара определенного размера. Архимед доказывает совершенно основательно, что он может сосчитать при помощи чисел любое количество предметов.

Пифагор в VI столетии до нашего летосчисления ввел в арифметику разделение чисел на простые и составные. Простыми называются числа, которые делятся без остатка только на единицу и самого себя; составными — числа, которые, кроме единицы и самого себя, делятся еще хоть на какое-нибудь одно третье число. Далее в арифметике показывается, что каждое составное число единственным образом разлагается на произведение простых множителей. Таким образом, простые числа являются как бы теми кирпичами, из которых составляются все остальные числа. Отсюда понятен интерес к простым числам.

Разделение чисел на простые и составные, введенное Пифагором, считается важным моментом в развитии математики. Это деление чисел является началом теоретического изучения свойств чисел, чем занимается значительная часть математики в целом.

Современная арифметика различает среди натуральных чисел трех различных видов числа:

1) число 1, имеющее только одного делителя;

2) простые числа, имеющие только двух делителей: единицу и само число;

3) составные числа, имеющие более двух делителей.

Выделение числа 1 в особый вид натуральных чисел основано на том, что 1 обладает многими специальными свойствами, отличными от соответственных свойств других чисел. Пример. Назовем дробь $\frac{1}{n}$ числом, обратным для числа n. У числа 1 обратное ему число будет также 1; для всех других чисел такое равенство не имеет места. Сумма всех делителей любого числа, отличного от 1, больше самого числа, если считать делителем и само число; для числа 1 сумма делителей равна самому числу. Если включить число 1 в группу простых чисел, как это иногда делалось, то во многих теоремах надо было бы оговорить особо свойства числа 1. Чтобы этих оговорок не делать, выделили число 1 в особый вид натуральных чисел. Древнегреческие математики этого не делали, так как они называли числом совокупность единиц: для них 1 не была числом, а лишь элементом, атомом, из которого составляются числа. Они не считали числом и дроби, а рассматривали дробь как отношение двух натуральных чисел.

Греческий математик Евклид (около 300-го года до нашего летосчисления) доказал, что простых чисел неограниченно много, что не существует наибольшего простого числа. Около ста лет после него другой греческий математик Эратосфен дал способ („решето Эратосфена“), которым можно из чисел натурального ряда выделить простые числа. И доказательство Евклида и описание „решета Эратосфена“ даются в учебниках.

„Решето Эратосфена“ в настоящее время доведено до 12 миллионов; имеются печатные таблицы всех простых чисел между 1 и 12 000 000.

За пределами этой таблицы известны многие простые числа, но это числа определенного вида, например числа вида 2^n-1 или 2^n+1. Так, например, замечательный математик-самоучка И. М. Первушин (1883) доказал, что число

$$2^{61}-1=2\ 305\ 843\ 009\ 213\ 693\ 951 \text{ — число простое.}$$

Это число в течение ряда десятилетий было наибольшим известным простым числом.[1]

И. М. Первушин, кроме того, доказал (1878), что составным является число

$$2^{2^{23}}+1, \text{ так как делится на } 167\ 772\ 161=5\cdot 2^{25}+1.$$

Число $2^{2^{23}}+1$ содержит 2 525 223 цифры. Если бы его напечатать обычным шрифтом, потребовалась бы строка длиною в 5 километров или книга обыкновенного формата в 1 000 страниц. Результаты Первушина были проверены в Петербургской и Парижской академиях наук и подтверждены.

Имеющиеся таблицы простых чисел показывают, что простые числа по мере удаления от начала натурального ряда встречаются в нем всё реже и реже, но внимательное рассмотрение деталей таблицы обнаруживает большие неправильности в распределении простых чисел.

Следующая таблица (стр. 95) дает некоторое общее представление об этих неправильностях.

Неравномерность распределения и убывания простых чисел ясно видна из второго столбца таблицы.

Пестрота картины распределения простых чисел увеличится еще более, если отметим, что существуют пары простых чисел, которые в натуральном ряду отделены друг от друга только одним числом (такие простые числа называются „близнецами“), как, например, 3 и 5, 5 и 7, 11 и 13 или 10 016 957 и 10 016 959; с другой стороны, существуют пары последовательных простых чисел, между которыми в натуральном ряду имеется много составных чисел. Так, например, все 153 последовательных числа натурального ряда от 4 652 354 до 4 652 506 являются составными числами.

---

[1] В настоящее время самым большим известным простым числом является число $2^{2281}-1$, как указано было выше. Это число много, много раз больше числа Первушина.

Промежуток натурального ряда	Простых чисел в этом промежутке	Простых чисел между 1 и концом промежутка
1	2	3
от 1 до 10	4	4
от 10 до 20	4	8
от 20 до 30	2	10
от 30 до 40	2	12
от 40 до 50	3	15
от 50 до 60	2	17
от 60 до 70	2	19
от 70 до 80	3	22
от 80 до 90	2	24
от 90 до 100	1	25
от 1 до 100	25	25
от 100 до 200	21	46
от 200 до 300	16	62
от 300 до 400	16	78
от 400 до 500	17	95
от 500 до 600	14	109
от 600 до 700	16	125
от 700 до 800	14	139
от 800 до 900	15	154
от 900 до 1000	14	168
первый миллион	78 498	78 498
второй миллион	70 435	148 933
третий миллион	67 883	216 816
четвертый миллион	66 330	283 146
пятый миллион	65 367	348 513
шестой миллион	64 336	412 849
седьмой миллион	63 799	476 648
восьмой миллион	63 129	539 777
девятый миллион	62 712	602 489
десятый миллион	52 090	664 579

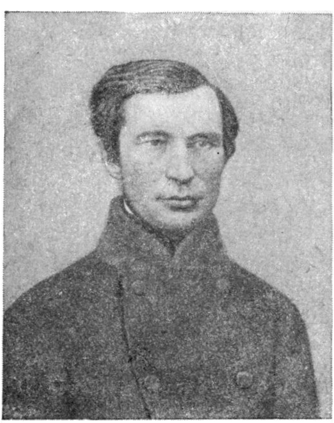
Можно доказать, что в продолженном натуральном ряде существуют участки, состоящие из любого числа последовательных составных чисел.

Самые выдающиеся математики стремились разгадать загадку распределения простых чисел. Они искали формул, с помощью которых можно было бы, хотя приближенно, определить число простых чисел, не превосходящих определенного натурального числа. Иными словами, они искали формул для решения вопроса: сколько простых чисел имеется в натуральном ряду чисел от 1 до 1 000, от 1 до 100 000, от 1 до 1 000 000 и т. д. В решении этого труднейшего вопроса математики крупнейший результат принадлежит Пафнутию Львовичу Чебышеву, одному из самых гениальных математиков не только в России, но и во всем мире.

П. Л. Чебышев

Пафнутий Львович Чебышев родился 16 мая 1821 года, умер 8 декабря 1894 года (новый стиль). Воспитанник Московского и профессор Петербургского университетов, член Петербургской и Парижской академий наук, Чебышев сделал много важнейших открытий в разных областях математики и создал целые новые разделы ее. К очень выдающимся достижениям относятся и его работы о простых числах.

В 1849 году П. Л. Чебышев вывел формулу, которую безрезультатно искали самые знаменитые математики, для определения с большой точностью количества простых чисел, заключенных между 1 и любым числом x. Так как в настоящее время имеется таблица простых чисел, заключающихся между 1 и 12 000 000, то легко проверить степень точности формулы Чебышева в этих границах.



П. Л. Чебышев (1821—1894).

Обозначив, как это принято в математике, действительное количество простых чисел между 1 и числом x символом $\pi(x)$ (читается: пий от x), а количество их, вычисленное по формуле Чебышева, символом $\mathrm{Li}(x)$ (ли от x), находим разницу между ними, то есть $\mathrm{Li}(x) - \pi(x)$, для различных значений x. Эти разности показывают, на сколько результат, вычисленный по формуле Чебышева, отклоняется от истинного значения искомого числа простых чисел.

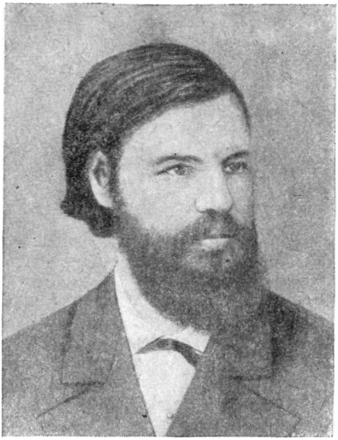
x	$\pi(x)$	Li (x)	Li $(x) - \pi(x)$
10	4	6	2
100	25	29	4
1 000	168	178	10
10 000	1 229	1 246	17
100 000	9 592	9 630	38
500 000	41 538	41 606	68
1 000 000	78 498	78 628	130
1 500 000	114 149	114 263	114
2 000 000	148 933	149 055	122
2 500 000	183 072	183 245	173
3 000 000	216 816	216 971	155
4 000 000	283 146	283 352	206
5 000 000	348 513	348 638	125
6 000 000	412 849	413 077	228
7 000 000	476 648	476 827	179
8 000 000	539 777	540 000	223
9 000 000	602 489	602 676	187
10 000 000	664 579	664 918	339

Таблица показывает, что числа, получаемые по формуле Чебышева, в пределах 10 000 000 всегда несколько больше действительных количеств простых чисел, но это отклонение составляет для 500 000 лишь около 0,16%, а для 10 000 000 только 0,05%. Точность формулы Чебышева весьма большая и увеличивается с возрастанием числа x.

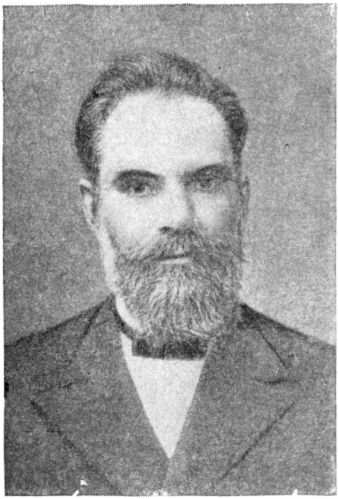
Отметим, что в настоящее время доказано следующее неожиданное свойство чисел Чебышева. В натуральном ряду, очень далеко за пределами 10 000 000, существует число, около которого Li (x) оказывается уже не больше, а меньше числа $\pi(x)$. В 1933 году было установлено, что это имеет место для числа x, которое определяется приближенным равенством

$$x \approx 10^{10^{10^{34}}}$$

Это число (так называемое число Скьюза) является самым большим числом, когда-либо встречавшимся в науке. Это число, в котором за единицей следует $10^{10\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000\,000}$ нулей.



Е. И. Золотарев (1847—1878).



Л. М. Ляпунов (1857—1918).

О впечатлении, которое произвело открытие Чебышевым формулы для определения числа простых чисел, можно судить по отзывам крупнейших математиков.

Знаменитый английский математик Сильвестер (1814—1897) назвал Чебышева „победителем простых чисел, который первый стеснил их капризный поток в алгебраические границы", и добавил, что „дальнейших успехов в теории простых чисел можно ожидать только тогда, когда родится некто, настолько превосходящий Чебышева своею проницательностью и вдумчивостью, насколько Чебышев превосходил этими качествами обыкновенных людей".

П. Л. Чебышев одновременно разрешил и другую, оставшуюся нерешенной до этого, задачу.

Французский математик Бертран (1822—1900) проверил на всех числах, до 6000000, существование следующей закономерности: для всех чисел x, начиная с 4, между числами x и $2x - 2$ содержится, по крайней мере, одно простое число. Это предложение было известно под названием „допущения (постулата) Бертрана". П. Л. Чебышев доказал предложение Бертрана и превратил его в теорему.

По всему сказанному о П. Л. Чебышеве можно подумать, что это был теоретик, занимавшийся самыми отвлеченными областями математики, далекий от всякой практики.

Между тем он является ученым, который чаще чем кто-либо из математиков решал задачи, вытекавшие из практических нужд человека.

Об этом можно судить уже по заглавиям его трудов, среди которых встречаем такие: „Об одном механизме“, „О зубчатых колесах“, „О простейших сочленениях“, „О кройке платьев“ и так далее. Он изучал устройство ветряных мельниц, разных заводских установок и, по его словам, повсюду наталкивался на вопросы математики, о которых наука его времени знала мало.

Эти пробелы в науке П. Л. Чебышев и восполнил своими гениальными теоретическими трудами.

Параллельно с этим он всю жизнь занимался практической механикой, изобрел большое число механизмов, производил опыты по стрельбе и много содействовал достижению русской артиллерией того высокого совершенства, которое ставило ее выше артиллерий всех европейских государств.

А. А. Марков
(1856—1922).

Г. Ф. Вороной
(1868—1908).

П. Л. Чебышев в старости.

Вся деятельность Чебышева представляет постоянное сочетание теории и практики; руководила этою деятельностью одна и та же идея, которая, по мнению Чебышева, лежит в основе всякой человеческой деятельности: как при наименьшей затрате сил получить наилучшие результаты, как располагать своими средствами для достижения по возможности больших результатов. Прилагая эту идею к улучшению средств вычисления, он дал формулы, применение которых одним из его талантливых последователей, академиком А. Н. Крыловым, позволило в такой мере улучшить расчеты кораблестроения, что Россия и в этом отношении уже много десятилетий стоит выше остальных стран мира.

В. А. Стеклов (1863—1936).

Наконец, нужно отметить, что П. Л. Чебышев создал первую русскую математическую научную школу, отличительной чертой которой является решение возможно простыми средствами конкретных вопросов, с доведением решения до формулы, по которой можно получить числовой результат.

К этой школе принадлежат почти все славные имена русских математиков второй половины XIX и начала XX века: А. Н. Коркин, Е. И. Золотарев, А. М. Ляпунов, А. А. Марков, Г. Ф. Вороной, В. А. Стеклов, А. Н. Крылов. Непосредственными продолжателями школы Чебышева являются советские математики, академики И. М. Виноградов, С. Н. Бернштейн и другие.

Теорема Эйлера — Гольдбаха — Виноградова о простых числах

О простых числах имеется ряд теорем, поражающих своею видимой простотой и трудностью доказательства. Одна из самых известных из них — теорема Гольдбаха. В течение двухсот лет, до работы академика Ивана Матвеевича Виноградова, все усилия очень многих крупнейших математиков, направленные на доказательство этой теоремы, не дали никакого результата.

Задача Гольдбаха возникла следующим образом.

В члены основанной в 1725 году Петербургской

Академии наук в 1727 году вступил двадцатилетний Леонард Эйлер, оказавшийся одним из самых крупных математиков XVIII века.

Его имя носят десятки теорем и формул во всех разделах математики и механики. Собрание его сочинений охватывает 80 громадных томов. В отличие от ряда академиков-иностранцев XVIII века, Эйлер заслужил уважение и любовь первых русских академиков, в том числе М. В. Ломоносова.

В письме к своему товарищу по Академии Гольдбаху в 1742 году Эйлер на вопрос Гольдбаха отвечает, что он считает истинной следующую теорему, которую, однако, не может доказать: „Всякое четное число, начиная с шести, есть сумма двух нечетных простых чисел“:

$$6=3+3,\quad 8=3+5,\quad 10=3+7=5+5 \text{ и т. д.}$$

Если эта теорема верна, то из нее следует, что всякое нечетное число есть сумма трех простых чисел. Эти предложения получили название теоремы Гольдбаха. Относительно четных чисел ее проверяли многие математики. В 1940 году проверка была доведена до 100 000.

Проверку правильности теоремы Эйлера — Гольдбаха — Виноградова для четных чисел можно провести следующим образом. Возьмите две полоски из плотной бумаги и нанесите на них равные клетки. В клетки одной полоски вписывайте нечетные числа в убывающем порядке, начиная с некоторого числа, например с пятидесяти. На другую полоску напишите нечетные числа в возрастающем порядке, начиная с единицы. Подчеркните на обеих полосках все простые числа по „решету Эратосфена“ или таблице простых чисел (на нашей таблице простые числа напечатаны жирным шрифтом).

Прикрепите полоски рядом так, чтобы число 49 одной полоски стояло на одной высоте с 1 другой полоски. В таком случае стоящие рядом подчеркнутые числа (жирные) на обеих полосках дают представление числа 50 в виде суммы двух нечетных простых чисел.

Таких „разбиений“ числа 50 оказывается 4, именно: $3+47$, $7+43$, $13+37$, $19+31$.

49	1
47	3
45	5
43	7
41	9
39	11
37	13
35	15
33	17
31	19
29	21
27	23
25	25

49	
47	1
45	3
43	5
41	7
39	9
37	11
35	13
33	15
31	17
29	19
27	21
25	23
23	25
21	27

49	
47	
45	
43	
41	
39	1
37	3
35	5
33	7
31	9
29	11
27	13
25	15
23	17
21	19

Проверка теоремы Гольдбаха для чисел 50, 48 и 40.

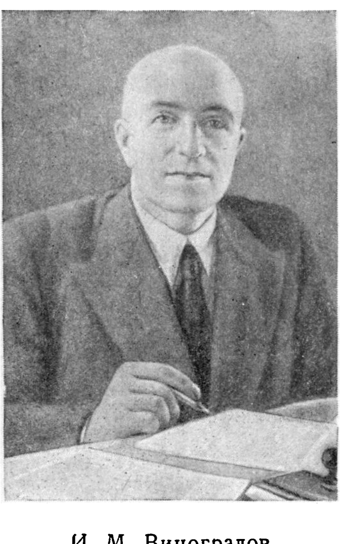
Этими же полосками можно воспользоваться для „разбиений“ любого четного числа, не превышающего 50, на сумму двух простых чисел. Для этого нужно вторую полоску поместить рядом с первой так, чтобы сумма рядом стоящих чисел оказалась равной разбиваемому числу.

На нашей табличке показано „разбиение“ чисел 50, 48 и 40 (см. стр. 103).

Делалось очень большое число попыток доказать теорему Гольдбаха, но все они остались безрезультатными.

Еще в 1922 году крупнейший английский математик Харди вынужден был заявить, что для доказательства этой теоремы существующая ныне математика недостаточна. Как всегда в таких случаях, для решения вопроса нужно было создать новые методы в математике.

Начало создания этих новых методов математики было положено в 1930 году советским математиком Л. Г. Шнирельманом (1905—1938); выработаны же необходимые новые методы были академиком Иваном Матвеевичем Виноградовым (родился в 1891 году).



И. М. Виноградов.

В 1937 году И. М. Виноградов доказал, что всякое достаточно большое нечетное число есть сумма трех нечетных простых чисел. Таким образом задача, над которой очень многие крупнейшие математики бились безрезультатно, решена для всех нечетных чисел, начиная с некоторого числа C. Это число весьма большое. Дальнейшие исследования по этому вопросу, наверно, снизят границу, начиная с которой теорему Гольдбаха для нечетных чисел можно считать доказанной.

Интерес этого вопроса заключается в том, что советскими математиками созданы новые научные методы, которые, конечно, найдут применение при решении и других вопросов. В связи с этим поучительно привести слова академика А. Н. Крылова:

„Митрофанушка в комедии „Недоросль“ говорил, что дверь, прилаженная к своему месту, есть имя прилагательное, а дверь, лежащая в чулане и не пристроенная к месту, есть имя существительное. Многие математические предложения долгое время оставались „существительными“ в смысле Митрофанушки: они существовали, но не находили применения. Но рано или поздно всякая правильная математическая идея находила применение в том или ином деле“.

Л. Г. Шнирельман (1905—1938).

В развитии любого раздела математики самым важным является создание новых методов. Применение уже существующих методов является гораздо более легкою работою.

Открытие И. М. Виноградовым его метода доказательства было событием, которое привлекло внимание всего мира.

Дробное число

В истории развития дробного числа мы встречаем дроби трех видов:

1) доли или единичные дроби, у которых числитель единица, знаменателем же может быть любое целое число;

2) дроби систематические, у которых числителями могут быть любые числа, знаменателями же — только

числа некоторого частного вида, например степени десяти или шестидесяти;

3) дроби общего вида, у которых и числители и знаменатели могут быть любыми числами.

Изобретение этих трех различных видов дробей представляло для человечества разные степени трудности, поэтому разные виды дробей появлялись в разные эпохи.

Знакомство человека с дробными числами началось с единичных дробей с малыми знаменателями.

Понятия „половина“, „треть“, „четверть“, „осьмушка“ употребляются часто людьми, которые арифметике дробных чисел никогда не обучались. Эти простейшие дроби изобрел каждый народ самостоятельно в ходе своего развития.

Единичные дроби. Древние египтяне, несмотря на то, что они в течение нескольких тысячелетий своей истории развили высокую культуру, оставили после себя прекрасные памятники искусства, владели многими отраслями техники, однако в арифметике дробных чисел не пошли далее изобретения единичных дробей (и дроби $\frac{2}{3}$). Если задача приводила к ответу, который мы выражаем дробным числом, египтяне его представляли в виде суммы единичных дробей или долей. Если, например, ответ по нашему был $\frac{7}{8}$, египтянин представлял его в виде суммы $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$ и писал без знаков сложения: $\frac{1}{2}\ \frac{1}{4}\ \frac{1}{8}$. Без знака сложения обходились и многие позднейшие народы, понимая писание дробей рядом, как сложение. Этот египетский способ письма частично сохранился и у нас. Мы пишем смешанные числа, ставя рядом, без какого-либо соединяющего знака, число целых единиц и дробь, и понимаем запись, как сумму: пишем $3\frac{1}{2}$ вместо $3+\frac{1}{2}$.

Может показаться, что египетский способ пользования одними лишь единичными дробями делал решение задач сложным. Не всегда это так.

Египетский автор решает задачу: нужно разделить

7 хлебов поровну между восемью лицами. Мы сказали бы, что каждый получает $\frac{7}{8}$ хлеба.

Для египтянина не было числа $\frac{7}{8}$, но он знал, что от деления 7 на 8 получается $\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}$. Этот факт подсказывает ему, что для дележа семи хлебов между восемью лицами нужно иметь 8 половинок, 8 четвертей и 8 осьмушек. Он режет 4 хлеба пополам, 2 хлеба — на четвертушки и 1 хлеб — на осьмушки и распределяет доли между получающими. Для дележа пришлось сделать всего $4+6+7=17$ разрезов.

Кладовщик, работающий в наши дни, которому предстоит такая же задача деления хлебов, сообразив, что каждому получателю надо дать семь восьмушек, быть может, сочтет нужным разрезать все 7 хлебов предварительно на восьмушки, для чего ему требуется сделать $7 \times 7=49$ разрезов. Как видим, в этой задаче египетский способ решения является более практичным.

Египетский ученик, решая задачи, приводившие к дробному числу, должен был иметь пред собою таблицу, чтобы знать, в виде суммы каких долей представляется результат деления (дробное число). Такую таблицу мы и находим в начале египетского руководства математики, которое известно нам под названием „папируса Ахмеса“ или „папируса Райнда“.

Как можно представить любую дробь в виде суммы долей? При нашем знании арифметики это легко сделать.

Можно убедиться (проверьте!) в правильности равенства

$$\frac{a}{b}=\frac{1}{n+1}+\frac{(n+1)a-b}{(n+1)b} \quad (*).$$

Если n есть целая часть дроби $\frac{b}{a}$ (в математике это обозначают знаком $\mathrm{E}\left(\frac{b}{a}\right)$, то есть, если $n=\mathrm{E}\left(\frac{b}{a}\right)$, то пользуясь равенством (*) мы можем дробь $\frac{a}{b}$ представить в виде суммы долей. Покажем это на примере $\frac{13}{20}$.

$$n=\mathrm{E}\left(\frac{20}{13}\right)=1 \left(\text{целая часть дроби } \frac{20}{13}\right).$$

По равенству (*)

$$\frac{13}{20}=\frac{1}{1+1}+\frac{(1+1)\cdot 13-20}{(1+1)\cdot 20}=\frac{1}{2}+\frac{2\cdot 13-20}{2\cdot 20}=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{6}{40}=\frac{1}{2}+\frac{3}{20}.$$

Над дробью $\frac{3}{20}$ проделаем те же преобразования:

$$n=\mathrm{E}\left(\frac{20}{3}\right)=6;$$

$$\frac{3}{20}=\frac{1}{6+1}+\frac{(6+1)\cdot 3-20}{(6+1)\cdot 20}=\frac{1}{7}+\frac{21-20}{7\cdot 20}=\frac{1}{7}+\frac{1}{140}.$$

Подставляя это значение вместо $\frac{3}{20}$, имеем:

$$\frac{13}{20}=\frac{1}{2}+\frac{3}{20}=\frac{1}{2}+\frac{1}{7}+\frac{1}{140}.$$

Задача: представьте $\frac{17}{18}$ в виде суммы долей.

Ответ: $\frac{17}{18}=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{9}$.

Решение задач практической жизни при помощи одних лишь долей (египетский способ) имело место почти у всех европейских народов, начиная с греков.

Систематические дроби. Одновременно с единичными дробями появились и систематические дроби. Самый ранний по времени вид таких дробей есть шестидесятиричные дроби, употреблявшиеся в древнем Вавилоне. В этих дробях знаменателями служат числа 60, $60^2=3600$, $60^3=216\,000$, 60^4, 60^5 и т. д., и они сходны с нашими десятичными дробями.

Шестидесятиричными дробями пользовались все культурные народы до XVII века, особенно в научных работах, почему они и назывались *физическими* или *астрономическими* дробями, а дроби общего вида, в отличие от них — *обыкновенными* или *народными*. Следы пользования этими дробями остались у нас до сих пор: минута есть $^1/_{60}$, секунда $^1/_{60^2}={}^1/_{3600}$, терция $^1/_{60^3}={}^1/_{216000}$ часть часа.

Десятичные дроби. Десятичные дроби представляют также вид систематических дробей.

Изобретателем их почти во всех книгах называется фламандский (бельгийский) инженер Симон Стевин (1548—1620). Стевин в 1585 году издал брошюру, в которой горячо агитировал за введение в употребление новых, десятичных, дробей, при помощи которых, по его словам, „можно решать все житейские задачи без ломаных“ (так назывались дроби у всех народов). Однако, как мы уже знаем, десятичные дроби были введены в научную литературу около 175 лет до него узбекским математиком и астрономом ал-Каши. Вычисляя отношение длины окружности к радиусу (2π) в шестидесятиричной системе, в то время общепринятой в научных исследованиях, ал-Каши получает результат в виде записи:

целые	первые доли	вторые доли	III	IV	V	VI	VII	VIII	IX
6	16	59	28	1	34	51	46	14	50,

что означает:

$$6+\frac{16}{60}+\frac{59}{60^2}+\frac{28}{60^3}+\frac{1}{60^4}+\frac{34}{60^5}+\frac{51}{60^6}+\frac{46}{60^7}+$$
$$+\frac{14}{60^8}+\frac{50}{60^9}.$$

Под этим числом он пишет:

целых 6 283 185 307 179 586 5.

Это число есть перевод написанного выше значения числа 2π из шестидесятиричной системы счисления в десятичную и представляет десятичную дробь:

6,2831853071795865.

Разделив это число на 2, получим приближенное значение числа π — отношение длины окружности к диаметру:

3,1415926535897932.

В этой дроби все 16 знаков после запятой точны.

Десятичные доли ал-Каши называет: десятичные минуты, десятичные секунды, десятичные терции и так далее.

В написанном в 1427 году „Ключе к искусству счета“ ал-Каши дает правила вычислений в десятичной системе, то есть учит умножению и делению десятичных дробей.

Сказанное дает нам полное основание считать узбекского ученого начала XV столетия ал-Каши основоположником употребления десятичных дробей и тем ученым, который и обосновал теорию этих дробей.

Кроме этого в тех же книгах ал-Каши обнаруживает ясное понимание правил

$$a^m \cdot a^n = a^{m+n},\ a^m : a^n = a^{m-n},$$

что представляет большой шаг вперед в этом вопросе от употреблявшихся в Западной Европе неуклюжих правил, ведущих свое начало от Архимеда.

Дробь общего вида. Дроби общего вида $\frac{m}{n}$, в которых и m и n могут быть произвольными целыми числами, появляются уже в некоторых сочинениях Архимеда. Простейшие из таких дробей $\left(\frac{2}{3}, \frac{3}{4}\right)$ постепенно входят в употребление в житейской практике. Индусы уже в первые века нашего летосчисления установили современные правила действий над обыкновенными дробями. Эти правила через руководства среднеазиатских математиков — ал-Хорезми и других — вошли в европейские учебники арифметики. Это случилось ранее распространения десятичных дробей.

В „Арифметике" Магницкого (1703) обыкновенные дроби излагаются подробно, десятичные же дроби — в специальной главе, как некоторый новый вид счисления, не имевший при тогдашней системе мер большого практического значения. Только с введением метрической (десятичной) системы мер десятичные дроби заняли подобающее им место в нашем обиходе.

Алгебра

Алгебра как искусство решать уравнения зародилась у вавилонян, у которых было для него специальное название, перешедшее в арабский язык.

В рассказе о вавилонской математике было уже сказано, что вавилоняне решали уравнения первой и второй степени, а при помощи таблиц — и некоторые виды уравнений третьей степени.

Узбекский математик ал-Хорезми свою книгу начала IX века, которая, переведенная в XII веке на латинский язык, стала родоначальником европейских учебников алгебры, называет „Китаб-ал-джебр вал-мукабала", что в переводе означает: „Книга о восстановлении и противоставлении". „Восстановление" означает превращение вычитаемого (по современному „отрицательного") числа в положительное при перенесении из одной половины уравнения в другую. Так как в те времена отрицательные числа не считались настоящими числами, то операция ал-джебр (алгебра), как бы возвращающая число из небытия в бытие, казалась чудом этой науки, которую в Европе долго после этого называли „великим искусством“, рядом с „малым искусством“ — арифметикой.

Термин „алгебра“ как название искусства восстановления у арабов же перешел в медицину. Вправление кости ломаной руки или ноги также являлось восстановлением потерянного органа, и искусство врача, которое возвращает человеку руку или ногу, также стали называть алгеброй.

Такой двойной смысл слова „алгебра“ объясняет нам один странный на первый взгляд факт. Во второй части известного романа Сервантеса „Дон Кихот“ (глава XV) рассказывается, как Дон Кихот сбил с лошади своего противника, как тот лежал на земле, не будучи в состоянии шевелить ни руками, ни ногами, и как Дон Кихоту удалось найти алгебриста для оказания помощи побежденному противнику.

Так сказано в испанском оригинале романа, так же говорится в более ранних русских изданиях „Дон Кихота“; только в последнем издании „алгебрист“ заменен „костоправом“. Объясняется это тем, что в испанском и португальском языках слово „алгебра“, как и в арабском языке, означает не только часть математики, но и „искусство вправлять вывихи“; словом „алгебрист“ называется не только знающий алгебру, но и врач — специалист по болезням рук и ног.

Арабы в течение нескольких столетий владели частью Пиренейского полуострова и принесли туда начала своей культуры и культуры, заимствованной ими у других народов, в частности у народов нашей Средней Азии. Арабы принесли в покоренные ими страны сочинения по математике Мухáммеда ал-Хорезми, Абдуль ал-Фергани и других ученых, а также переводы греческих авторов. Много арабских слов вошло в испанский и португальский языки, в том числе и слова „алгебра“ и „алгебрист“ в тех двух значениях, которые эти слова имели у арабов.

Египтяне решали задачи, которые мы теперь решаем при помощи уравнений первой степени, методом ложного положения.

Греческим геометрам были известны основные алгебраические операции, но они прилагали их только к отрезкам прямой. Только у позднего греческого математика Диофанта (III и IV столетия нашего летосчисления) мы находим числовое решение уравнений первой и второй степени. Греческая математика в этот период уже замирает.

Как теперь известно, индусы примерно в то же время стали разрабатывать алгебру, но Европа ознакомилась с подлинными индусскими математическими работами лишь в XIX столетии, поэтому они на развитие европейской математики не оказали влияния.

Основания алгебры как искусства решать уравнения уже с XII века через книгу ал-Хорезми дошли до Европы и были в последующие столетия европейскими математиками развиты дальше.

Буквенная символика алгебры. Уже ал-Хорезми характерную особенность алгебры видел в том, что она решает задачи, которые рассматриваются и в арифметике, в общем виде. В наше время достигается это тем, что числа обозначаются буквами, которые, в зависимости от условий задачи, могут получать разные числовые значения.

Алгебру поэтому часто называли общею или универсальною арифметикою.

Употребление букв в алгебре появилось в результате очень долгого развития.

Начатки употребления особых знаков для обозначения искомых чисел и операций над ними, так называемой буквенной символики в алгебре, можно видеть уже у древних вавилонян.

Особый знак для обозначения неизвестного искомого числа, называвшегося „кучей“, был у египтян.

Греческий математик Диофант имеет знаки для обозначения неизвестного и его степеней, действия вычитания и равенства. Он же знает, что можно производить умножение выражений вроде (5—3) (4—2), не находя предварительно разностей, причем произведение чисел, перед которыми стоят одинаковые знаки, надо писать слагаемым, то есть с плюсом, а произведение чисел, перед которыми стоят разные знаки, надо писать вычитаемым, то есть с минусом. Отрицательного числа у Диофанта еще нет.

Индусские математики при решении уравнений смелее применяли те же правила, что и Диофант, и при решении уравнений стали рассматривать и отрицательные корни, которые они толковали как долг или расход и обозначали точкой над числом или крестиком рядом с ним. Но еще индусский математик XII века заявляет, что „люди таких чисел не одобряют". Равноправность положительных и отрицательных чисел была признана в математике лишь в XVII веке.

Математики, писавшие на арабском языке, в том числе часто и среднеазиатские, неизвестное искомое число называли „вещью" (буквенной символики они не имели). Первая буква этого слова в европейской транскрипции и дала наше обозначение неизвестного буквой x.

До XVI столетия, однако, изложение алгебры было словесным.

Французский математик Виет (1540—1603) и его современники вводят буквенные обозначения и символы в широком масштабе, хотя не сразу в таком виде, как мы делаем это в настоящее время.

Уже в начале XVI века отдельные математики ввели обозначение степени числа при помощи показателя степени, но еще в XVIII веке встречаются записи aa, aaa или $aaaa$ вместо a^2, a^3 и a^4. Даже знак $=$, столь удобный и понятный, вошел во всеобщее употребление только в XVIII веке,[1] и еще в начале этого века даже авторы научных книг считают нужным объяснять, что знаки $+$ и $-$ обозначают сложение и вычитание, знак $\times$ умножение.

Происхождение употребляемых нами в арифметике и алгебре знаков не всегда можно точно установить.

Полагают, что знаки $+$ и $-$ возникли в торговой практике. Виноторговец черточками отмечал, сколько мер вина он из бочки продал. Приливая в бочку новые запасы, он перечеркивал столько расходных черточек,

---

[1] Знак $=$ для обозначения равенства двух выражений предложил английский автор Роберт Рикорд в 1557 году в учебнике алгебры, первом на английском языке, и посвященном компании купцов, ведущих торговлю с Москвой, которым он „желает здоровья и постоянного роста прибылей в их славных поездках".

сколько мер он восстановил. Так якобы произошли знаки + и — в XV веке.

Происхождение знака — таким образом кажется правдоподобным.

Относительно происхождения знака + существует другое объяснение, не менее правдоподобное. Вместо $a+в$ писали „a и $в$“, по-латыни: „a et b“. Так как слово „et“ („*и*“) приходилось писать очень часто, то его стали сокращать: писали сначала одну букву t, которая в конце концов выродилась в знак +. В книгах по арифметике вместо них долго писали латинские буквы p (плюс) и m (минус).

Знаки $\times$ и $\cdot$ для обозначения умножения и знак: для деления входят в употребление только в XVII столетии. До введения этих знаков употребляли для обозначения умножения и деления буквы M и D, как первые буквы латинских названий этих действий.

Про знак $\sqrt{}$ обычно указывается, что он происходит от буквы r (первой буквы латинского слова „radix“ — „корень“). Это объяснение не является общепринятым. В самых старых рукописях перед числом, из которого нужно извлечь корень, ставилась точка, а позднее точка или узкий ромбик с черточкой, направленной вправо и вверх. Так образовался знак $\sqrt{}$.

Скобки в современном виде вошли в употребление лишь в XVIII веке и прежде всего нашли широкое применение в изданиях Петербургской Академии наук.

Само название „скобки“ было введено нашим академиком Эйлером (1770). Раньше вместо заключения выражения в скобки над ним или под ним проводили черту. Если из алгебраического выражения нужно было извлечь корень, то перед ним ставили знак корня — ромбик с косой черточкой — и над выражением проводили черту; из слияния знака корня с чертой образовался знак корня $\sqrt{}$ с чертой, который в зарубежных книгах почти не употребляется. Вместо нашего способа письма $\sqrt{x^2+axy+y^2}$ там пишут $V\,(x^2+axy+y^2)$.

Неизвестные числа с XVII века стали обозначать последними буквами латинского алфавита x, y, z. Однако долго еще неизвестное в уравнении писали буквой R (от „Radix“ — „корень“), а квадрат его —

Заглавный лист „Арифметики“ Л. Ф. Магницкого.

буквой q („quadratus“). Рассмотрите снимок части титульного листа „Арифметики“ Магницкого. В руке Архимеда доска с такою записью:

$$\begin{array}{r}
2R+1 \\
3R\div 2 \\
\hline
6q+3R \\
\div 4R\div 2\\
\hline
6q\div 1R\div 2
\end{array}$$

Здесь знак $\div$ есть старинный знак вычитания. Запись Магницкого в наших обозначениях следующая:

$$\begin{array}{r}
2x+1 \\
3x-2 \\
\hline
6x^2+3x \qquad \\
-4x-2 \\
\hline
6x^2-x-2
\end{array}.$$

После введения буквенной символики в алгебру и усвоения понятия отрицательного числа решение уравнений первой степени свелось к законам действий над числами. Никакого „открытия" способа решения этих уравнений не надо было делать, и такое открытие никем не отмечено.

Существующие способы решения систем уравнений первой степени все уже имеются в книге Ньютона „Всеобщая арифметика", которая была издана в 1707 году и в 1948 году вышла в русском переводе.

Первой оригинальной русской книгой по алгебре является: „Начальное основание математики, сочиненное Николаем Муравьевым, капитан-поручиком от инженеров, часть I, Петербург, 1752". Самым значительным оригинальным русским руководством по алгебре в XIX веке была „Алгебра или вычисление конечных. Сочинил Н. Лобачевский. Казань, 1834". В этой книге наш великий математик Н. И. Лобачевский как в научном, так и в методических отношениях предвосхитил многое, к чему западноевропейские ученые и педагоги пришли позднее.

Геометрия

Геометрические знания, возникавшие у всех народов из их практической деятельности, были объединены в систематическую науку греческим математиком Евклидом, опиравшимся при этом на труды своих предшественников Фалеса, Пифагора, Гиппократа, Евдокса и других.

Евклид около 300 года до начала нашего летосчисления написал книгу „Начала", которая является одной из самых замечательных во всей математической литературе. Она не потеряла своего значения до сих пор. В наши дни вышел новый его перевод на русском языке, с богатейшими и поучительными примечаниями.

Это огромное сочинение, содержащее 465 предложений (определений, аксиом, теорем), изложено в строгом логическом порядке и служило многие столетия почти единственным учебником геометрии.

Все позднейшие авторы в той или иной мере подражали Евклиду.

Значительная часть содержания учебников геометрии целиком взята у Евклида.

Несмотря на всё совершенство сочинения Евклида, оно в отдельных частях вызывало критическое к себе отношение. Главным образом эта критика направлялась против учения о параллельных линиях в „Началах" Евклида.

В течение более чем двух тысячелетий имели место сотни попыток улучшить изложение учения о параллельных, но эти попытки до начала XIX столетия никакого улучшения в геометрию не внесли. Только гениальному русскому математику Николаю Ивановичу Лобачевскому удалось сделать то, что не удавалось в течение двух с лишним тысяч лет величайшим математикам.

Совершение этого научного подвига требовало целой революции во взглядах на основания геометрии и в философских взглядах на пространство.

Н. И. Лобачевский

Среди принимаемых Евклидом без доказательства положений было такое: „Если две прямые, лежащие в одной плоскости, при пересечении их какой-нибудь третьей образуют внутренние односторонние углы, сумма которых меньше двух прямых, то эти прямые пересекаются по ту сторону от третьей прямой, на которой сумма указанных углов меньше двух прямых".

В начале XIX века этой аксиоме была дана та формулировка, которая дается в учебнике: „На плоскости через данную точку можно провести только одну прямую, параллельную данной прямой".

В течение более чем 2000 лет очень многие математики, в том числе самые выдающиеся, делали множество попыток доказать это положение на основании остальных аксиом и допущений Евклида.

Все эти попытки оказались безрезультатными, но это, однако, не отняло у людей веры в то, что это положение Евклида всё же является теоремой и рано или поздно может быть доказано.

Н. И. Лобачевский положил конец этим исканиям. Он утверждал, что положение Евклида о параллельных есть самостоятельная аксиома и не может быть выведено из остальных аксиом.

Лобачевский делает предположение, согласно которому в плоскости, содержащей данную прямую и точку, лежащую вне прямой, через эту точку можно провести бесконечное множество прямых, не пересекающих данной прямой.

Исходя из такого предположения, Лобачевский строит свою геометрию с тригонометрией и не приходит ни к какому противоречию с остальными аксиомами геометрии, что должно было бы случиться, если бы евклидова аксиома параллельных была следствием этих аксиом.

Это открытие Лобачевского было полным переворотом в геометрии и философии.

Лобачевского называли Коперником или Колумбом геометрии, так как в области геометрии это открытие произвело революцию, подобную тем, какие произвели в астрономии Коперник и в географии Колумб.

В геометрии Лобачевского, как уже сказано, через точку, взятую вне „прямой“, можно провести бесконечное множество прямых, лежащих в той же плоскости, в которой лежат прямая и точка, и не пересекающих данную прямую.

Точно так же через эту точку можно провести и бесконечное множество прямых, пересекающих данную прямую. Две линии, отделяющие пучки пересекающих и непересекающих данную прямую линий и проходящих через заданную точку, Лобачевский называет параллельными к данной прямой. Отсюда видим, что у Лобачевского слово „параллельная“, как и многие другие слова, имеют иной смысл, чем в геометрии Евклида.

Н. И. Лобачевский (1792—1856).

Сумма внутренних углов треугольника в геометрии Лобачевского всегда меньше двух прямых углов и зависит от длины сторон. В этой геометрии не существует подобных фигур.

Несмотря, однако, на эти „странности“ с точки зрения обычной, евклидовой, геометрии, в геометрии Лобачевского ряд теорем евклидовой геометрии остается в силе, а все остальные образуют стройную систему предложений.

Оказалась вообще возможной геометрия, отличная от ранее принятой, которую до Лобачевского считали единственно возможной, единственно мыслимой.

В этом выражается переворот, произведенный Лобачевским в геометрии и философии.

Геометрические идеи Лобачевского в настоящее время лежат в основе очень многих новых теорий физики и астрономии. Размеры и цели нашей книги не позволяют дать здесь изложение этих идей. За последние годы выпущено много книг и брошюр на эту тему. Ограничимся краткой характеристикой личности великого революционера в науке — Н. И. Лобачевского.

Николай Иванович Лобачевский родился 1 декабря (по новому стилю) 1792 года в Нижнем Новгороде (ныне город Горький).

Отец его, Иван Максимович, служащий межевой конторы, умер в 1802 году. Мать, Прасковья Александровна, оставшись с тремя малолетними сыновьями без средств, добилась помещения сыновей на казенный счет в Казанскую гимназию.

В 1805 году в Казани был открыт университет, и в 1807 году Н. И. Лобачевский был зачислен студентом.

В университете Н. И. Лобачевский вскоре обратил на себя внимание профессоров своими исключительными успехами в математике.

В 1811 году он кончает университет, и его оставляют при университете в помощь профессорам.

С 1819 по 1826 год молодой Казанский университет пережил тяжелую пору. Попечитель университета Магницкий водворил в университете порядки мрачного средневековья: преследовал всякую свободную мысль, насаждал лицемерие, ханжество, шпионство.

Вместо занятий наукой от студентов требовалось показное благочестие и почитание начальства. Значительная часть профессоров была уволена.

Только после изгнания этого ретивого „попечителя“, буквально через несколько дней, Лобачевский выступил с первым докладом о новой геометрии. Это было в 1826 году. Но, к сожалению, его идеи не были поняты ни в университете, ни в других ученых кругах.

Вся долгая жизнь профессора и ректора Казанского университета Н. И. Лобачевского была посвящена служению Родине. Он призывал своих студентов любить науку, любить Родину и ее славу. Он сурово осуждал людей, живущих за счет чужого труда, ведущих растительный образ жизни, без любви к славе своей Родины.

Заботясь о школе, Лобачевский писал учебники (алгебры и геометрии), посещал уроки в школах и давал учителям методические указания.

Для просвещения широких слоев населения он читал публичные лекции, а для поднятия сельскохозяйственной культуры в крае сам устроил образцовое хозяйство в приобретенном им имении.

Речь Лобачевского при вступлении в должность ректора обнаруживает его прогрессивные педагогические, философские и политические взгляды.

Всю жизнь он резко критиковал модные в то время идеалистические течения в философии, утверждая, что „в основание математики могут быть приняты все понятия, каковы бы они ни были, приобретенные из природы“, что „эти понятия мы приобретаем посредством наших чувств“, что „все те понятия, которые не могли быть приобретены нашими чувствами... должны быть откинуты“.

Студенты университета глубоко уважали своего профессора и ректора. Уважали его и профессора́. Он в течение почти двадцати лет был выборным ректором университета.

Всё в Казанском университете до сих пор напоминает этого незабвенного ректора — здания, клиники, обсерватории, библиотека. Однако бесплодность всех попыток Лобачевского добиться понимания и признания его научных идей преждевременно состарила гениального человека. Ослепший, он в последние дни своей жизни еще раз продиктовал основы новой геометрии и умер 12 февраля 1856 года, непонятый, непризнанный.

Вскоре после его смерти пришла и слава.

Идеи Лобачевского нашли истолкователей и последователей.

Разными учеными была установлена возможность конкретного осуществления формул геометрии Лобачевского, на первый взгляд казавшихся столь странными.

В начале нашего столетия идеи Лобачевского стали основой почти всех новых теорий в астрономии и физике, всего теоретического естествознания. Оправдалось его смелое высказывание о том, что „нет ни одной области математики, как бы абстрактна она ни была, которая когда-нибудь не окажется применимой к явлениям действительного мира“. Имя Лобачевского в настоящее время является самым славным в области точной науки.

Велик образ Лобачевского, как человека, гражданина, патриота.

Несколько ученых приходили к идее о возможности новой, неевклидовой, как теперь говорят, геометрии. Они или убоялись опубликовать свои взгляды, как Гаусс, или, опубликовав, не вынесли насмешек и кончали отказом от борьбы за свои идеи.

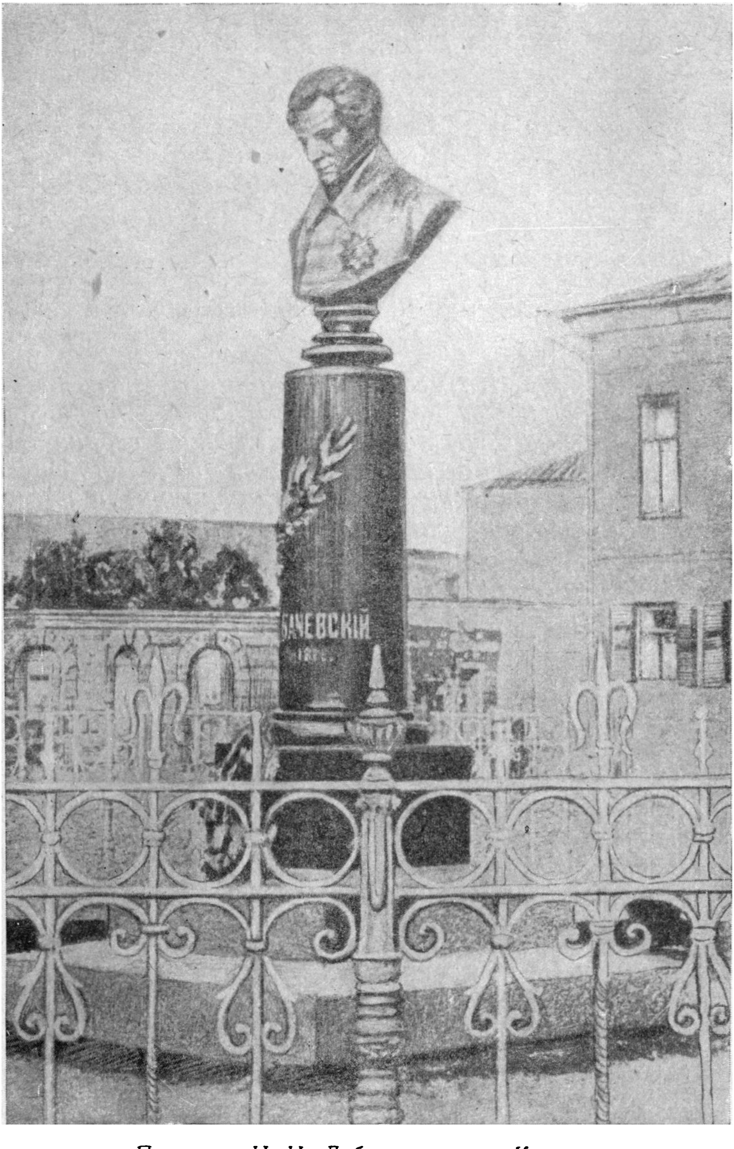
Н. И. Лобачевский имел мужество неоднократно выступать, высказывая свои революционные взгляды в науке. Он защищал их до последнего дыхания и не пришел в отчаяние от отсутствия понимания со стороны современников.

Еще в 1893 году, в столетие со дня рождения, Лобачевскому в Казани был поставлен памятник. Это был первый памятник математику во всем мире.

При открытии его были повторены слова известного писателя: „Ни одно растение не выходит из земли с бóльшим трудом, чем статуя великого человека, но зато ни одно растение не разрастается пышнее, не дает больше плодов и не сеет больше добрых семян вокруг себя“. Этими словами прекрасно характеризуются и жизненные трудности и великие плоды деятельности этого гениального человека.

Открытие памятника Лобачевскому, поставленного на собранные добровольные пожертвования, было общенародной и мировой оценкой гениальности русского математика. Как откликались на это событие русские люди того времени, видно из следующих телеграмм:

„Неразрывная связь наук порождает в каждом, причастном к ним, чувство радости при всяком крупном успехе их, в какой бы области знания ус-



Памятник Н. И. Лобачевскому в Казани.

Медаль в память Н. И. Лобачевского.

пех ни являлся. Но мысль о создании соотечественником целой новой науки возбуждает в подписавшемся искренний восторг, и из глубины сердца вырывается крик: да прославляется имя Лобачевского всюду, где есть место для науки, и пусть слава его озаряет и нашу родину и Казанский университет.

Профессор механики Петров".[1]

Другая, менее пространная, но не менее выразительная, телеграмма гласит:

„Геометрические знания составляют основу всей точной науки, а самобытность геометрии Лобачевского — зарю самостоятельного развития науки в России. Посев научный взойдет для жатвы народной.

Почетный член Казанского университета
Дмитрий Менделеев".

Мы имеем счастье жить при сборе этой жатвы в виде расцвета советской математики.

Имя Николая Ивановича Лобачевского является величайшей гордостью русской научной и философской мысли.

---

[1] Николай Павлович Петров (1836—1920), профессор механики Института инженеров путей сообщения, почетный член Академии наук, крупный авторитет в области прикладной механики, товарищ министра путей сообщения, генерал-инженер.

С. В. Ковалевская

Всем читателям нашей книги, вероятно, много раз приходилось слышать имя величайшей женщины-математика, университетского профессора Софьи Васильевны Ковалевской. Хотя ее творчество происходило в областях науки, которые стоят очень далеко не только от школьного курса математики, но и от курсов высших учебных заведений, однако жизнь и личность С. В. Ковалевской настолько интересны и поучительны, а ее имя представляет такую гордость русской науки, что необходимо посвятить ей несколько страниц в нашей книге.

Софья Васильевна родилась 15 января 1850 года в Москве, в семье генерала В. В. Корвин-Круковского (в метрическом свидетельстве С. В. Ковалевской фамилия передается в форме „Крюковской"), который вскоре вышел в отставку и поселился в своем имении в Витебской губернии. Дочери генерала, младшая Софья и старшая Анна, воспитывались под наблюдением гувернанток, изучали иностранные языки и музыку, чтобы стать хорошо воспитанными дворянскими барышнями. Однако генерал, сам ученик знаменитого математика М. В. Остроградского, решил дать младшей дочери и более серьезное образование, для чего был приглашен прекрасный учитель — Иосиф Игнатьевич Малевич. Ученица оказалась понятливой и старательной, но к арифметике сначала не проявила особого интереса. Лишь на пятом году обучения 13-летняя ученица при нахождении отношения длины окружности к диаметру (числа π) проявила свои математические способности: она дала свой самостоятельный вывод требуемого отношения. Когда Малевич указал на несколько окольный путь вывода, примененный Софьей, она заплакала.

Сама Софья Васильевна рассказывает в своих воспоминаниях, что большое влияние на пробуждение у нее интереса к математике оказал дядя своими рассказами о квадратуре круга (неразрешимая задача о построении циркулем и линейкой квадрата, имеющего площадь, равную площади данного круга) и других увлекательных математических вопросах. Эти рассказы действовали на фантазию девочки и создали в ней представление о математике, как науке, в которой имеется много интересных загадок.

Софья Васильевна рассказывает еще о другом случае, укрепившем в ней интерес к математике. Детская комната за нехваткою обоев была оклеена листами лекций по высшей математике, которые слушал в молодости ее отец. Таинственные формулы, загадочные слова и фигуры от частого обозрения их врезались в память девочки. Когда в возрасте пятнадцати лет она стала брать уроки высшей математики у очень известного педагога А. Н. Страннолюбского и слушала изложение тех же вопросов, о которых она без понимания смысла читала на „обоях", то сообщаемые ей учителем новые понятия казались старыми знакомыми и она усваивала их, к удивлению учителя, очень легко.

Но еще до этого четырнадцатилетняя Софья удивила приятеля отца, профессора физики Н. П. Тыртова, своими способностями. Профессор привез Софье свой учебник физики. Вскоре оказалось, что не прошедшая еще курса школьной математики Софья самостоятельно разобралась в смысле употребляемых в учебнике математических (тригонометрических) формул. После этого генерал, гордый успехами своей дочери, разрешил ей во время зимних пребываний в Петербурге брать уроки математики и физики, чем не замедлила воспользоваться пятнадцатилетняя Софа.

Однако этого было для нее мало. Софья Васильевна стремилась к получению высшего образования в полном объеме.

Двери высших учебных заведений в России для женщин в то время были закрыты. Остался лишь путь, к которому прибегали многие девушки того времени, искать возможности получения высшего образования за границей.

На поездку за границу нужно было разрешение отца, который о такой поездке дочери и слышать не хотел. Тогда Софья Васильевна, которой исполнилось уже восемнадцать лет, выходит фиктивно замуж за Владимира Онуфриевича Ковалевского, знаменитого впоследствии естествоиспытателя, и в качестве его „жены" уезжает вместе с сестрой в Германию, где ей удается, не без трудностей, поступить в Гейдельберг-

С. В. Ковалевская (1850—1891).

ский университет. Профессора университета, среди которых были знаменитые ученые, были в восторге от способностей своей ученицы. Она стала достопримечательностью маленького городка. Встречая ее на улицах матери указывали на нее своим детям, как на удивительную русскую девушку, которая в университете изучает математику.

В течение трех лет Софья Васильевна при очень усиленных занятиях прошла курс университета по математике, физике, химии и физиологии. Ей хотелось усовершенствоваться в области математики у крупнейшего в то время в Европе математика Карла Вейерштрасса в Берлине. Так как в Берлинский университет женщин не принимали, то Вейерштрасс, восхищенный исключительными способностями Софьи Васильевны, в течение четырех лет занимался с нею, повторяя ей лекции, которые читал в университете. В 1874 году Гёттингенский университет, центр математической науки в Германии, по представлению Вейерштрасса, присудил Софье Васильевне степень доктора без защиты диссертации за три представленные работы. В своем представлении Вейерштрасс указывал, что он не знает среди своих многочисленных учеников, съезжавшихся к нему из всех стран, никого, которого он „мог бы поставить выше госпожи Ковалевской".

С дипломом „доктора философии с высшей похвалой" двадцатичетырехлетняя Софья Васильевна с мужем вернулась в Россию.

Сестра ее Анна, которая имела писательский талант, признанный Ф. М. Достоевским, еще из Гейдельберга уехала в Париж и там вышла замуж за революционера Виктора Жакляра. В деятельности Парижской коммуны (1871), Анна Васильевна и ее муж принимали активное участие. Во время разгрома Коммуны Виктор Жакляр был схвачен. Ему грозил расстрел. Софья Васильевна, пробравшаяся с мужем в осажденный Париж, работала в госпитале для раненых коммунаров. Для спасения мужа сестры Софья Васильевна выписала в Париж отца, которому вследствие прежних знакомств с влиятельными деятелями нового буржуазного правительства удалось устроить „бегство" зятя.

Софья Васильевна с мужем поселилась в Петербурге. Никакого применения своих знаний она найти не могла. На несколько лет она отошла от математики, принимая самое деятельное участие в политической и культурной жизни родины. Благодаря П. Л. Чебышеву она в 1880 году вернулась к математике. Ее просьба о разрешении держать экзамены на получение ученой степени в России была отклонена министерством. Безрезультатной оказалась также попытка профессора Гельсингфорского университета Миттаг-Леффлера устроить Софью Васильевну преподавателем этого университета.

Е. Ф. Литвинова (1845—1918).

В 1881 году в Стокгольме был открыт новый университет, кафедра математики которого была предоставлена профессору Миттаг-Леффлеру. После весьма сложных усилий ему удалось склонить либеральные круги Стокгольма к решению пригласить Софью Васильевну на должность доцента в новый университет. После трагической гибели мужа в апреле 1883 года Софья Васильевна в ноябре того же года переехала в Стокгольм. Демократическая газета встретила приезд ее словами:

„Сегодня мы сообщаем о приезде не какого-нибудь пошлого принца... Принцесса науки, госпожа Ковалевская, почтила наш город своим посещением и будет первым доцентом женщиной во всей Швеции“.

Консервативные слои ученых и населения встретили Софью Васильевну враждебно, а писатель Стриндберг доказывал, что женский профессор математики есть явление чудовищное, вредное и неудобное. Однако талант ученого и талант педагога, которыми обладала Софья Васильевна, заставили умолкнуть всех противников. Через год она была избрана штатным профессором, и ей было поручено кроме математики и временное чтение лекций по механике.

На 1888 год Парижская Академия наук объявила для получения одной из самых больших своих премий тему: „Задача о вращении твердого тела вокруг неподвижной точки“. Эта задача была решена до конца лишь в двух частных случаях. Решения эти принадлежали величайшим математикам своего времени: петербургскому академику Л. Эйлеру (1707—1783) и фран-

В. И. Шифф
(ум. в 1918 г.).

цузскому математику Ж. Лагранжу (1736–1813). Требовалось „усовершенствовать задачу в каком-нибудь существенном пункте“. На конкурс среди 15 работ поступила и работа под девизом: „Говори, что знаешь, делай, что должен, да будет, что будет“. Эта работа была настолько выше всех остальных, что академическая комиссия, состоявшая из крупнейших математиков Франции, присудила автору увеличенную с 3000 до 5000 франков премию. Автором ее оказалась Софья Васильевна Ковалевская. Она же, как отмечает французский журнал того времени, пришедшая для получения премии, была первой женщиной, переступившей порог Академии.

Понятна радость Софьи Васильевны, которая по этому поводу писала:

„Задача, которая ускользала от величайших математиков, задача, которую назвали математическою русалкою, оказалась схваченной... кем? Соней Ковалевской!“

Предпринятая друзьями Софьи Васильевны попытка „возвратить С. В. Ковалевскую России и русской науке“ кончилась лицемерною отпискою царской Академии наук о том, что „в России госпожа Ковалевская не может получить положения столь почетного и хорошо оплачиваемого, как то, которое она занимает в Стокгольме“. Лишь в конце 1889 года академикам-математикам удалось добиться избрания Софьи Васильевны членом-корреспондентом Петербургской Академии, причем предварительно Академии пришлось решить принципиальный вопрос о „допущении лиц женского пола к избранию в члены-корреспонденты“. Так как это почетное звание не давало никаких материальных средств, то возвращение Ковалевской на родину осталось попрежнему невозможным.

В начале 1891 года Софья Васильевна, возвращаясь с зимних каникул, которые она провела в Италии, простудилась; 10 февраля она скончалась в Стокгольме и похоронена там.

С. В. Ковалевская напечатала девять научных работ, получив за одну из них еще премию Шведской Академии наук. Работы ее относятся к области чистой математики, механики, физики и астрономии (о кольце Сатурна). В работе по механике она закончила то, что начали знаменитые Эйлер и Лагранж, в математике завершила идеи Коши, в вопросе о кольце Сатурна дополнила и исправила теорию Лапласа. Эйлер, Лагранж, Лаплас, Коши — это крупнейшие математики конца XVIII и начала XIX века. Чтобы дополнить или исправлять работы таких корифеев науки, нужно быть очень большим ученым. Таким ученым была С. В. Ковалевская. Новые научные результаты, полученные ею, излагаются в больших университетских курсах.

Софья Васильевна в то же время была замечательным писателем-беллетристом. Ее автобиографические „Воспоминания детства“, роман „Нигилистка“ и отрывки незаконченных или утерянных повестей дают интересную картину общественной и политической жизни России второй половины XIX века. Критика отмечала, что со страниц ее повестей „веет Тургеневым“. Она же написала совместно со шведской писательницей Миттаг-Леффлер интересную драму „Борьба за счастье“, единственное в мировой литературе произведение, написанное по математическому плану.

С. В. Ковалевской помимо ее научных и литературных заслуг принадлежит

Е. А. Нарышкина (1895—1940).

исключительное место в истории борьбы за равноправие женщин. Она неоднократно говорит в своих письмах, что ее успех или неуспех является не только ее личным делом, а связан с интересами всех женщин. Поэтому она была чрезвычайно требовательна к себе. В одном из своих стихотворений она пишет:

„С того человека и взыщется много,
Кому было много талантов дано!"

Софья Васильевна сознавала, что ей дано много талантов, что она вложила их в дело всех женщин и что с нее много спросится.

Когда Софья Васильевна в восьмидесятых годах хлопотала о признании ее ученых прав в России, царский министр ответил, что госпожа Ковалевская и ее дочь не доживут до времени, когда в России женщина получит доступ на профессорскую кафедру.

Царские министры были не только плохими политиками, но и плохими пророками. Дочь Софьи Васильевны — врач Софья Владимировна Ковалевская, умершая в 1952 году в Москве, — прожила 35 лет при советской власти, когда женщине открыты все поприща деятельности.

Н. Н. Гернет (1876—1943).

До Софьи Васильевны Ковалевской история математических наук знает лишь нескольких женщин-математиков. Таковы: гречанка Ипатия в Александрии, растерзанная в 415 году нашего летосчисления толпою христиан, возбужденных агитацией монахов, опасавшихся влияния на начальника города красивой и ученой язычницы Ипатии; маркиза дю Шатле (1706—1749), переводчица сочинений Ньютона на французский язык; она училась у Вольтера историческим наукам и учила Вольтера математическим; биография ее отмечает, что для обоих это учение оказалось безрезультатным; профессор математики Болонского университета итальянка Мария Аньези (1718—1799), имя которой носит в высшей математике кривая линия „локон Аньези“; француженка Софья Жермен (1776—1831), имя которой встречается в теории чисел и высшем анализе; француженка Гортензия Лепот (1723—1788), известная вычислительница, именем которой назван цветок гортензия, привезенный ею из Индии.

П Я. Полубаринова-Кочина.

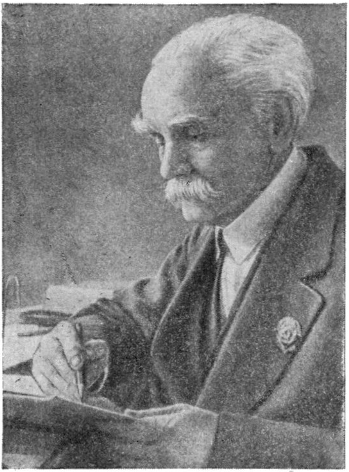
В Советском Союзе много женщин — профессоров математики, среди которых можно указать таких выдающихся профессоров, как Вера Иосифовна Шифф (ум. в 1918 г.), Надежда Николаевна Гернет (1876—1943), Екатерина Алексеевна Нарышкина (1895—1940), подруга С. В. Ковалевской Елизавета Федоровна Литвинова (1845—1918), и много ныне здравствующих. Вместе с тем нельзя не согласиться с членом-корреспондентом Академии наук СССР, доктором физико-математических наук Пелагеей Яковлевной Полубариновой-Кочиной, что „Ковалевская превосходила своих предшественниц талантом и значительностью полученных результатов. Вместе с тем она опередила общий уровень женщин, стремившихся к науке в ее время“.

С. В. Ковалевская остается на все времена гордостью русской науки.

Замечательные русские математики-педагоги

Было бы неблагодарностью с нашей стороны, если бы мы рядом с блестящими именами создателей математики не упомянули имен тех скромных тружеников, которые „подают в руки школьнику“ достижения науки.

Это имена авторов учебников, из которых назовем А. П. Киселева и Н. А. Шапошникова. Ученик должен знать о них.



А. П. Киселев
(1852—1940).

Андрей Петрович Киселев родился 30 ноября 1852 года в Орловской губернии, в бедной семье. Уже во время обучения в Орловской гимназии он содержал себя уроками. По окончании гимназии в 1871 году он на деньги, вырученные за полученную золотую медаль, едет учиться в Петербург. В университете он слушает лекции академиков П. Л. Чебышева, Е. И. Золотарева и О. И. Сомова, Д. И. Менделеева и других крупных ученых. В 1875 году Андрей Петрович кончает университет и поступает преподавателем Воронежского реального училища.

После пятнадцати лет работы царские чиновники признают его в политическом отношении подозрительным за его деятельность в Обществе вспомоществования нуждающимся ученикам. А. П. Киселев переходит на работу в Воронежский кадетский корпус, где работает до выхода в отставку в 1910 году. С 1884 года один за другим выходят в свет учебники Киселева по арифметике, алгебре, геометрии, физике, по началам высшей математики.

Все учебники математики, составленные Киселевым, вскоре вытеснили прежние учебники и выдержали множество изданий.

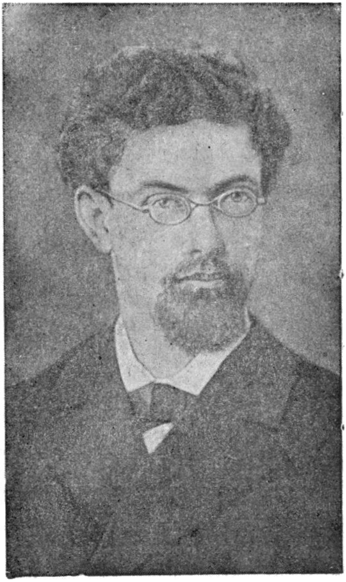
После революции Андрей Петрович возвращается к преподаванию.

26 декабря 1933 года Президиум ЦИК постановляет: „Андрея Петровича Киселева, старейшего преподавателя математики и автора учебников, которые в течение десятилетий служили основными руководствами

в русской школе, за его плодотворную долголетнюю педагогическую деятельность наградить орденом Трудового Красного Знамени". До самой своей кончины, 8 ноября 1940 года, Андрей Петрович продолжал работать над улучшением своих учебников.

Другой замечательный педагог-математик, хорошо известный ученикам школы, — Николай Александрович Шапошников. Родился он в 1851 году в Москве, где окончил гимназию с золотой медалью и университет в 1874 году, получив золотую медаль за научную работу. Четырнадцать лет Николай Александрович работал в своей родной гимназии и одновременно на Высших женских курсах.

В 1880 году Н. А. Шапошников защищает диссертацию на степень магистра чистой математики и приглашается доцентом, позднее профессором, Московского технического училища, где работает до 1893 года. После Великой Октябрьской социалистической революции Николай Александрович был профессором и ректором Северо-Кавказского политехнического института, где и работал до последних дней своей жизни. Умер Николай Александрович 24 февраля 1920 года.



Н. А. Шапошников (1851—1920).

В 1876 году Н. А. Шапошников написал учебник алгебры, который, вследствие отклонений от привычных способов изложения тогдашних учебников, был раскритикован ученым комитетом Министерства народного просвещения, из состава которого несколько лет до этого вышел П. Л. Чебышев.

Такую же участь имели его учебники тригонометрии (два различных изложения).

Боевой характер Николая Александровича привел к напечатанию им целого ряда очень резких брошюр против министерских чиновников.

Несмотря на то, что книги Н. А. Шапошникова в школы не были допущены, они выдержали ряд изданий, так как во всех этих книгах была свежая струя, выгодно отличавшая их от других.

В сотрудничестве с учителем — Н. К Вальцевым — Н. А. Шапошников составил задачник по алгебре, который настолько превосходил прежние, что даже враждебное к автору министерство допустило его к применению в школах. Свыше пятидесяти лет задачник этот обслуживает русскую школу. Такие же учебники были Н. А. Шапошниковым составлены по арифметике.

В возведении величественных зданий советской математики имеют заслуги скромные труженики, какими были А. П. Киселев и Н. А. Шапошников.

ПОСЛЕСЛОВИЕ

Перед нами прошли десятки имен ученых, которые мы встречаем в курсе математики средней школы.

Сравнивая вклады, внесенные ими в сокровищницу мировой культуры, нельзя не видеть особого характера русского гения.

Над проблемою о параллельных бились сильнейшие умы всех наций. Решение ее удалось Николаю Ивановичу Лобачевскому.

Проблема простых чисел... „Первый, кто после Евклида пошел верным путем и достиг успеха, был Пафнутий Львович Чебышев", — утверждает лучший зарубежный знаток этого вопроса.

„Для решения задачи Гольдбаха существующей математики недостаточно", — признает крупнейший английский математик XX столетия.

В ответ на это Иван Матвеевич Виноградов создает те новые методы математики, которые нужны для решения этого вопроса.

Таких примеров величия русской математики можно было бы привести еще много.

Во все времена математическая наука в России стояла очень высоко.

Какого расцвета она достигла в наше, советское, время, видно хотя бы из того, что обзор научных работ по математике, изданных за тридцать лет советской власти, составляет громадную книгу в тысячу страниц („Математика в СССР за тридцать лет". Москва, 1948).

Эти работы являются большим научным вкладом, а наши ученые в большинстве отделов математики занимают ведущее положение в мировой науке. Большинство этих работ имеет огромное практическое применение.

В нашей стране созданы все необходимые условия для развития науки. Ежегодно присуждаемые Сталинские премии за выдающиеся работы, по всем отраслям знания, показывают, с каким вниманием и заботой относятся к ученым наша коммунистическая партия и советское правительство.

Хотелось бы, чтобы юный читатель сам зажегся желанием стать активным борцом за дальнейший расцвет передовой советской математической науки.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

для желающих углубить свои знания по вопросам, затронутым в книге

Звездочкой (*) отмечены более доступные работы.

Общие пособия

ДРЕВНИЕ НАРОДЫ

Нейгебауэр О. Лекции по истории античных математических наук. Том 1. Догреческая математика. Москва, 1937.

МАТЕМАТИКА В РОССИИ

Юшкевич А. П.* Математика и ее преподавание в России XVII—XIX вв. Журнал „Математика в школе“, 1947, № 1 и следующие.

Под ред. С. И. Вавилова.* Люди русской науки. 2 тома, 1948.

Пособия по отдельным вопросам

в порядке расположения их в нашей книге

ЕГИПЕТ

Бобынин В. В. Математика древних египтян. Москва, 1882. Обновленная редакция этой же работы: журнал Министерства народного просвещения, 1909, октябрь — ноябрь.

Цинзерлинг Д. П. Геометрия у древних египтян (Московский папирус). „Известия Российской Академии наук“, 1925.

ВАВИЛОН И УРАРТУ

Выгодский М. Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире. Москва, 1941.

Петросян Г. Арифметика в Урарту. „Известия Армянской Академии наук“, 1945, № 3—4 и 1946, № 4.

ИНДИЯ

Бобынин В. В. Древнеиндусская математика и отношение к ней древней Греции. „Известия Казанского физико-математического общества“, 2-я серия, 1917, т. XXII.

ГРЕЦИЯ

Выгодский М. Я.* Арифметика и алгебра в древнем мире. Москва, 1941.

ЗНАМЕНИТЫЕ ЗАДАЧИ ДРЕВНОСТИ

Лебедев В. И.* Очерки по истории точных наук. Выпуск IV (знаменитые геометрические задачи древности). Москва, 1917.

Депман И. Я. Недавно найденное сочинение Архимеда. Журнал „Ма ематика в школе“, 1940, № 6.

МАТЕМАТИКА У АРМЯН

Вопросы и решения Анании Шираца, армянского математика VII века. Издал и перевел И. А. Орбели. Петроград, 1918.

Туманян Т. Г. „Начала“ Евклида по древнеармянским источникам. „Историко-математические исследования“, вып. VI, Москва, 1953.

МАТЕМАТИКА У НАРОДОВ СРЕДНЕЙ АЗИИ

Омар Хайям и его математические труды. Текст и примечания Юшкевича А. П. и Розенфельда Б. А. „Историко-математические исследования“, вып. VI, Москва, 1953.

ПЕРЕВОДЫ СТИХОВ ОМАРА ХАЙЯМА

Омар Хайям. Робайят. Изд. Academia. Ленинград, 1935.

Омар Хайям. Четверостишия, избранное, Таджикгосиздат, Сталинабад, 1948.

Персидские лирики X—XV вв. Москва, изд. Собашниковых, 1916.

Райнов Т.* Великие ученые Узбекистана. Ташкент, 1943.

Юшкевич А. П. О математике народов Средней Азии в IX—XV вв. „Историко-математические исследования“, вып. IV. Москва, 1951.

Бируни. Сборник Академии наук СССР. Москва, 1950.

Бартольд В. В. История культурной жизни Туркестана. Академия наук СССР. Ленинград, 1927.

Бартольд В. В.* Улугбек и его время. Академия наук, 1923.

Леонов.* Улугбек — великий астроном XV века. Москва, 1949.

Кары-Ниязов. Астрономическая школа Улугбека. Москва, 1950.

МАТЕМАТИКА У РУССКОГО НАРОДА

Гнеденко Б. В.* Краткие беседы о зарождении и развитии математики. Москва, 1946.

Гнеденко Б. В. Очерки по истории математики в России. Москва, 1946.

Юшкевич А. П. О некоторых статьях „Правды Русской". Труды Института истории естествознания Академии наук СССР, т. II.
Кирик Новгородец. Его статьи с примечаниями В. П. Зубова. „Историко-математические исследования", вып. VI. Москва, 1953.
Спасский И. Г. Русские счеты. „Историко-математические исследования", вып. V. Москва, 1952.
Депман И. Я.* Л. Ф. Магницкий. Журнал „Математика в школе", 1940, № 5.
Депман И. Я.* Леонтий Магницкий. „Морской сборник", 1940, № 1.

АРИФМЕТИКА

Беллюстин В.* Как постепенно дошли люди до настоящей арифметики. Москва, 1940.
Лебедев В. И.* Очерки по истории точных наук, выпуск III. Как постепенно обобщалось понятие о числе. Москва, 1917.
Филиппов А.* Великий счет. Одесса, 1923.
Берман Н. Г.* Число и наука о нем.
Депман И. Я.* Меры и метрическая система. Детгиз, Ленинград, 1953.

АЛГЕБРА

Лебедев В. И.* Очерки по истории точных наук, вып. I. Кто изобрел алгебру. Москва, 1916. Вып. III. Как постепенно обобщалось понятие о числе. Москва, 1917.
Раик А. Е. Из ранней истории алгебры. „Ученые записки" Молотовского Государственного университета, т. VIII, вып. I, 1953.

ГЕОМЕТРИЯ

Лебедев В. И.* Очерки по истории точных наук, вып. II. Кто автор первых теорем геометрии. Москва, 1916.
„Начала" Евклида. Перевод с греческого и комментарии Д. Д. Мордухай-Болтовского, в 3 томах. Москва, 1948—1950. Исключительно ценные исторические примечания редактора.

ЛОБАЧЕВСКИЙ Н. И.

Каган В. Ф.* Великий ученый Н. И. Лобачевский и его место в мировой науке. Москва, 1943
Александров П. С.* Н. И. Лобачевский — великий русский математик. Изд. „Молодая гвардия". Москва, 1946.
Лобачевский Н И. Сборник статей. Москва, 1943.
Лобачевский Н. И. „Историко-математические исследования", вып. III. Москва, 1950.

ЧЕБЫШЕВ П. Л.

Крылов А. Н.* П. Л. Чебышев. Москва, 1944.
Отрадных Ф. П. П. Л. Чебышев. Москва, 1953.

Делоне Б. Н. Петербургская школа теории чисел. Москва, 1947.
Прудников В. Е. П. Л. Чебышев — ученый и педагог. Москва, 1950.

КОВАЛЕВСКАЯ С. В.

Полубаринова-Кочина П. Я.* Жизнь и деятельность С. В. Ковалевской. Москва, 1950. „Памяти С. В. Ковалевской". Сборник статей, Академия наук СССР. Москва. 1951.
Бобынин В. В. Древнейшая из женщин-математиков. Сборник статей по вопросам физико-математических наук и их преподавания, т. I. Москва, 1924.

ЭЙЛЕР Л.

Леонард Эйлер. Сборник Академии наук СССР к 150-летию со дня смерти. 1935.
Юшкевич А. П. Эйлер и русская математика XVIII века. Труды Института истории естествознания Академии наук СССР, т. III. Биография* Эйлера в серии „Жизнь замечательных людей", изд. Павленкова.

КРЫЛОВ А. Н.

Писаржевский О.* Адмирал корабельной науки. Лениздат, 1945.
Штрайх С. Я. А. Н. Крылов. Москва, 1950.
Лучанинов С.* Великий кораблестроитель, Москва, 1951.

ПЕРВУШИН И. М.

Раик А. Е. Уральский математик Иван Михеевич Первушин. „Историко-математические исследования", вып. VI. Москва, 1953.

ОСТРОГРАДСКИЙ М. В.

Марон И. А. Академик М. В. Остроградский. „Историко-математические исследования", вып. III и IV. Москва, 1950—1951.
Гнеденко Б. В. М. В. Остроградский. Москва, 1952.
Гнеденко Б. В.* Выдающийся русский ученый М. В. Остроградский. Москва, 1952. (Брошюра.)
Отрадных Ф. П. М. В. Остроградский. Ленинград, 1953.

СОДЕРЖАНИЕ

СПИСОК КНИГ

изданных Ленинградским отделением Детгиза по серии „В помощь школьнику“

Бабков И. По солнечному Крыму. М. — Л., Детгиз, 1953. 128 стр.
Бармин А. Урал-богатырь. М. — Л., Детгиз. 1948. 95 стр.
Гор Г. Алтай. М. — Л., Детгиз, 1951. 92 стр.
Гор Г. и Лешкевич В. Сахалин. М.—Л., Детгиз, 1949. 74 стр.
Дружинин В. Советская Карелия. М.—Л., Детгиз, 1951. 108 стр.
Дружинин В. Советская Эстония М.—Л., Детгиз, 1952. 92 стр.
Жилин С. Камчатка. М.—Л., Детгиз, 1949. 96 стр.
Карелин Д. Антарктика. М.—Л., Детгиз, 1949. 76 стр.
Карелин Д. По Советской Арктике. М.—Л., Детгиз, 1948. 96 стр.
Родионенко Г. и Гроденский Гр. Советские субтропики. М.—Л., Детгиз, 1953. 150 стр.
Александрова В. Лес в степи. М.—Л., Детгиз, 1953. 100 стр.
Корсунская В. Из жизни растений. М.—Л., Детгиз, 1951. 80 стр.
Корсунская В. Приключения плодов и семян. М.—Л., Детгиз, 1953. 104 стр.
Лебедев В. Рассказы о Мичурине. М.—Л., Детгиз, 1949. 76 стр.
Успенский Г. Аскания Нова. М.—Л., Детгиз, 1950. 104 стр.
Якубенко А. Кровь и кровообращение. М.—Л., Детгиз, 1951. 102 стр.
Якубенко А. Что такое аппетит. М.—Л., Детгиз, 1953. 158 стр.
Ария С. Великий закон природы. М.—Л., Детгиз, 1953. 110 стр.
Рахманов Л. Яблочков. М.—Л., Детгиз, 1952. 84 стр.
Яновская Ж. Кулибин. М.—Л., Детгиз, 1951. 112 стр.
Депман И. Из истории математики. М.—Л., Детгиз, 1950. 116 стр.
Депман И. Меры и метрическая система. М.—Л., Детгиз, 1953. 96 стр.
Жемчужников Ю. и Гор Г. Каменный уголь. М. — Л., Детгиз, 1949. 68 стр.
Наливкин Д. и Петров Л. Наша нефть. М.—Л., Детгиз, 1952. 100 стр.
Караев Г. Битва под Москвой, М.—Л., Детгиз, 1951. 124 стр.
Караев Г. Сталинградская битва. М.—Л., Детгиз, 1949. 98 стр.
Прилежаева-Барская Б. В древнем Киеве. М.—Л., Детгиз, 1953. 123 стр.
Прилежаева-Барская Б. Как жили наши предки славяне. М.—Л., Детгиз, 1952. 76 стр.

Цена ~~3 р. 05 к.~~